

ANÁLISIS Y DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL DIGITAL

E. J. Taconi – R. J. Mantz

J. A. Solsona – R. Ojeda

Laboratorio de Electrónica Industrial Control e Instrumentación (LEICI)

Departamento de Electrotecnia – Facultad de Ingeniería – UNLP

CAPÍTULO UNO.

NOCIONES SOBRE MUESTREO Y RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES.

I.1. INTRODUCCIÓN.

La figura 1.1 representa un clásico esquema de control digital. La señal a controlar, $y(t)$, es muestreada a través de un convertidor analógico digital A/D y comparada con el valor de referencia (o set-point) $r(nT)$ almacenado en una posición de memoria del sistema de microcómputo en el cual se implementa el controlador digital. La información que resulta de esta comparación (señal de error discreta), es procesada por el microcomputador, que mediante un algoritmo recursivo, genera una señal de mando discreta $u(nT)$ que es convertida en analógica a través de un convertidor D/A. Esta secuencia de operaciones es realizada cada T segundos, siendo T el período de muestreo.

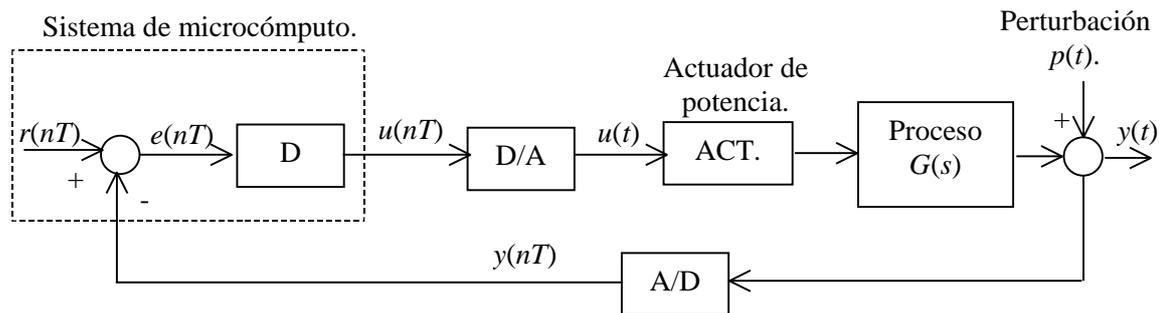


Figura 1.1. Esquema básico de control digital.

En el esquema de la figura pueden distinguirse dos tipos de señales:

- Señales continuas o analógicas. Son aquellas definidas para todo instante de tiempo ($u(t)$, $y(t)$, $p(t)$).
- Señales de tiempo discreto. Son aquellas únicamente definidas en los instantes de tiempo $t = nT$, siendo n un número entero y T el período de muestreo ($r(nT)$, $e(nT)$, $u(nT)$).

A los efectos de simplificar determinadas expresiones, la siguiente notación también será empleada para las señales discretas:

$$f_{nT} = f(nT). \quad (1-1)$$

Desde el punto de vista del análisis y diseño de sistemas de control muestreados, el esquema de la figura 1.1 no difiere del clásico esquema de texto de la figura 1.2.

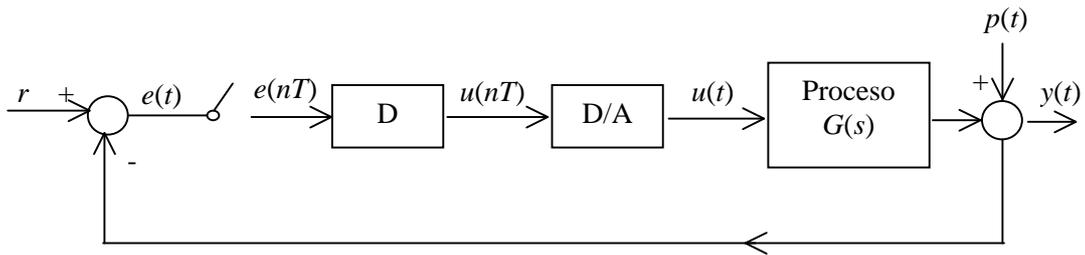


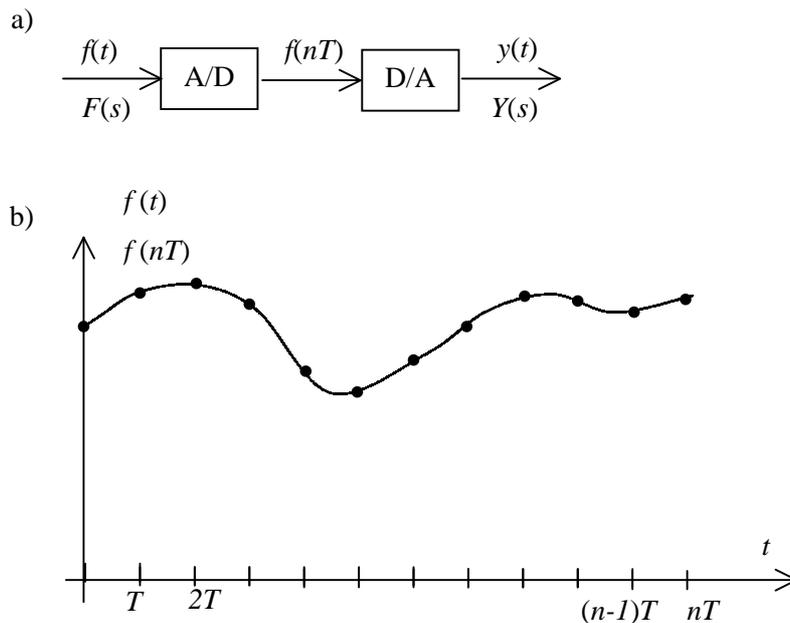
Figura 1.2. Esquema simplificado de control digital.

Si se pretende analizar el comportamiento del sistema de la figura 1.2 (o 1.1), utilizando las herramientas matemáticas que se emplean en sistemas analógicos, se choca con el primer inconveniente: no existe la transformada de Laplace de una señal que sólo está definida en algunos puntos, y por consiguiente no todos los bloques de la figura 1.2 pueden ser modelados con funciones de transferencia.

Para obviar el inconveniente citado en el último párrafo, se planteará un modelo del conjunto **convertidor A/D - controlador digital - convertidor D/A**, que visto desde sus extremos presente el mismo comportamiento que este conjunto y además que las señales en su interior, aunque distintas a las reales, permitan el empleo de nuestros conocimientos referidos a sistemas continuos.

1.2. MODELO DEL MUESTREADOR (CONVERSIONS A/D) Y RECONSTRUCTOR DE SEÑAL (CONVERSIONS D/A).

La figura 1.3 a) muestra el conjunto A/D – D/A a modelar. En las partes b) y c) de la figura 1.3 se indican las señales $f(t)$, $f(nT)$ y $y(t)$ que correspondientes a la parte a).



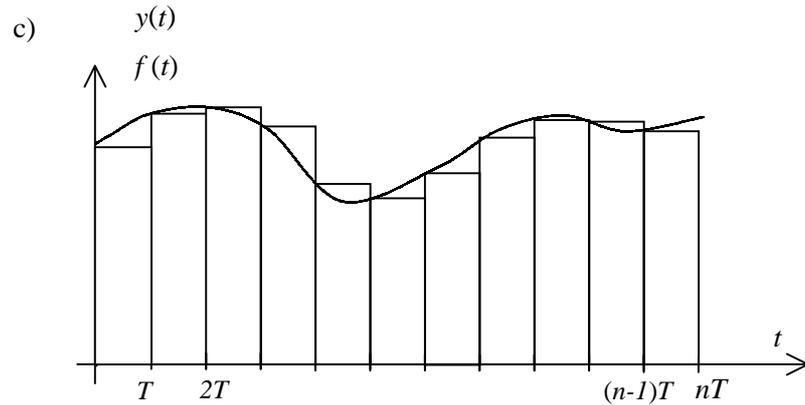


Figura 1.3. a) Conjunto a modelar.
 b) Señal continua $f(t)$, y discreta $f(nT)$.
 c) Señal continua $f(t)$ y reconstruida $y(t)$.

La señal reconstruida $y(t)$ puede ser expresada a partir de una sumatoria de escalones desplazados en el tiempo

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) [\mu(t - nT) - \mu(t - (n + 1)T)], \quad (1-2)$$

donde:

$$\mu(t - nT) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq nT \\ 0 & \text{si } t < nT \end{cases} \quad (1-3)$$

Luego, la transformada de Laplace de la señal reconstruida $y(t)$, resulta:

$$Y(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \frac{e^{-nTs} - e^{-nTs - Ts}}{s} \quad (1-4)$$

operando:

$$Y(s) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) e^{-nTs} \right] \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \right]. \quad (1-5)$$

El primer factor de la ecuación (1-5), a pesar de ser una expresión en el dominio frecuencial complejo s , da idea de lo que sucede en el tiempo, ya que corresponde a una operación lineal entre los valores de las distintas muestras de la señal $f(nT)$ desplazados en el tiempo en $t = nT$. Luego, si a los efectos de la modelización se asigna este factor a la transformación de Laplace de la señal muestreada $F^*(s)$, el segundo factor de la ecuación (1-5), corresponde a la transferencia del reconstructor de señal que denominaremos $H_o(s)$. Es decir:

$$Y(s) = F^*(s) \cdot H_o(s) \quad (1-6)$$

con:

$$F^*(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) e^{-nTs} \quad (1-7)$$

$$H_o(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (1-8)$$

Para completar el modelo, falta ahora, definir el bloque que relaciona la transformada de Laplace $F(s)$ de la señal continua con la transformada $F^*(s)$ asignada a la señal muestreada (figura 1.4).

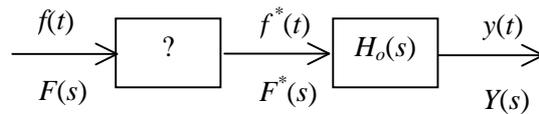


Figura 1.4. Modelización del muestreador y reconstructor.

Teniendo en cuenta que la transformada inversa es también una operación lineal, la anti transformada de $F^*(s)$ resulta:

$$f^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT) \quad (1-9)$$

$$f^*(t) = f(t) \cdot \delta_T(t), \quad (1-10)$$

donde:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (1-11)$$

representa a un tren de impulsos (figura 1.5). Es decir, que la señal $f^*(t)$ puede considerarse como un tren de impulsos modulados por $f(t)$.

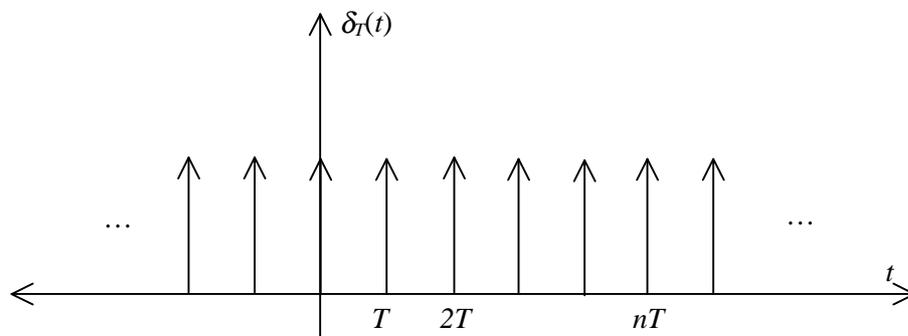


Figura 1.5. Tren de impulsos $\delta_T(t)$.

