COMUNICACIONES - AÑO 2015

Práctica 1: Correlación y Densidad Espectral de Potencia. Ergodicidad. Ancho de Banda de Ruido.

1. **Repaso de Señales y Sistemas**

   a) Dadas las siguientes señales determine si son de energía o de potencia. Calcule su valor medio, su función de autocorrelación y su densidad espectral de energía o de potencia según corresponda.

   I. $x(t) = \text{sen}(20\pi t) + j\cos(40\pi t)$ II. $x(t) = \sqcap(t/5)$ III. $x(t) = u(t)$ (escalón unitario)

   IV. $x(t) = e^{-j2\pi t^2}$ (note que $\int_0^\infty \cos(2\pi t^2)dt = \int_0^\infty \text{sen}(2\pi t^2)dt = \frac{1}{4}$, integrales de Fresnel)

   b) Considere el PA dado por $X(t) = A\cos(2\pi f_0 t) + B\,\text{sen}(2\pi f_0 t)$ con A y B dos VA no correlacionadas y f_0 constante no nula. ¿Qué condición deben cumplir $\text{E}\{A\}$, $\text{E}\{B\}$, $\text{E}\{A^2\}$, $\text{E}\{B^2\}$ y $\text{E}\{AB\}$ para que $X(t)$ sea ESA? Calcule en este caso la DEP de $X(t)$.

   c) Escriba la desigualdad de Cauchy-Schwarz para señales determinísticas de energía y de potencia $x(t)$ e $y(t)$, y para señales aleatorias ESA $X(t)$ e $Y(t)$.

   d) Considere un SLIT estable con respuesta impulsional $h(t)$, entrada $x(t)$ de energía y salida $y(t)$.

   I. Demuestre que $r_{yx}(\tau) = \{h * r_{xx}\}(\tau)$ y $r_{xy}(\tau) = \{h^- * r_{xx}\}(\tau)$, con $h^-(t) = h(-t)$.

   II. Demuestre que $r_{yy}(\tau) = \{r_{hh} * r_{xx}\}(\tau)$.

   Note que I. y II. son válidos para señales de potencia utilizando la correlación correspondiente.

   e) Considere ahora que el PAESA $X(t)$ es la entrada al SLIT e $Y(t)$ su salida.

   I. Halle una expresión del valor medio de la salida $< Y(t) >$ en función de $< X(t) >$.

   II. Halle una expresión de la esperanza de la salida $\text{E}\{Y(t)\}$ en función de $\text{E}\{X(t)\}$.

   III. Suponga ahora que $X(t)$ es ergódico en media ¿Es $Y(t)$ ergódico en media?

   f) Sea $X(t)$ un PAESA con distribución uniforme en [-3,3]. ¿Cuáles de las siguientes pueden ser funciones de autocorrelación de $X(t)$? En caso de poder serlo calcule la DEP de $X(t)$.

   I. $R_{XX}(\tau) = 3$ II. $R_{XX}(\tau) = 3\sqcap(\tau)$ III. $R_{XX}(\tau) = 3\bigwedge(\tau)$

   IV. $R_{XX}(\tau) = 3\,\text{sinc}(\tau)$ V. $R_{XX}(\tau) = 3\,\text{sen}^2(\tau)$ VI. $R_{XX}(\tau) = 3\,\text{sinc}^2(\tau)$

   VII. $R_{XX}(\tau) = 3\cos(\pi\tau)$ VIII. $R_{XX}(\tau) = 2\cos(5\pi\tau)$ IX. $R_{XX}(\tau) = 1 + 2\,e^{-|\tau|}$

   ¿En qué casos de los anteriores es $X(t)$ ergódico en media?

   g) Un PA $X(t)$ con media nula y $R_{XX}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$ (ruido blanco) es muestreado cada T segundos previo paso por el filtro anti-replicado correspondiente. Demuestre que la secuencia obtenida $X[n]$ tiene media nula y autocorrelación $R_{XX}[m] = \frac{N_0}{2T}\,\delta[m]$ (o sea, es blanca).