De este modo, el conjunto muestreador y convertidor D/A modelado por medio de dos bloques elementales. El primero (el muestreador), modula la señal a muestrear con un tren de impulsos. El segundo, normalmente denominado reconstructor de señal de orden cero, entrega en su salida un valor constante igual al peso del último impulso de entrada.

Según la modelización previa, la acción conjunta de los bloques A/D, controlador digital D y convertidor D/A debe interpretarse de la siguiente forma:

- El modelo del convertidor A/D entrega en su salida un tren de impulsos, cada uno de ellos pesado con el valor de la señal analógica en el instante $t = nT$ correspondiente.
- El controlador digital procesa, a través de un algoritmo recursivo, los pesos de los impulsos de entrada y cada T segundos entrega en su salida un impulso ponderado con el resultado de la ecuación recursiva.
- Por último, la acción integral del reconstructor de señal convierte el tren de impulsos entregado por el controlador digital en una señal escalonada.

I.3. CONTENIDO ARMÓNICO DE LA SEÑAL MUESTREADA.

El tren de impulsos $\delta_T(t)$ es una función periódica que puede ser desarrollada en serie de Fourier, siendo:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_r t}, \quad (1-12)$$

donde:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jn\omega_r t} dt. \quad (1-13)$$

De la figura 1.5, se observa que dentro del intervalo de integración $(-T/2, T/2)$, la función $\delta_T(t)$ sólo está definida para $t = 0$. Esto significa que c_n es igual a $1/T$ e independiente del valor n . Luego, reemplazando la ecuación (1-13) en (1-12) resulta una nueva expresión para el tren de impulsos

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_r t}, \quad (1-14)$$

que reemplazada en (1-10), permite obtener una expresión alternativa para la señal de salida del muestreador (ecuación (1-9)):

$$f^*(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{jn\omega_r t}. \quad (1-15)$$

Aplicando el teorema del desplazamiento temporal de la transformada de Laplace :

$$\mathcal{L}\{f(t) e^{\lambda t}\} = F(s - \lambda) \quad (1-16)$$

a la expresión (1-15) se obtiene

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s - jn\omega_r). \quad (1-17)$$

A partir de esta ecuación se observa que:

- La transformada $F^*(s)$ de la señal muestreada $f^*(t)$ tiene infinitos polos y ceros.
- La transformada $F^*(s)$ contiene, entre otros, los polos de la transformada de la señal continua $F(s)$.
- Los polos de la transformada $F^*(s)$ se repiten periódicamente en ω_T .
- En principio no puede decirse nada acerca de los ceros, los cuales se obtienen de la factorización de la expresión (1-17).

Sin mayores dificultades puede plantearse una expresión cerrada de la transformada $F^*(s)$ (ecuaciones (1-7) o (1-17)):

$$F^*(s) = \sum_{\text{en polos de } F(\lambda)} \left[\text{residuos de } F(\lambda) \frac{1}{1 - e^{-T(s-\lambda)}} \right]. \quad (1-18)$$

Ejemplo.

Determinar la transformada de Laplace de la señal que se obtiene al muestrear la señal continua $f(t)=1-e^{-t}$. Teniendo presente que

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)},$$

$F^*(s)$ puede calcularse empleando la ecuación (1-18)

$$F^*(s) = \sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda=-1}} \left[\text{residuos de } \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} \frac{1}{1 - e^{-T(s-\lambda)}} \right]$$

$$F^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-T \cdot s}} - \frac{1}{1 - e^{-T(s+1)}}.$$

Las figuras 1.6 a) y b) muestran la locación de polos y ceros de las transformadas $F(s)$ y $F^*(s)$ de las señales analógica y muestreada respectivamente. Se observa que es posible definir una región del plano s , normalmente denominada banda base, limitada por dos rectas horizontales definidas por:

$$\omega = \pm \frac{\omega_T}{2},$$

que se repite periódicamente cada ω_T . Se observa también, como ya fue comentado, que la locación de los polos de $F^*(s)$ en la banda base coincide con la de los polos de $F(s)$.

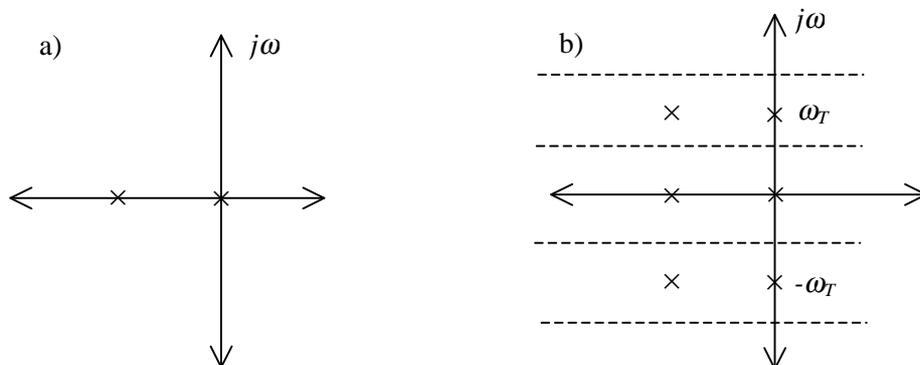


Figura 1.6. a) Diagrama cero-polar de $F(s)$.

b) Diagrama cero-polar de $F^*(s)$.

Si se desea calcular el contenido armónico de la señal muestreada $f^*(t)$ basta con evaluar el aporte de los polos y ceros de $F^*(s)$ en $s=j\omega$. Haciendo este reemplazo en (1-17) el espectro resulta:

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j\omega + jn\omega_r), \quad (1-19)$$

Debido a la repetición periódica de los polos y ceros de la banda base a lo largo de todo el plano s , también es periódico el contenido armónico de $f^*(t)$.

Se ve así, claramente, que el muestreo introduce un cambio sustancial en el espectro de la señal $f(t)$, que determina una distorsión debido a la aparición de componentes que no estaban en la entrada.

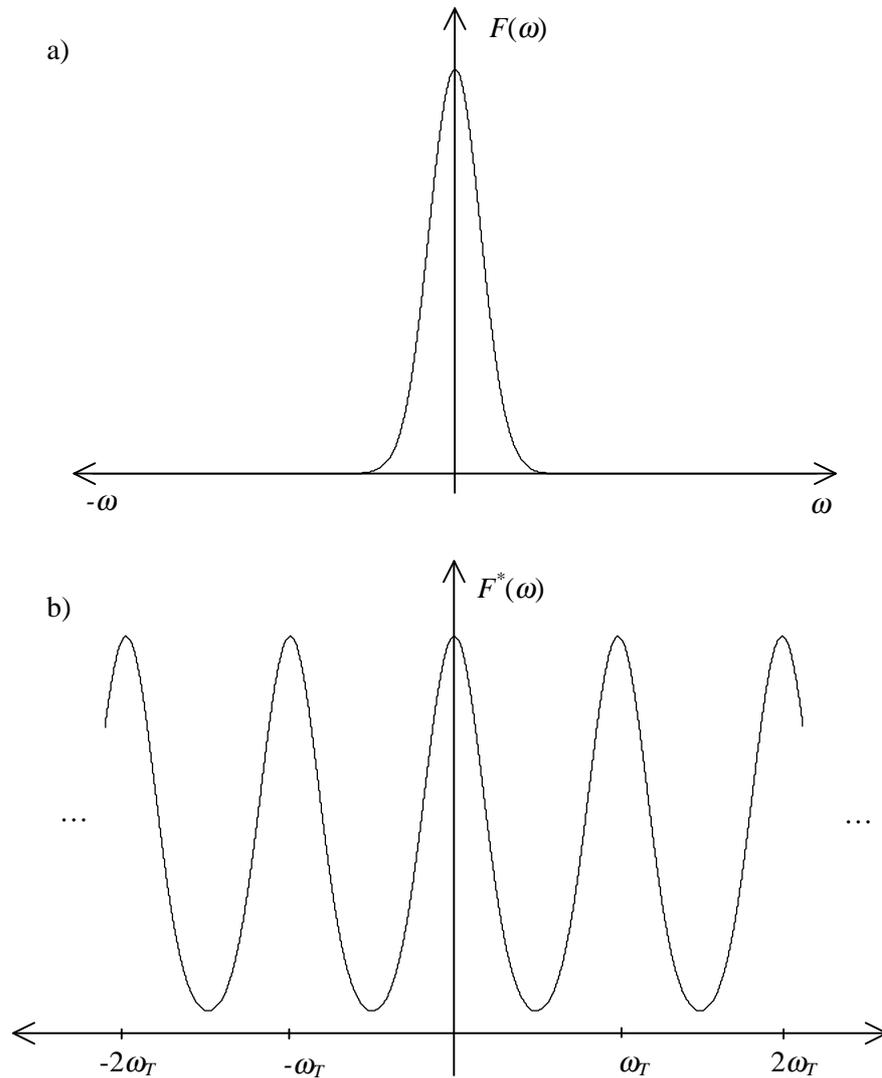


Figura 1.7. a) Contenido armónico de $f(t)$.
b) Contenido armónico de $f^*(t)$.

De acuerdo al teorema del muestreo: una señal analógica con componentes armónicos limitados por una frecuencia f_{max} puede ser reconstruida a partir de sus muestras siempre que éstas se tomen a intervalos de tiempo $T < 1/(2 \cdot f_{max})$. No obstante el enunciado del teorema implica una cierta idealización pues en realidad:

1. La mayoría de las señales no están estrictamente limitadas en frecuencia, si bien la amplitud de sus armónicos decae para frecuencias elevadas.
2. Aún en el caso de tener $T < 1/(2 \cdot f_{max})$ sería necesario emplear un filtro pasa bajos ideal para reconstruir la señal analógica, y este filtro no es realizable.

Por estos motivos el proceso de muestreo introduce una distorsión irreversible (aliasing), y por ende, no es posible recuperar la señal original en forma exacta. Cuanto menor sea el grado de cumplimiento de las condiciones del teorema, mayor será la superposición de espectros contiguos, como puede verse en la figura 1.8. Aún considerando un filtro ideal, la zona rayada aparecerá, rebatida a frecuencias menores (zona ennegrecida). Si el período de muestreo es elegido en forma incorrecta, la onda que se recupera puede diferir apreciablemente de la original. Para reducir al mínimo el solapamiento de espectros y a su vez evitar la influencia del ruido y otras señales espúreas, se suele efectuar un prefiltrado analógico antes del muestreo (filtrado antialiasing).

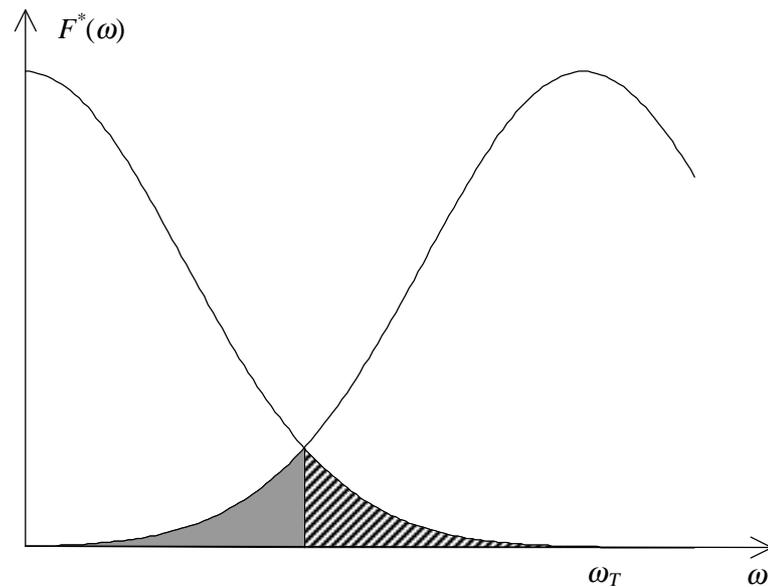


Figura 1.8. Superposición de espectros.

I.4. RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES.

Existen diversas maneras de interpolar y extrapolar una señal discreta a los efectos de obtener una señal analógica. Aquí, sólo se considera el reconstructor de orden cero, que es aquel que mantiene constante, en su salida, el último valor de la muestra de entrada. Este reconstructor es el más empleado en aplicaciones de control automático.

Reconstructor de orden cero.

La expresión de la función de transferencia de un reconstructor de orden cero fue planteada en la sección I.3 (ecuación (1-8)). Una alternativa para calcular esta función de transferencia es, directamente calcular la transformada de Laplace de la respuesta impulsional ($h(t)$) del reconstructor ante una excitación impulsional (figura 1.9).

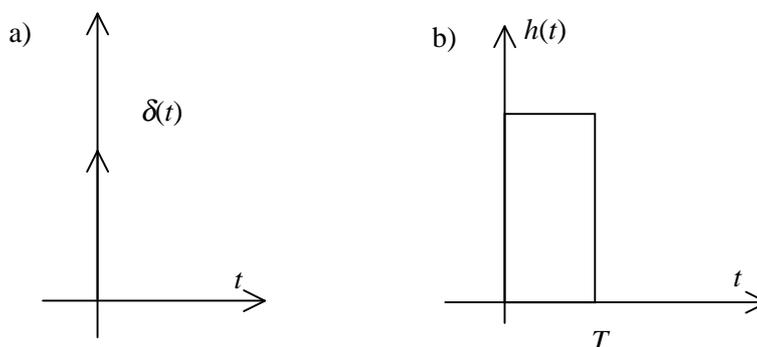


Figura 1.9. a) Excitación Impulsional.
b) Respuesta del reconstructor de orden cero.

Luego:

$$H_o(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{\mu(t) - \mu(t - T)\} \quad (1-20)$$

$$H_o(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad (1-21)$$

La respuesta en frecuencia del reconstructor de orden cero puede ser obtenida a partir del siguiente desarrollo:

$$H_o(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = \frac{2 e^{-j\omega T/2}}{\omega} \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{2j}, \quad (1-22)$$

luego:

$$H_o(j\omega) = T \frac{\text{sen}(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{-j\omega T/2}, \quad (1-23)$$

y teniendo presente que:

$$\frac{\omega T}{2} = \frac{\pi \omega}{\omega_T}, \quad (1-24)$$

resulta:

$$H_o(j\omega) = T \frac{\text{sen}(\pi \omega / \omega_T)}{\pi \omega / \omega_T} e^{-j\pi \omega / \omega_T} \quad (1-25)$$

siendo:

$$|H_o(j\omega)| = T \left| \frac{\text{sen}(\pi \omega / \omega_T)}{\pi \omega / \omega_T} \right| \quad (1-26)$$

$$\angle H_o(j\omega) = -\frac{\pi \omega}{\omega_T} + \theta \quad \theta = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{sen}(\pi \omega / \omega_T) > 0 \\ \pi & \text{si } \text{sen}(\pi \omega / \omega_T) < 0 \end{cases}$$

La figura 1.10 muestra las curvas de módulo y fase de la respuesta en frecuencia. Se observa la característica pasabajos que presenta el reconstructor de orden cero, esta característica hace que a la salida del reconstructor predominen las componentes de baja frecuencia de la señal muestreada (es decir básicamente las que corresponden a la banda base). Debido a que la ganancia no es constante en el rango de frecuencias $0 < \omega < \omega_T$ y a que la atenuación no es infinita para las frecuencias de las bandas superiores, es que la señal reconstruida difiere de la muestreada (figura 1.3).

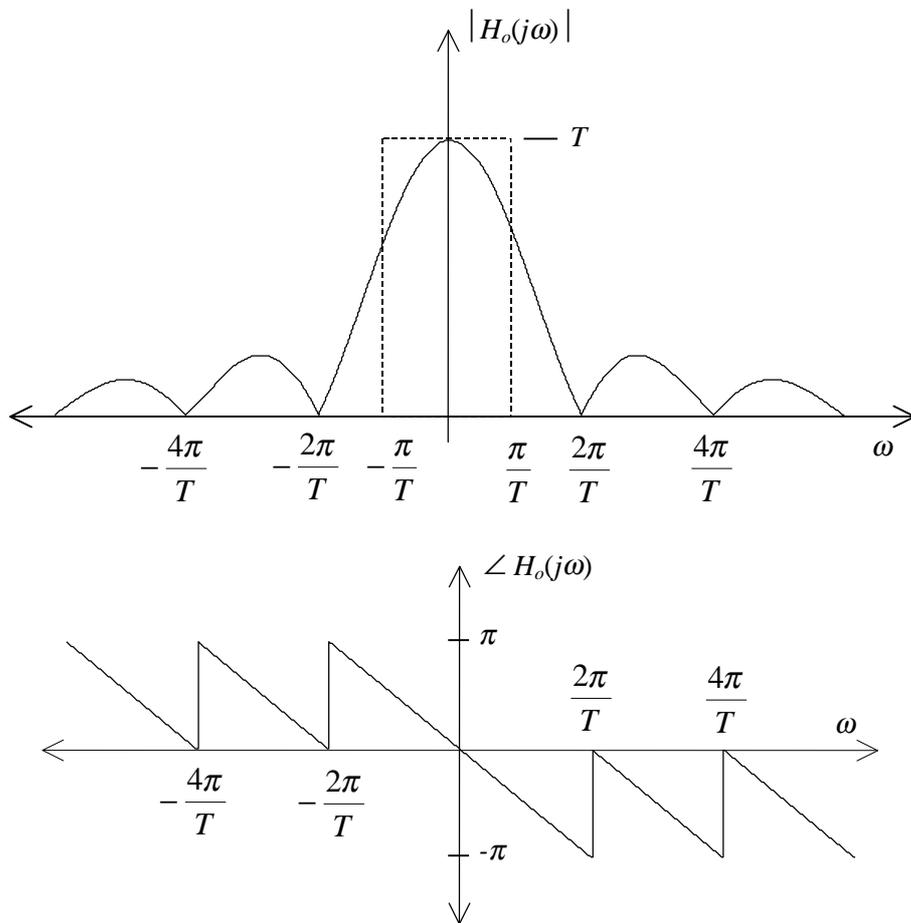


Figura 1.10. Respuesta en frecuencia del reconstructor de orden cero.

- a) Curva de módulo.
- b) Curva de fase.

CAPÍTULO DOS.

TRANSFORMADA Z.

II.1. INTRODUCCIÓN.

En el capítulo anterior se demostró que la transformada de Laplace de una señal muestreada $f^*(t)$ puede ser expresada en distintas formas:

$$F^*(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{nT} e^{-nsT} \quad (2-1)$$

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s - jn\omega_T) \quad (2-2)$$

$$F^*(s) = \sum_{\text{en polos de } F(\lambda)} \left[\text{residuos de } F(\lambda) \frac{1}{1 - e^{-T(s-\lambda)}} \right]. \quad (2-3)$$

La ecuación (2-1) es una forma novedosa de ver una función transformada pues se indica, explícitamente en su estructura, la ubicación temporal de las muestras de la secuencia. Efectivamente, mientras el factor f_{nT} de cada uno de los términos señala el valor de la muestra el factor e^{-nsT} indica su desplazamiento. La ecuación (2-2) es interesante desde el punto de vista didáctico, ya que permite comprender problemas asociados a la reconstrucción de señales muestreadas. La ecuación (2-3) presenta la ventaja de ser una expresión cerrada y particularmente útil para obtener la transformada de la señal muestreada a partir de tablas de transformadas de señales continuas.

II.2. TRANSFORMADA Z.

Observando la ecuación general (2-3) se puede ver que s aparece en el factor e^{sT} . La presencia de s en forma exponencial, en todas las expresiones cerradas de $F^*(s)$, sugiere la posibilidad de un cambio de variable compleja. Se define, entonces, la variable z como:

$$z = e^{sT}, \quad (2-4)$$

es decir,

$$s = \frac{1}{T} \ln(z). \quad (2-5)$$

En estas condiciones se define la transformada z unilateral de una señal muestreada f_{nT} como:

$$F(z) = F^*(s) \Big|_{s=\frac{1}{T} \ln(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{nT} z^{-n}. \quad (2-6)$$

La ecuación (2-6) es análoga a la (2-1) y por comparación puede interpretarse a z^{-1} como un operador de retardo de una muestra. Así z^{-n} indica, para cada valor de n , la ubicación relativa en el tiempo de los distintos valores de la secuencia.

Cuando se deben analizar señales definidas para todo tiempo, como son por ejemplo las señales aleatorias, se suele utilizar la transformada z bilateral en la cual el índice de la sumatoria se extiende de $-\infty$ a ∞ . En el caso de señales causales, $f(t)$ es nula para tiempos negativos, por lo tanto, el índice de la sumatoria se extiende de 0 a ∞ como lo muestra la ecuación (2-6).

Es importante destacar que la transformación (2-5) se realiza en $F^*(s)$ y no en $F(s)$.

Ejemplo.

Calcular la transformada z unilateral de la secuencia que se obtiene al muestrear un escalón unitario, es decir:

$$f_{nT} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases} \quad (2-7)$$

A partir de la ecuación (2-6) se obtiene:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}, \quad (2-8)$$

que puede expresarse en forma cerrada como:

$$F(z) = \frac{z}{z-1} \quad \text{para } |z| > 1. \quad (2-9)$$

II.3. RELACIÓN ENTRE LOS PLANOS “S MUESTREADO” Y Z.