2. **DEP por definición**

   a) Sea $X(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$, con ω_0 y A ctes. y $\theta \sim \mathcal{U}[-\pi/4, \pi/4]$.

   I. Calcule la potencia instantánea del proceso, $\mathcal{P}_{XX}(t) = \text{E}\{|X(t)|^2\}$. ¿Es el resultado coherente con la estacionareidad de este PA? ¿Cómo debería ser este valor si el proceso fuera ESA?

   II. Calcule la potencia media del PA, $\overline{\mathcal{P}}_{XX}$, como el valor medio (temporal) de $\mathcal{P}_{XX}(t)$.

   III. Calcule la TF de la versión truncada de $X(t)$ al intervalo $[-T, T]$, $\mathcal{F}\{X_T(t)\}$, y con ella, la densidad espectral de energía del proceso truncado, $\text{E}\{|\mathcal{F}\{X_T(t)\}|^2\}$.

   IV. Dividiendo por $2T$ y tomado el límite para $T \to \infty$, obtenga la densidad espectral de potencia de $X(t)$, $S_{XX}(f)$, por definición. Recuerde que $\lim_{T\to\infty} T\,\text{sinc}(Tf)$ “ = ” $\lim_{T\to\infty} T\,\text{sinc}^2(Tf)$ “ = ” $\delta(f)$.

   V. Calcule el promedio temporal de $R_{XX}(t+\tau, t)$ (con respecto a t). Luego obtenga su TF y verifique que coincide con $S_{XX}(f)$. ¿Cuánto vale la integral de S_{XX} en todo el espectro?

b) Mediante un procedimiento similar calcule la DEP la secuencia aleatoria $X[n] = A$ donde A es una VA con distribución uniforme en [-1,1]. ¿Es X[n] ergódica en media?

En este caso deberá utilizar que $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} N\pi s}{\operatorname{sen} \pi s}$ “ = ” $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{N} \dfrac{\operatorname{sen}^2 N\pi s}{\operatorname{sen}^2 \pi s}$ “ = ” $\text{Ш}(s)$

3. **Ergodicidad en la Correlación**

En este ejercicio probaremos que los PA discretos obtenidos por filtrado de secuencias de ruido blanco son ergódicos en correlación. Para ello consideremos dos secuencia aleatorias: $X[n]$ *i.i.d.* con media nula y varianza σ_X^2 finita e $Y[n]$ que se obtiene al aplicar $X[n]$ a un sistema SLID estable.

a) Muestre que ambas secuencias son ergódicas en media (similar a 1. *f*))

b) Verifique que $X[n]$ es un PA de potencia. En consecuencia, definimos la correlación temporal truncada como $r_{XX}^N[m] = \dfrac{1}{2N+1} \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} X[n+m]X^*[n]$. Pruebe que $\mathrm{E}\left\{r_{XX}^N[m]\right\} = R_{XX}[m] = \sigma_X^2\ \delta[m]$.

c) Ahora tenemos ver que $\operatorname{Var}\left\{r_{XX}^N[m]\right\} \to 0$, cuando $N \to \infty$. Para ello demuestre que

$$\operatorname{Var}\left\{r_{XX}^N[m]\right\} = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{n=-N}^{N} \sum_{k=-N}^{N} \left(\mathrm{E}\left\{X[n+m]X^*[n]X[k+m]X^*[k]\right\} - R_{XX}^2[m]\right)$$

d) Tomemos primero el caso $m = 0$ en *c*). Reescriba la fórmula anterior para este caso. Note que de los $(2N+1)^2$ términos de la sumatoria, sólo los que tienen $n = k$ (los de la diagonal) van a ser distintos de cero, e iguales a $K = (\mathrm{E}\left\{X^4\right\} - \sigma_X^4)$ **que supondremos finito y mayor que cero**. Aplique el límite y vea que $X[n]$ es “ergódico en la varianza”.