Cada zona del plano $s = \sigma + j\omega$, tiene su correspondiente en el plano $z = M \cdot e^{j\phi}$ siendo $M = e^{\sigma T}$ y $\phi = \omega T$. Resulta conveniente definir esta correspondencia para distintas zonas características. Por ejemplo, $s = j\omega$ corresponde a $z = e^{j\omega T}$, donde T representa el período de muestreo y está relacionado con la pulsación de muestreo ω_T a través de:

$$\omega_T = \frac{2\pi}{T} \quad (2-10)$$

Esto significa que la porción del eje $j\omega$ entre $-j\omega_T/2$ y $j\omega_T/2$, se corresponde en el plano z con una circunferencia de radio unitario con centro en el origen de coordenadas.

La semibanda izquierda correspondiente a σ negativo y limitada por $\pm j\omega_T/2$, resulta en puntos del plano z definidos por $M = e^{\sigma T} < 1$ y de argumento ϕ variando entre $-\pi$ y π . Esto significa que toda la semibanda izquierda se transforma en el interior del círculo de radio unitario. En forma análoga, toda la semibanda derecha limitada por $\pm j\omega_T/2$ tiene como superficie transformada todo el exterior del círculo de radio unitario. (Ver figura 2.1).

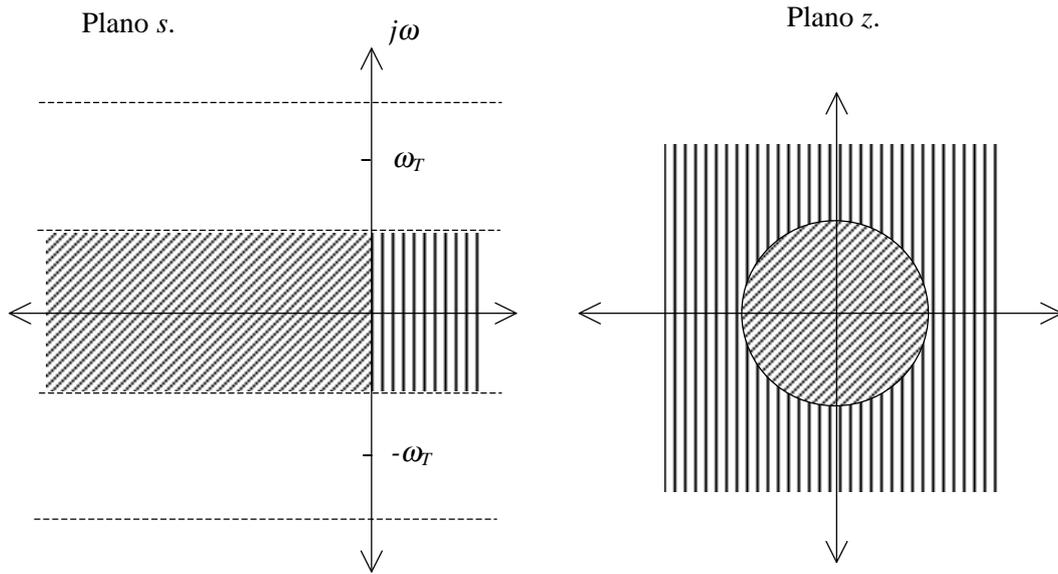


Figura 2.1. Correspondencia de puntos entre los planos s y z .

Puede verificarse, también, que todas las bandas que están comprendidas en los intervalos $j(2n+1)\omega_T/2$ y $j(2n+3)\omega_T/2$, con n entero y distinto de -1 , es decir, todas las bandas de amplitud ω_T a partir de la original ($\pm j\omega_T/2$), son transformadas según una superficie que coincide con todo el plano z . Cuando se transforma una señal analógica en una señal muestreada y se calcula la transformada de Laplace de la secuencia, se obtiene una función periódica, de período ω_T en el plano s (ecuación 2-2). Esto significa que, por ejemplo, una señal cuya transformada tiene un polo, al ser muestreada, presenta infinitos polos (ya que el polo original aparece en su posición inicial y repetido en múltiplos de ω_T). En la transformación al dominio z , debido a que todas las bandas están superpuestas, esa cantidad infinita de polos se convierte en una cantidad finita, lo cual hace que esta transformación sea más conveniente para analizar una secuencia.

En la ecuación (2-2) puede observarse que $F^*(s)$ repite en forma periódica los polos de $F(s)$ pero no sus ceros, ya que los ceros de $F^*(s)$ son el resultado de la sumatoria de infinitos términos. Por lo tanto, el proceso de muestreo, cambia la posición de los ceros existentes e inclusive puede generar nuevos.

Ejemplo.

Considere que la señal continua

$$f(t) = u(t) e^{-t/\tau} \quad (2-11)$$

$$F(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}, \quad (2-12)$$

es muestreada resultando:

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT/\tau} \delta(t - nT). \quad (2-13)$$

La transformada de Laplace de la secuencia de impulsos que definen a la señal muestreada es:

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT/\tau} \cdot e^{-nsT}, \quad (2-14)$$

$$F^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-T/\tau} \cdot e^{-sT}} \quad \text{válida para} \quad |e^{T(1/\tau+s)}| > 1. \quad (2-15)$$

Haciendo ahora $\alpha = e^{-T/\tau}$ y $z = e^{sT}$; se tiene la transformada z , que para la forma cerrada es:

$$F(z) = \frac{z}{z - \alpha}. \quad (2-16)$$

Por otra parte, a partir de la ecuación (2-2), se obtiene:

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s + (1/\tau - jn\omega_T)}. \quad (2-17)$$

Factorizando la ecuación (2-17) se observa que posee infinitos polos separados en $j\omega_T$. La expresión (2-16) de la transformada z , en cambio, tiene un sólo polo en $z = \alpha$.

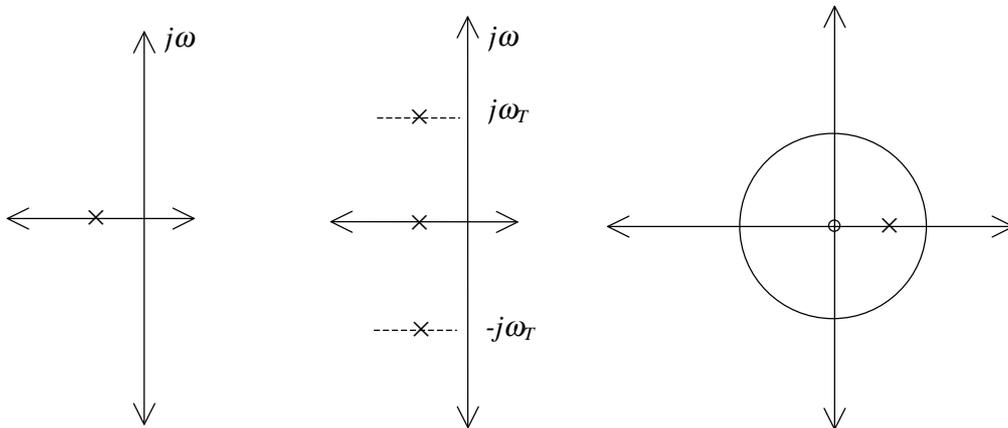


Figura 2.2. Correspondencia entre los planos s y z para un polo real.

La figura 2.2 representa la correlación entre los planos s y z . El polo en $z = \alpha$, corresponde a los infinitos polos en $s = -1/(\tau - jn\omega_T)$ debido al hecho que el plano z puede verse como la superposición de las bandas del plano s plegadas una encima de la otra. De modo que los infinitos polos se superponen dando un único polo en z .

II.4. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z.

A continuación se enuncian las principales propiedades en la aplicación de la transformada z y se analizan las más importantes.

Linealidad:

$$Z\{a \cdot x1_{nT} + b \cdot x2_{nT}\} = a Z\{x1_{nT}\} + b Z\{x2_{nT}\} \quad (2-18)$$

Desplazamiento a la derecha:

$$Z\{x_{nT-dT}\} = z^{-d} X(z) \quad ; \quad d > 0 \quad (2-19)$$

Desplazamiento a la izquierda:

$$Z\{x_{nT+dT}\} = z^d \left[X(z) - \sum_{q=0}^{d-1} x_{qT} z^{-q} \right] \quad ; \quad d > 0 \quad (2-20)$$

Amortiguamiento:

$$Z\{x_{nT} e^{-\alpha nT}\} = X(z e^{\alpha T}) \quad (2-21)$$

Teorema del valor inicial:

Da el valor inicial de una señal causal muestreada a partir de la transformada de esa secuencia.

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z). \quad (2-22)$$

La ecuación (2-22) se obtiene en forma inmediata aplicando el límite a la ecuación (2-6).

Teorema del valor final:

Da el valor al cual tiende la señal muestreada a partir de su transformada z .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{nT} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \cdot F(z). \quad (2-23)$$

Para su demostración, se define la transformada z de la secuencia truncada en $n = N$ como:

$$F_N(z) = \sum_{n=0}^N f_{nT} z^{-n}. \quad (2-24)$$

Retardando la función una muestra y manteniendo el truncamiento en N resulta:

$$\hat{F}_N(z) = z^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_{nT} z^{-n} \quad (2-25)$$

Como se sigue truncando la secuencia en N muestras, la última función tiene una muestra menos que la (2-24).

Haciendo la diferencia entre las dos y tomando el límite de esta diferencia para z tendiendo a 1, se obtiene la muestra n -ésima:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left[F_N(z) - \hat{F}_N(z) \right] = f_{NT}. \quad (2-26)$$

Nótese que cada una de las sumatorias anteriores, en las ecuaciones (2-24) y (2-25), para N tendiendo a infinito, convergen a $F(z)$. De modo que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[F_N(z) - \hat{F}_N(z) \right] = (1 - z^{-1}) F(z). \quad (2-27)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (2-26) y (2-27) se obtiene la ecuación (2-23).

II.5. ANTITRANSFORMADA Z.

Hasta aquí se ha visto cómo se transforma una secuencia de muestras en una función de variable compleja z . El problema inverso es la antitransformación. Es decir, dada una función transformada en z , poder extraer la secuencia que le dio origen.

La ecuación (2-6) es la definición de la transformada z unilateral y tiene la forma de una serie de Laurent, cuyos coeficientes son las muestras f_{nT} . Es así, que f_{nT} puede ser definida a través de una integral de Cauchy:

$$f_{nT} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{n-1} dz. \quad (2-28)$$

La integral de línea, se extiende a una curva cerrada C que debe envolver a todos los polos del integrando y debe estar incluida en la región de convergencia de $F(z)$. La resolución de la integral puede efectuarse por el teorema de los residuos:

$$f_{nT} = \sum \text{Res} [F(z) z^{n-1}] \text{ en los polos de } F(z). \quad (2-29)$$

Para una función con un polo simple en $z = z_p$ el residuo resulta:

$$\text{Res} = (z - z_p) F(z) z^{n-1} \Big|_{z=z_p}. \quad (2-30)$$

De modo que, conocida $F(z)$, se calculan los residuos del integrando y luego aplicando la ecuación (2-29) se puede hallar f_{nT} , que es la secuencia temporal resultante del muestreo que dio origen a $F(z)$.

Ejemplo.

$$\text{Sea } F(z) = \frac{A}{1 - \alpha \cdot z^{-1}} \text{ donde } \alpha < 1. \quad (2-31)$$

Si se aplica (2-29) para obtener la antitransformada de $F(z)$ resulta

$$\text{Res} = F(z) z^{n-1} \Big|_{z=\alpha} = A \cdot \alpha^n. \quad (2-32)$$

Es decir

$$f_{nT} = A \cdot \alpha^n. \quad (2-33)$$

Aplicando el teorema del valor inicial se obtiene $f(0) = A$ y aplicando el teorema del valor final $f(\infty) = 0$.

Del mismo modo que para la transformada de Laplace, existen tablas para la transformada z . Así es posible antitransformar una función expresándola como una suma de funciones más elementales cuyas antitransformadas se encuentran en las tablas.

Ejemplo.

Considere la transformada:

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)(z-e^{-\alpha T})}. \quad (2-34)$$

$F(z)$ puede expresarse de la siguiente forma:

$$F(z) = \frac{1}{1-e^{-\alpha T}} \left[\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{e^{-\alpha T}}{1-e^{-\alpha T} \cdot z^{-1}} \right]. \quad (2-35)$$

Si se consulta una tabla se ve que el primer término dentro del corchete corresponde a una secuencia u_{nT} (escalón), y el segundo, a $e^{-\alpha nT}$, (serie exponencial decreciente). De modo que:

$$f_{nT} = \frac{1}{1-e^{-\alpha T}} [1 - e^{-\alpha(n+1)T}] \quad (2-36)$$

INVERSIÓN NUMÉRICA.

Este método resulta útil cuando la transformada z es relativamente compleja, no siendo fácilmente distinguibles sus polos. La función $F(z)$ puede ser expresada como cociente de polinomios:

$$F(z) = \frac{\sum_{i=0}^m \alpha_i z^i}{\sum_{i=0}^n \beta_i z^i}. \quad (2-37)$$

Para el caso en donde los coeficientes vengan dados en forma numérica puede hacerse directamente la división de los polinomios tal como lo indica la expresión. De esta forma surgirá un nuevo polinomio:

$$F(z) = C_0 + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + \dots + C_n z^{-n} + \dots \quad (2-38)$$

Por comparación con la definición de transformada z , (ecuación (2-6)), se obtienen los valores de f_{nT} .

Luego, efectuando la división de los polinomios componentes de $F(z)$ puede obtenerse, en consecuencia, la secuencia originaria de esa transformación.

Ejemplo.

Sea

$$F(z) = \frac{z}{z^2 - 1,414 \cdot z + 1}. \quad (2-39)$$

Realizando el cociente de los polinomios numerador y denominador se obtiene:

$$F(z) = z^{-1} + 1,414 \cdot z^{-2} + z^{-3} + z^{-5} - 1,414z^{-6} - \dots \quad (2-40)$$

De modo que:

$$\begin{aligned}
 f(0) &= f(4) = f(8) = \dots = 0 \\
 f(1) &= f(3) = f(9) = \dots = 1 \\
 f(2) &= f(10) = \dots = 1.414 \\
 f(5) &= f(7) = f(13) = \dots = -1 \\
 f(6) &= f(14) = \dots = -1.414
 \end{aligned}$$

Si se representan gráficamente los valores anteriores puede intuirse que corresponden a una función seno muestreada (figura 2.3).

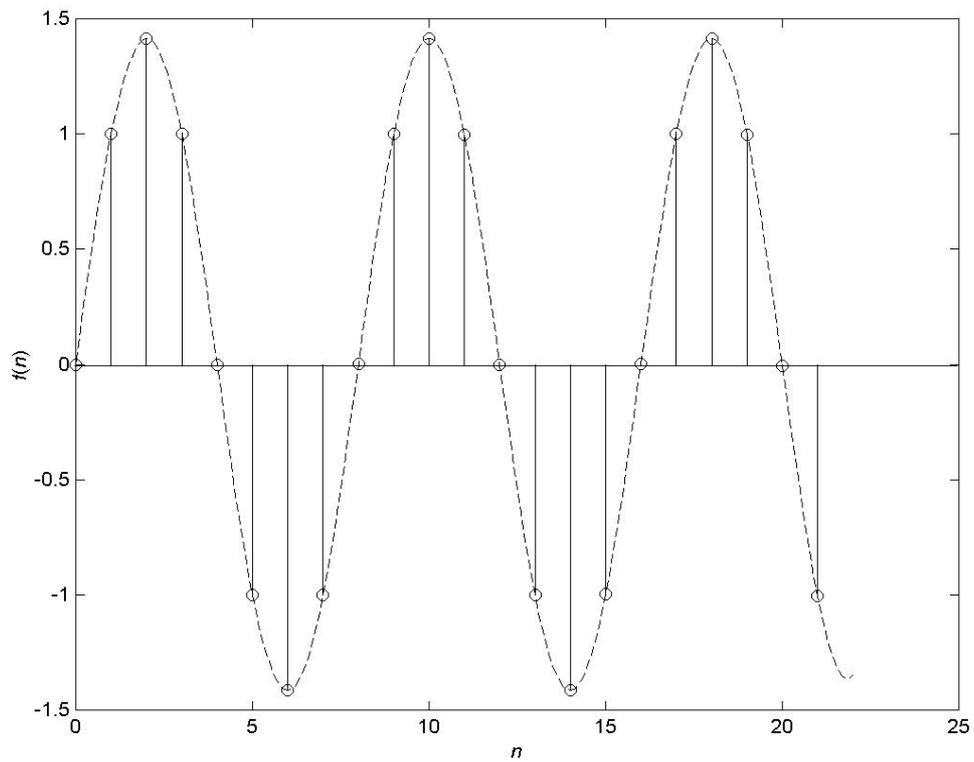


Figura 2.3. Muestras de la función seno cada T segundos.

CAPÍTULO TRES.

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA Y COMPORTAMIENTO TRANSITORIO DE SISTEMAS MUESTREADOS.

III.1. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA.

En forma análoga a como se define la función de transferencia en un sistema continuo, es posible definir la función de transferencia de un sistema digital.

En un sistema continuo, lineal e invariante en el tiempo la señal de salida del sistema ($y(t)$ de la figura 3.1), es el resultado de la convolución entre la respuesta impulsional $g(t)$ y la excitación $r(t)$.

$$y(t) = g(t) * r(t) = \int_0^{\infty} r(\tau) g(t - \tau) d\tau . \quad (3-1)$$

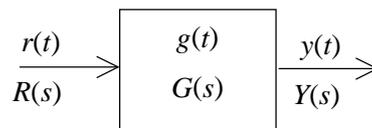


Figura 3.1. Sistema Continuo.

Aplicando la transformada de Laplace a esta ecuación se obtiene:

$$Y(s) = G(s) \cdot R(s) , \quad (3-2)$$

donde la transformada de la respuesta impulsional $G(s)$ se denomina función de transferencia del sistema. $G(s)$ no depende de la excitación sino, exclusivamente, de los parámetros característicos del mismo. A partir de su conocimiento se puede conocer la respuesta del sistema a cualquier excitación:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s) \cdot R(s)] . \quad (3-3)$$

En sistemas muestreados, y en particular en sistemas digitales de control, puede definirse un proceso digital como un bloque (D) en el cual ingresan muestras que son procesadas a través de algún algoritmo a partir del cual resulta la secuencia de muestras de salida.

En forma análoga a lo que sucede en sistemas continuos, si se conoce la respuesta impulsional muestreada d del sistema digital, es posible calcular la respuesta a cualquier excitación r a partir de ésta. El razonamiento a seguir para hallar la respuesta a la secuencia r , es considerar a esta última descompuesta en impulsos de Kronecker aislados, hallar cuál es la contribución de cada uno de éstos a la salida y aplicar luego superposición considerando que el sistema es lineal. Para esto se considera un instante mT , el valor yn_{mT} es la componente de salida en el instante m debido al impulso que ocurrió en el tiempo n . Por lo tanto:

$$yn_{mT} = r_{nT} \cdot d_{(m-n)T} \quad (3-4)$$

donde d_{mT} es la respuesta del sistema al impulso de Kronecker.

Análogamente, para cada una de las muestras se tendrá la componente de salida que contempla el efecto de todos los impulsos anteriores en el instante m .

$$y_{mT} = \sum_{n=0}^m r_{nT} \cdot d_{(m-n)T} \quad (3-5)$$

Esta suele denominarse sumatoria de convolución y permite, a través del conocimiento de la respuesta impulsional del sistema digital, obtener la secuencia de respuesta a cualquier entrada.

Por otra parte la transformada z de esta respuesta será:

$$Y(z) = \sum_{m=0}^{\infty} y_{mT} \cdot z^{-m} . \quad (3-6)$$

Utilizando la ecuación (3-5) y definiendo la transferencia muestreada $D(z)$ del proceso digital como la transformada de la respuesta al impulso:

$$D(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{nT} \cdot z^{-n} , \quad (3-7)$$

se obtiene:

$$Y(z) = D(z) \cdot R(z) . \quad (3-8)$$

$D(z)$ indica la relación que existe entre la transformada z de la secuencia de salida y la transformada z de la secuencia de entrada. La función de transferencia $D(z)$ resulta un cociente de polinomios en z :

$$D(z) = \frac{\sum_{i=0}^m B_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{n'} A_i z^{-i}} . \quad (3-9)$$

Si se considera $A_0=1$, se reemplaza la ecuación (3-9) en la ecuación (3-8), al antitransformar se obtiene:

$$y_{nT} = \sum_{i=0}^m B_i r_{(n-i)T} - \sum_{i=1}^{n'} A_i y_{(n-i)T} . \quad (3-10)$$

Esta ecuación es de suma importancia, pues relaciona una muestra de la secuencia de salida del proceso digital, con las muestras anteriores de la misma y con las entradas en el mismo instante de tiempo y en los anteriores. Esta ecuación juega un papel similar al de la ecuación diferencial en sistemas continuos.

La ecuación (3-10) describe al proceso digital (es el algoritmo que ejecuta la computadora), el cual posee diversas características según se anulen algunos de sus coeficientes. Este hecho da lugar a una clasificación de los procesos digitales.

Si todos los coeficientes B_i excepto el primero, son nulos, el proceso se denomina autorregresivo (AR) (ecuación 3-11).

$$y_{nT} = B_0 r_{nT} - \sum_{i=1}^{n'} A_i y_{(n-i)T} . \quad (3-11)$$

Observando la ecuación (3-9), se concluye que un proceso autorregresivo de grado n posee solamente polos, en el plano z^{-1} . En el plano z tendrá, además de los polos correspondientes, un cero múltiple de grado n en el origen.