e) Consideremos ahora el caso $m \neq 0$ en *c*). En la esperanza de la fórmula ahora tenemos cuatro instantes del proceso. Por tener $X[n]$ media nula y ser sus valores independientes para instantes distintos, sólo habrá términos no nulos cuando los instantes sean iguales “dos a dos”, en cuyo caso valen σ_X^4. Analice las posibles combinaciones y vea que nuevamente sólo contribuyen a la suma los términos con $n = k$. Sume, aplique el límite y vea que $X[n]$ es ergódico en la correlación.

f) Similarmente a lo demostrado en el ejercicio 1. *d*) para cada par de señales entrada-salida del SLID se cumple que $r_{yy}[m] = \{r_{hh} * r_{xx}\}[m]$. En particular es cierto para cada par de realizaciones de $X[n]$ y de $Y[n]$. Utilizando esta fórmula demuestre que $Y[n]$ es ergódico en la correlación.

g) Para simular un caso concreto consideraremos que $X[n]$ tiene distribución $\mathcal{U}[-1/2, 1/2]$ y que el SLID calcula la suma de los doce últimos valores de la entrada (como un promedio móvil, pero en forma causal y sin dividir por el número de muestras). Genere una realización de $X[n]$ en MATLAB de largo 1000 y obtenga la $Y[n]$ correspondiente. Calcule las autocorrelaciones de entrada y de salida con `xcorr(x,'unbiased')` (de -30 a 30 por ejemplo) y vea que aproximadamente coinciden con $R_{XX}[m]$ y $R_{YY}[m]$.

4. **Onda telegráfica Aleatoria**

Considere que el PA $X(t)$ es una onda telegráfica aleatoria de amplitudes $\pm A$ y tiempos de transición de acuerdo a un proceso de arribos de Poisson con tasa media de arribo α.

a) Calcule su función de autocorrelación $R_{XX}(\tau)$ y su DEP $S_{XX}(f)$.

b) Simule aproximadamente 200s de $X(t)$ (muestreados cada 0.1s) en MATLAB con $\alpha = 0{,}5\ \mathrm{seg}^{-1}$. ejecutando:

```
rn = -2*log(1-rand(1,100));% Distribución exponencial a partir de uniforme.
x=ones(1,round(10*rn(1)));
for ii=2:100; x=[x ((-1)^(ii+1))*ones(1,round(10*rn(ii)))]; end
x=sign(randn(1))*x;
```

Interprete las instrucciones y explique por qué las transiciones generadas obedecen una ley Poisson. Grafique.

c) Calcule la autocorrelación de la secuencia generada. Observe el gran error de estimación para valores grandes de retardo. Grafique para τ entre -5 y 5. Compare con el resultado de *a*).

d) Genere varias realizaciones y obtenga una aproximación a la DEP de $X(t)$ promediando varias `fft`. Acomode las escalas y compare con el resultado de *a*).

5. **Ancho de Banda de Ruido usando MATLAB**

En este ejercicio simularemos el filtrado de ruido blanco gaussiano con un SLIT sencillo. Supondremos que el sistema es causal y tiene una función de transferencia $H(s) = \frac{1}{s+1}$ y que a su entrada está el PA $X(t)$ con media nula, $R_{XX}(\tau) = \frac{N_0}{2}\,\delta(\tau)$ y distribución gaussiana.

a) Calcule el Ancho de Banda de -3dB y el equivalente de Ruido del sistema. Calcule la potencia y la DEP de la salida $Y(t)$.

b) Considere que el PA de entrada se muestrea a 100Hz utilizando un filtro anti-replicado ideal. Dé una expresión para la potencia del PA muestreado. Suponiendo que esta potencia es igual a 1 simule 1000 segundos de una realización. Verifique media, varianza y distribución (usando `hist`).

c) Obtenga un filtro digital que aproxime al SLIT continuo utilizando la transformación bilineal ($s = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$, con T tiempo de muestreo). Halle la ecuación en diferencias correspondiente y filtre la realización obtenida anteriormente. Puede usar el comando `filter`.

d) Calcule la potencia de la secuencia obtenida al filtrar (recuerde descontar el transitorio inicial). Compare con el resultado teórico de *a*).