Si en cambio, en la ecuación (3-10) se anulan todos los coeficientes A_i se obtiene un proceso cuya salida no depende de las salidas anteriores, (ecuación (3-12)) y que se denomina proceso a media móvil (MA).

$$y_{nT} = \sum_{i=0}^m B_i r_{(n-i)T} . \quad (3-12)$$

A partir de la ecuación (3-12), se observa que un proceso a media móvil no posee polos en el plano z^{-1} . En el plano z , además de los ceros correspondientes, tendrá un polo múltiple de grado m en el origen.

En las secciones anteriores se analizaron a las secuencias discretas como caso particular de señales analógicas muestreadas en forma periódica. En tales circunstancias existía una correspondencia entre los polos de la transformada de Laplace de la señal analógica y los polos de la transformada z de la secuencia discreta.

Teniendo en cuenta la correspondencia entre planos, el origen del plano z corresponde a $\text{Re}\{s\}=-\infty$. Esto significa que un proceso a media móvil no puede obtenerse como consecuencia del muestreo de una señal continua. De ser así, la misma debería haber sido generada como la respuesta al impulso de Dirac de un filtro analógico cuya función de transferencia tuviera únicamente ceros finitos.

La analogía existente entre los procesos continuos y discretos podría inducir a creer, en forma errónea, que un proceso a media móvil, por tener solamente ceros debería poseer un espectro de amplitudes crecientes con la frecuencia. Sin embargo, si se analiza la respuesta en frecuencia de un filtro promediador (ecuación (3-13)) se observa, que a pesar de ser un filtro a media móvil, presenta una característica de amplitud similar a la de un filtro pasabajos.

$$y_{nT} = \frac{(r_{nT} + r_{(n-1)T} + r_{(n-2)T} + \dots + r_{(n-m)T})}{(m+1)} . \quad (3-13)$$

Si se analiza la respuesta impulsional de un proceso digital a media móvil (ecuación (3-12)), se observa que la misma se anula para todo índice n mayor que m . Debido a esta propiedad, a los filtros a media móvil también se los suele denominar filtros de respuesta impulsional finita (FIR).

Además, existen filtros digitales cuya respuesta al impulso es de duración infinita. Estos filtros de respuesta impulsional infinita (IIR) poseen en su función de transferencia, por lo menos, un polo que no se encuentra en el origen del plano z .

Sin embargo, es importante destacar que un filtro digital lineal puede simular a uno analógico pero también, pueden diseñarse filtros digitales cuyas características no son obtenibles con filtros analógicos lineales.

III.2. INTERCONEXIÓN DE PROCESOS DIGITALES Y ANALÓGICOS.

III.2.a. Interconexión de procesos digitales.

La interconexión serie de dos procesos digitales se muestra en la figura 3.2.

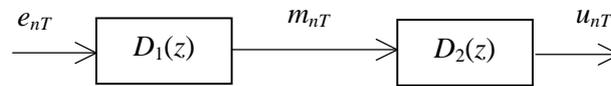


Figura 3.2 Sistemas digitales en cascada.

Dado el diagrama en bloques de la figura 3.2 la función de transferencia total $D(z)$ que relaciona la transformada z de la secuencia de salida $U(z)$ con la transformada z de la secuencia de entrada $E(z)$ es la dada en la ecuación (3-14).

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{M(z)}{E(z)} \frac{U(z)}{M(z)} = D_1(z) \cdot D_2(z) \quad (3-14)$$

III.2.b. Interconexión de procesos digitales y analógicos.

A lazo abierto:

En los sistemas de control digital, una parte del sistema es un proceso digital y otra parte del mismo es un proceso continuo.

En general se tendrá un esquema como el siguiente:

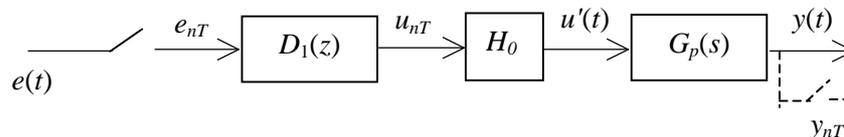


Figura 3.3. Interconexión de sistemas digitales y continuos.

$D_1(z)$ caracteriza al proceso digital. La secuencia de valores de salida representados por u_{nT} son interpolados por el reconstructor de orden cero $H_0(s)$. Luego, la señal resultante (analógica) $u'(t)$ excita al proceso $G_p(s)$.

Se ha visto que un sistema muestreado puede ser analizado mediante el empleo de la transformada z y uno continuo mediante la transformada de Laplace. Se debe, pues, unificar el tratamiento de algún modo.

Sólo tiene sentido plantear la transformación z a señales discretas o muestreadas, y por consiguiente no puede plantearse una transferencia digital que vincule la entrada y salida del proceso a controlar $G_p(s)$.

A los efectos de poder realizar todo el estudio del sistema empleando sólo la transformación z , puede analizarse el comportamiento temporal de la variable de salida $y(t)$ a través de muestras tomadas cada T segundos. De acuerdo a esto puede considerarse una llave (ficticia), que toma muestras de la salida.

Así pueden plantearse las siguientes funciones de transferencia digitales:

$$D_1(z) = \frac{U(z)}{E(z)}, \quad (3-15)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = Z\{H_0(s) \cdot G_p(s)\}, \quad (3-16)$$

$$T(z) = \frac{Y(z)}{E(z)}. \quad (3-17)$$

Sin embargo, no puede plantearse una transferencia digital que describa exactamente la vinculación entre las salidas del proceso y del reconstructor.

La transferencia digital $G(z)$ puede ser hallada más explícitamente teniendo en cuenta la transferencia analógica del reconstructor de orden cero:

$$G(z) = Z\{H_0(s) G_p(s)\} = Z\left\{\frac{1 - e^{-sT}}{s} G_p(s)\right\}, \quad (3-18)$$

luego:

$$G(z) = Z\left\{\frac{G_p(s)}{s} - \frac{G_p(s)e^{-sT}}{s}\right\}, \quad (3-19)$$

y teniendo en cuenta las propiedades de linealidad y desplazamiento de la transformada z , resulta:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) Z\left\{\frac{G_p(s)}{s}\right\}. \quad (3-20)$$

Entonces, la transferencia total $T(z)$ resulta:

$$T(z) = D_1(z) (1 - z^{-1}) Z\left\{\frac{G_p(s)}{s}\right\}. \quad (3-21)$$

Se analiza ahora, el diagrama en bloques de la figura 3.4.

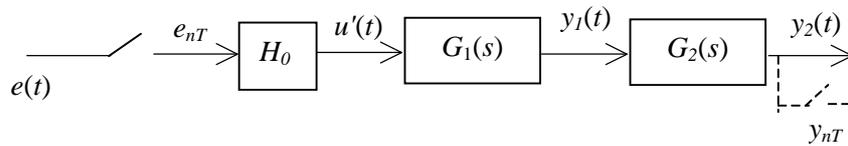


Figura 3.4.

De acuerdo a la discusión previa la transferencia digital $T(z)$ resulta:

$$T(z) = \frac{Y_2(z)}{E(z)} = (1 - z^{-1}) Z\left\{\frac{G_1(s) G_2(s)}{s}\right\}, \quad (3-22)$$

debiendo quedar claro que:

$$T(z) \neq (1 - z^{-1}) G_1(z) G_2(z). \quad (3-23)$$

Esto se debe a que G_2 es excitado con una señal continua en el tiempo (no por las muestras de $y_1(t)$), dependiendo $y_2(t)$ de cómo varía la señal $y_1(t)$ tanto de sus valores en los instantes de muestreo como en los instantes intermedios.

Ejemplo.

Sea el diagrama en bloques de la figura 3.4, con:

$$G_{p1}(s) = \frac{1}{s} \quad \text{y} \quad G_{p2}(s) = \frac{a}{s+a}.$$

- Hallar la transformada z de la conexión en cascada.
- Repetir el cálculo, incorporando un muestreador entre G_{p1} y G_{p2} .

Aplicando las expresiones analizadas anteriormente, se obtiene:

a)

$$[G_1 G_2](z) = \frac{z(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})} \quad (3-24)$$

b)

$$G_1(z) \cdot G_2(z) = \frac{z^2 \cdot a}{(z-1)(z - e^{-aT})} \quad (3-25)$$

donde puede verificarse que $[G_1 G_2](z) \neq G_1(z) \cdot G_2(z)$.

A lazo cerrado:

La figura 3.5 muestra un esquema general de lazo cerrado que emplea un controlador digital.

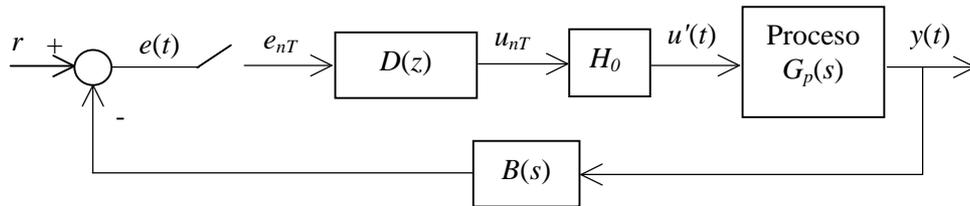


Figura 3.5. Sistema de control digital a lazo cerrado.

En base a la discusión previa y teniendo en cuenta que el muestreador puede ser reemplazado por otros dos, uno que muestrea la variable controlada y otro la referencia, la función de transferencia que relaciona la transformada z de la secuencia de salida con la transformada z de la secuencia de referencia está dada por:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{D(z) \cdot G(z)}{1 + D(z) \cdot (GB(z))}, \quad (3-26)$$

con

$$G(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G_p(s)}{s} \right\}, \quad (3-27)$$

$$GB(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G(s) \cdot B(s)}{s} \right\}. \quad (3-28)$$

III.3. CARACTERISTICAS TEMPORALES DE LA RESPUESTA AL IMPULSO.

Dada una función de transferencia de un sistema continuo de segundo orden (ecuación (3-29)), su comportamiento temporal transitorio está directamente asociado a la ubicación de los polos en el plano s .

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}. \quad (3-29)$$

Es sabido, que si la función de transferencia posee polos complejos conjugados, la respuesta temporal será subamortiguada, si son reales y coincidentes, la respuesta es amortiguada crítica y si son reales y distintos, es sobreamortiguada.

Debido a que la ubicación de los polos en el plano s está definida por los valores de ξ (coeficiente de amortiguamiento), y ω_n (pulsación natural) (o bien por los parámetros $\sigma = -\xi \cdot \omega_n$ y $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$) de la ecuación (3-29) es de interés ver cómo se mapean al plano z las curvas del plano s que corresponden a valores constantes de estos parámetros:

a) $\sigma = -\xi \cdot \omega_n = \text{constante}$ (figura 3.6).

La transformación que mantiene la respuesta impulsional está dada por $z = e^{sT}$. Por lo tanto, las curvas con $\sigma = \text{cte}$ (figura 3.6) se mapean al plano z según la ecuación $z = e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega T}$ es decir en circunferencias centradas en el origen del plano z y de radio $e^{\sigma T}$ (figura 3.7).

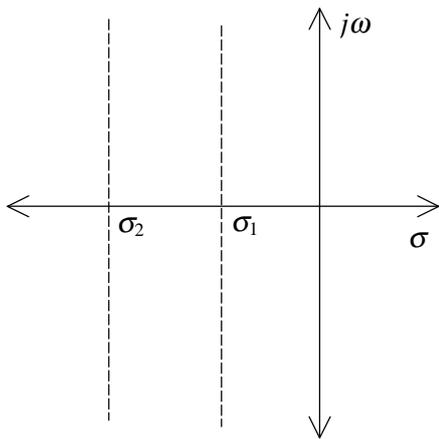


Figura 3.6.

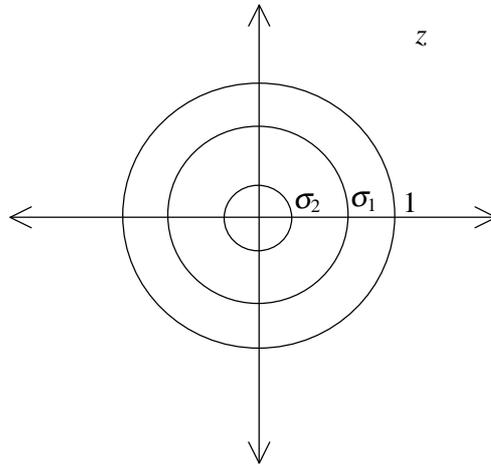


Figura 3.7.

b) $\omega_d = \text{constante}$ (figura 3.8).

En esta situación la transformación $z=e^{sT}$ resulta $z=e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega_d T}$. Es decir que la fase de los puntos z (correspondiente a puntos s con ω_d constante) es constante e igual a $\omega_d \cdot T$, mientras que el módulo varía con σ (figuras 3.8 y 3.9).

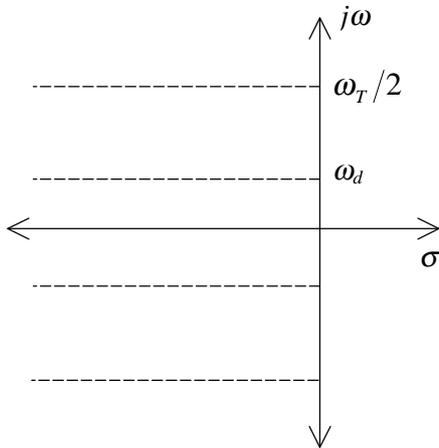


Figura 3.8.

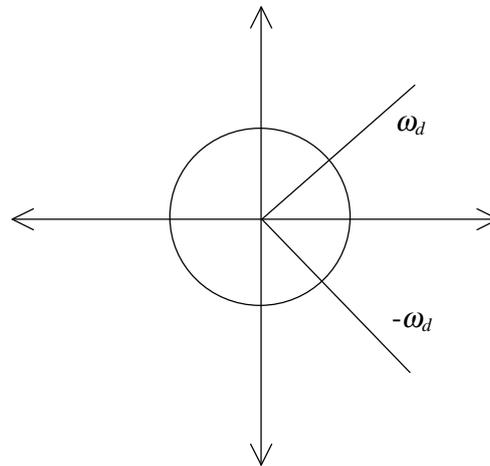


Figura 3.9.

c) $\xi = \text{constante}$ (figura 3.10).

En este caso las curvas se mapean como $z=e^{-\xi\omega T} \cdot e^{j\omega T} = K^{\omega T} \cdot e^{j\omega T}$ dando origen en el plano z a espirales que comienzan en $z=1$ y terminan en $z=0$ (figura 3.11).

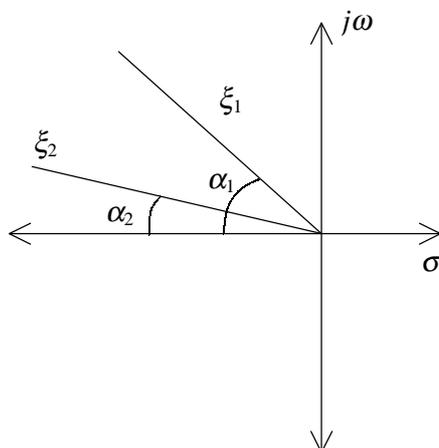


Figura 3.10.

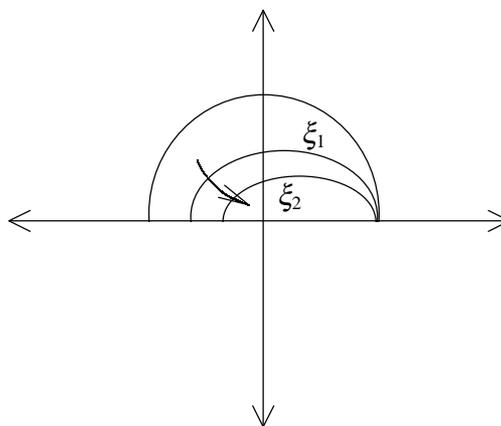


Figura 3.11.

d) $\omega_n = \text{constante}$ (figura 3.12).

El mapeo de estas curvas al plano z se observa en la figura 3.13.

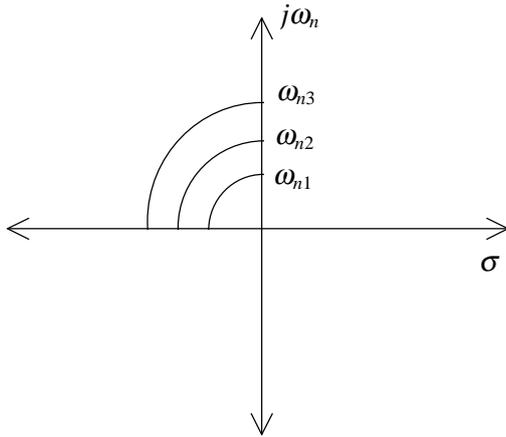


Figura 3.12.

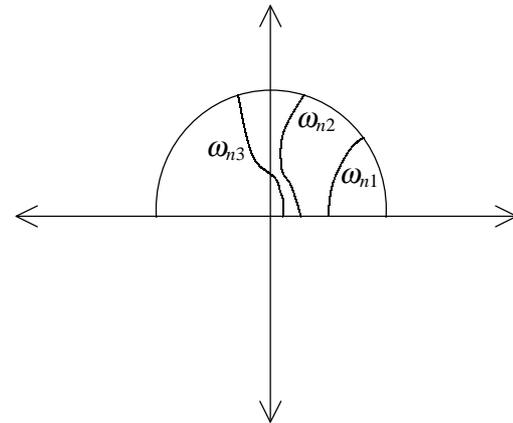


Figura 3.13.

Debido a que la transformación propuesta mantiene la respuesta impulsional se analizará la respuesta al impulso de Kronecker.

Para el sistema digital proveniente del sistema analógico de la ecuación 3-29, la función de transferencia en z es:

$$G(z) = \frac{\omega_n^2 z (e^{s_1 T} - e^{s_2 T})}{(s_1 - s_2) [z^2 - (e^{s_1 T} + e^{s_2 T}) z + (e^{s_1 T} e^{s_2 T})]}, \quad (3-30)$$

donde $s_1 \neq s_2$ son las raíces del polinomio denominador de la ecuación (3-29). Puede verificarse que la locación de los polos (exclusivamente de los polos) en el plano z puede ser calculada a partir de los polos de la señal analógica mediante la transformación $z = e^{sT}$.

A partir de la ecuación anterior se puede encontrar la respuesta al impulso del sistema digital para diferentes posiciones de sus polos.

Caso A: Polos complejos conjugados con parte real negativa.

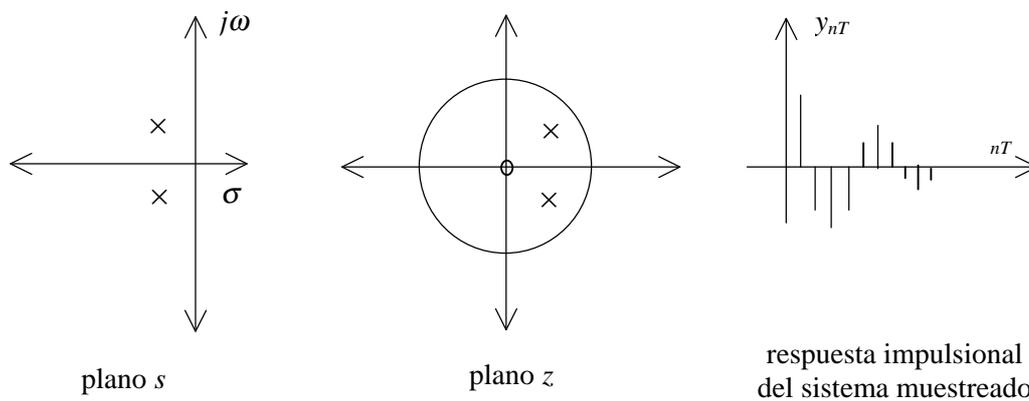


Figura 3.14.

Caso B: Polos complejos conjugados con parte real nula.

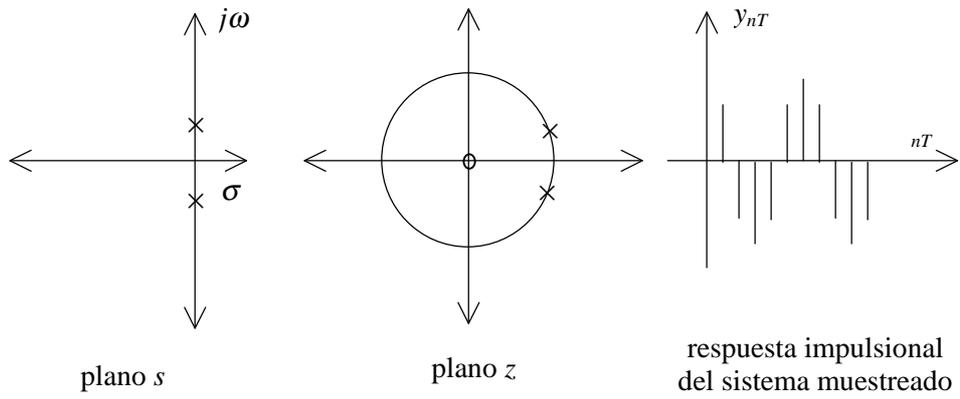


Figura 3.15.

Caso C: Polos complejos conjugados con parte real positiva.

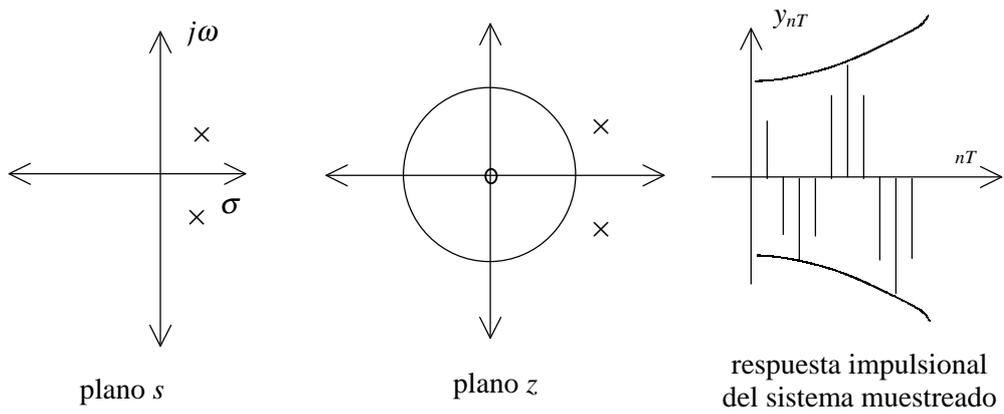


Figura 3.16.