6. **¿Incoherencia?**

Sea $X(t)$ un PAESA con $\lim\limits_{\tau\to\infty} C_{XX}(\tau) = 0$ y de banda limitada a W (es decir, $S_{XX}(f) = 0$ si $|f| > W$).

a) Considere el PA $Y(t) = X(t)\,\cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$ con θ_0 V.A. $\mathcal{U}[-\pi,\pi]$ independiente de $X(t)$. ¿Es $Y(t)$ un PAESA? ¿Es $Y(t)$ un PA ergódico en media? Calcule la DEP de $Y(t)$.

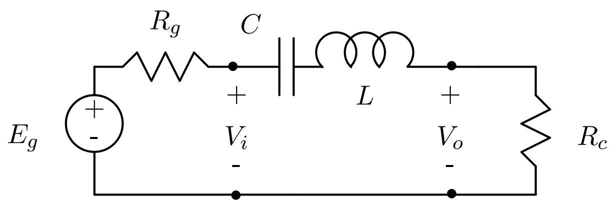
b) Calcule la DEP de $Z(t) = Y(t)\,\cos(2\pi f_0 t + \theta_1)$ con $\theta_1 \sim \mathcal{U}[-\pi,\pi]$ e independiente de $X(t)$ y de θ_0. Aquí $Z(t)$ se obtiene haciendo un procesamiento "no coherente" de $Y(t)$ (el nuevo coseno no está en fase con el anterior). Note que puede aplicar directamente los resultados del inciso anterior.

c) Calcule nuevamente la DEP de $Z(t)$ para el caso $\theta_0 \sim \mathcal{U}[-\pi,\pi]$ y $\theta_1 = \theta_0$ (cuando hay "coherencia"), es decir $Z(t) = X(t)\,\cos^2(2\pi f_0 t + \theta_0)$. Compare con los resultados anteriores. ¿Por qué en este caso no se puede aplicar *a*) para hallar la DEP de $Z(t)$ en función de la de $Y(t)$ como se podía en *b*)?

d) Repita *c*) para el caso $\theta_0 \sim \mathcal{U}[-\pi,\pi]$ y $\theta_1 = \theta_0 + \pi/2$.

7. **EL filtro Pasa-Banda**

En la figura se muestra el esquema de un filtro pasa-banda pasivo.



a) Verifique que su transferencia es $H(s) = \dfrac{V_o(s)}{E_g(s)} = \dfrac{(K\omega_0/Q)s}{s^2 + (\omega_0/Q)s + \omega_0^2}$, con $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $Q = \frac{\omega_0 L}{R_g+R_c}$ y $K = \frac{R_c}{R_g+R_c}$. Consideraremos que $4Q^2 > 1$.

b) Muestre que el ancho de banda de 3 dB del filtro es igual a $B_3 = f_0/Q$, con $f_0 = \omega_0/2\pi$.

Ayuda: Exprese la ganancia del sistema como $|H(\omega)|^2 = \dfrac{K^2}{1 + Q^2(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2}$

c) Obtenga el ancho de banda de ruido del filtro (puede usar teoría de residuos).

d) Considerando que $R_g = R_c = 50\Omega$, dé valores a L y C para obtener un filtro pasabanda con $f_0 = 970\text{kHz}$ y $B_3 = 590\text{kHz}$.

e) Suponga que a la entrada del filtro hay ruido blanco con DEP $1\mu\text{V}^2/\text{Hz}$. Usando *c*) calcule la potencia de la señal a la salida del filtro para los valores hallados en *d*).

8. **SNR a pedir de oído**

En este ejercicio intentaremos relacionar la calidad de una señal de voz de acuerdo a la relación señal a ruido que ésta posea. ¡Para ello deberemos escuchar y ver que pasa!

a) Con alguna aplicación que permita grabar audio genere un archivo de sonido `.wav`. La calidad del sonido debe ser muy buena ya que supondremos que no tiene ruido apreciable. Otra opción es bajar el archivo `audio.wav` de la página de la cátedra.

b) Utilizando el comando `[X,fs,nb]=wavread('archivo.wav');` cargue en la matriz `X` las secuencias de muestras que representan los dos canales de la señal de audio estereo en el Matlab. Además en `fs` podrá ver la frecuencia de muestreo y en `nb` el número de bits utilizados para representar el valor de estas muestras. Descarte uno de los dos canales haciendo `x=X(:,1);`.

c) Verifique lo hecho hasta ahora escuchando la señal con el comando `sound(x,fs)`.
Calcule la potencia normalizada de la señal.

d) Genere distintas secuencias de ruido blanco gaussiano de igual largo que la señal y con potencia tal que al sumarlas la relación señal a ruido (SNR) sea 0dB, 10dB , 20dB, 30dB, 40dB y 50dB.
Use el comando `randn`.

e) Sumando las distintas secuencias de ruido genere versiones de audio con distintas SNR. Escuche las señales resultantes y vea que le parece. A su juicio ¿Qué SNR es necesaria para que una señal de audio sea de buena calidad? ¿Y para que sea inteligible?

Algunos resultados

1. *a*) I. $\bar{x} = 0$, $\mathcal{P}_x = 1$, $r_{xx}(\tau) = \dfrac{\cos(20\pi\tau) + \cos(40\pi\tau)}{2}$ y $s_{xx}(f) = \dfrac{\delta(f-10)+\delta(f+10)+\delta(f-20)+\delta(f+20)}{4}$.
II. $\bar{x} = 0$, $\mathcal{E}_x = 5$, $r_{xx}(\tau) = 5\wedge(\tau/5)$ y $s_{xx}(f) = 25\,\text{sinc}^2(5f)$.
III. $\bar{x} = \frac{1}{2}$, $\mathcal{P}_x = \frac{1}{2}$, $r_{xx}(\tau) = \frac{1}{2}$ y $s_{xx}(f) = \frac{1}{2}\delta(f)$.
IV. $\bar{x} = 0$, $\mathcal{P}_x = 1$, $r_{xx}(0) = 1$ pero $r_{xx}(\tau) = 0$ si $\tau \neq 0$.

b) $\text{E}\{A\} = \text{E}\{B\} = \text{E}\{AB\} = 0$ y $\text{E}\{A^2\} = \text{E}\{B^2\}$. $S_{XX}(f) = \dfrac{\text{E}\{A^2\}}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$

g)
I. Sí. $S_{XX}(f) = 3\delta(f)$. No Erg. II. No. III. Sí. $S_{XX}(f) = 3\,\text{sinc}^2(f)$. Sí Erg.
IV. Sí. $S_{XX}(f) = 3\sqcap(f)$. Sí Erg. V. No. VI. Sí. $S_{XX}(f) = 3\wedge(f)$. Sí Erg.
VII. Sí. $S_{XX}(f) = 3\,Ш(f)$. Sí Erg. VIII. No. IX. Sí. $S_{XX}(f) = \delta(f) + \frac{4}{1+(2\pi f)^2}$. No Erg.

6. *a*) $Y(t)$ es PAESA y Erg. en media. $S_{YY} = \frac{1}{4}[S_{XX}(f - f_0) + S_{XX}(f + f_0)]$.
b) $S_{ZZ} = \frac{1}{16}[S_{XX}(f - 2f_0) + 2S_{XX}(f) + S_{XX}(f + 2f_0)]$.
c) $S_{ZZ} = \frac{1}{16}[S_{XX}(f - 2f_0) + 4S_{XX}(f) + S_{XX}(f + 2f_0)]$.
d) $S_{ZZ} = \frac{1}{16}[S_{XX}(f - 2f_0) + S_{XX}(f + 2f_0)]$.

7. *c*) $B_N = \frac{\pi}{2}B_3$.
e) $\mathcal{P} = 0{,}46\text{V}^2$.