Caso D: Polos complejos conjugados con parte real negativa y parte imaginara $\omega_T/2$.

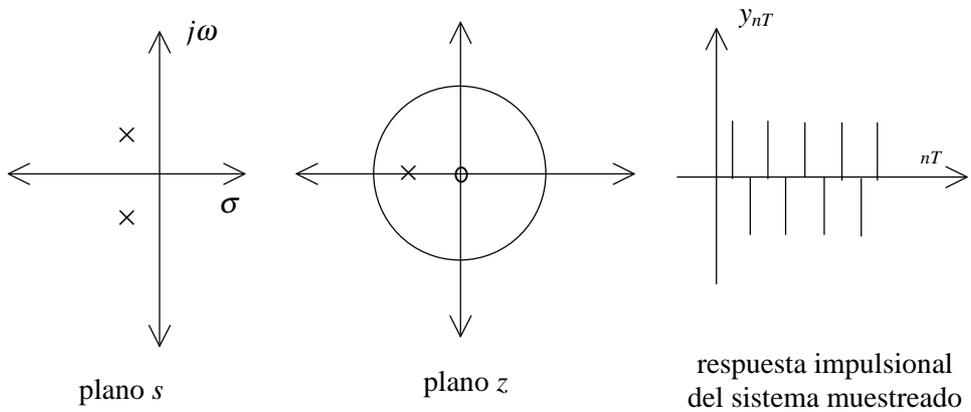


Figura 3.17.

Caso E: Polos reales y distintos con parte real negativa.

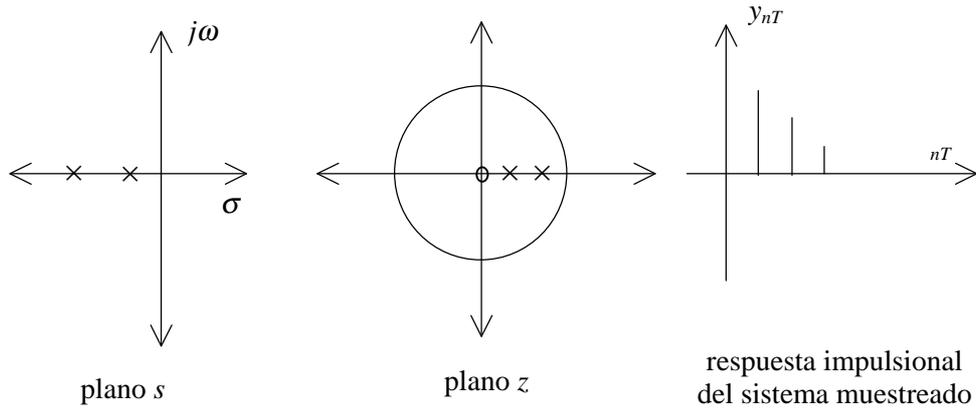


Figura 3.18.

III.4. ERROR DE ESTADO ESTACIONARIO.

Una característica importante de un sistema de control es su capacidad para seguir ciertos tipos de entrada con un mínimo error. Debido a esto es que el comportamiento de estado estacionario de un sistema de control a lazo cerrado suele evaluarse analizando el valor de estado estacionario de la señal de error cuando se excita el sistema con señales de referencia particulares tales como: escalón, rampa y parábola.

Este criterio se puede emplear en un sistema de control digital de lazo cerrado si se analiza el valor de estado estacionario de la secuencia de error.

Si se considera un sistema de control digital con realimentación unitaria, la función de transferencia de lazo cerrado es:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{D(z) G(z)}{1 + D(z) G(z)}, \quad (3-31)$$

donde

$$G(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}. \quad (3-32)$$

La función de transferencia de lazo abierto $D(z) \cdot G(z)$ se puede expresar como:

$$D(z) G(z) = \frac{K \cdot \prod_{i=1}^m (z - z_i)}{(z - 1)^N \prod_{j=1}^p (z - z_j)}, \quad (3-33)$$

donde N es un número entero y define, en forma análoga a lo que sucede en sistemas continuos, el tipo de sistema. Como se ve a continuación, el error de estado estacionario del sistema de lazo cerrado, a distintos tipos de excitación, está íntimamente asociado a N .

Se definirá, por conveniencia, el valor K_c :

$$K_c = \left. \frac{K \cdot \prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{j=1}^p (z - z_j)} \right|_{z=1}. \quad (3-34)$$

La secuencia error del sistema se define como la diferencia entre la secuencia de entrada al sistema y la secuencia de salida:

$$E(z) = R(z) - Y(z). \quad (3-35)$$

Combinando las ecuaciones (3-32) y (3-35) se obtiene:

$$E(z) = \frac{R(z)}{1 + D(z) G(z)}. \quad (3-36)$$

El valor de estado estacionario e_{ss} se puede obtener utilizando el teorema del valor final:

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{R(z)}{1 + D(z) G(z)}. \quad (3-37)$$

Se analizarán ahora los casos particulares en que la entrada es un escalón o una rampa.

1) Entrada: secuencia escalón unitario.

Si la secuencia de entrada es un escalón $R(z) = \frac{z}{z-1}$; reemplazando $R(z)$ en la ecuación (3-37) se obtiene:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} D(z) G(z)}. \quad (3-38)$$

Si se define la constante de error de posición como:

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} D(z) G(z), \quad (3-39)$$

entonces si $N=0$, $K_p = K_c$ y

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_c}. \quad (3-40)$$

Para $N \geq 1$, $K_p = \infty$ y el error de estado estacionario a una excitación en escalón es cero.

2) Entrada: secuencia rampa.

Si la secuencia de entrada es una rampa $R(z) = \frac{T \cdot z}{(z-1)^2}$, entonces:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}, \quad (3-41)$$

siendo $K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{T} (z-1) D(z) G(z)$.

Entonces si $N=0$, $K_v=0$ y el error de estado estacionario a la rampa resulta infinito. Lo cual pone de manifiesto la incapacidad de un sistema de tipo cero para seguir este tipo de excitación.

$$\text{Si } N=1, K_v = \frac{K_c}{T} \text{ y } e_{ss} = \frac{T}{K_c}.$$

Para $N \geq 2$, $K_v = \infty$ y $e_{ss} = 0$.

CAPÍTULO CUATRO.

ESTABILIDAD EN SISTEMAS DE CONTROL MUESTREADO.

IV.1. INTRODUCCIÓN.

Las técnicas para el estudio de la estabilidad de sistemas muestreados de control son analizadas en este capítulo. En general, los métodos de estudio de la estabilidad de sistemas continuos son también aplicables al análisis de sistemas muestreados, si ciertas modificaciones son realizadas. Estos métodos incluyen el criterio de Routh–Hurwitz, el método del lugar de las raíces y los métodos de análisis frecuencial. También es analizado el criterio simplificado de Jury que es una técnica especialmente desarrollada para analizar la estabilidad de sistemas de tiempo discreto.

Con el fin de enfatizar las similitudes y diferencias entre los sistemas de tiempo continuo y discreto, se compara la estabilidad de un sistema de control continuo con el de su equivalente discreto.

En sistemas continuos, la estabilidad se analiza a partir del denominador (ecuación característica) de la función de transferencia de lazo cerrado:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}. \quad (4-1)$$

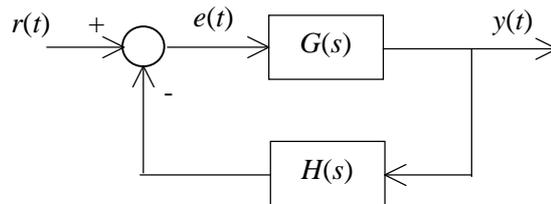


Figura 4.1. Sistema de Control de tiempo continuo.

La posición de las raíces de la ecuación característica $(1 + GH(s))$, determina la estabilidad del sistema. El límite de la región de estabilidad en el plano s es el eje $j\omega$, debido a que polos con parte real negativa implican una respuesta que se amortigua en el tiempo.

Si se muestrea la señal de error y se utiliza un reconstructor de orden cero, se obtiene el sistema de control de tiempo discreto de la figura 4.2.

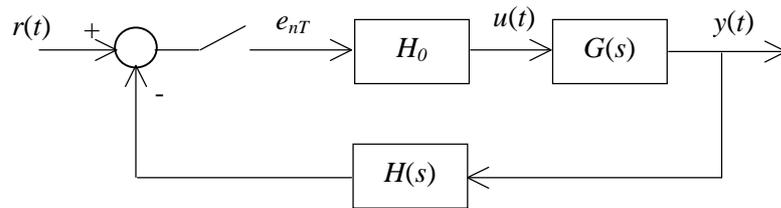


Figura 4.2. Sistema de Control de tiempo discreto.

La función de transferencia entrada-salida correspondiente al diagrama en bloques de la figura 4.2, ha sido deducida en el capítulo 3 y está dada por:

$$T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)}, \quad (4-2)$$

con:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}, \quad (4-3)$$

$$GH(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G(s)H(s)}{s} \right\}. \quad (4-4)$$

Los distintos métodos para el estudio de la estabilidad de un sistema muestreado de control, como asimismo su comparación con su símil de tiempo continuo son analizados mediante un ejemplo.

Ejemplo.

Sea una planta de segundo orden de función de transferencia dada por:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}, \quad (4-5)$$

la cual se realimenta en forma unitaria.

El sistema equivalente de tiempo discreto se obtiene intercalando en el lazo directo un muestreador y un reconstructor de orden cero (figura 4.2). La función de transferencia entrada-salida correspondiente está dada por:

$$T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)}, \quad (4-6)$$

con:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{1}{s^2(s+1)} \right\}. \quad (4-7)$$

Si se elige un período de muestreo de $T = 0,1$ seg. se obtiene:

$$G(z) = \frac{0.00484z + 0.00468}{(z-1)(z-0.905)} ; T = 0.1 \text{ seg.} \quad (4-8)$$

Si se elige un período de muestreo mayor $T = 1 \text{ seg.}$, se obtiene:

$$G(z) = \frac{0.368z + 0.264}{(z-1)(z-0.368)} ; T = 1 \text{ seg.} \quad (4-9)$$

En las partes a) b) y c) de la figura 4.3 se han representado las respuestas al escalón del sistema analógico de lazo cerrado y de su similar muestreado para períodos de muestreo de $T = 0.1 \text{ seg.}$ y $T = 1 \text{ seg.}$ respectivamente.

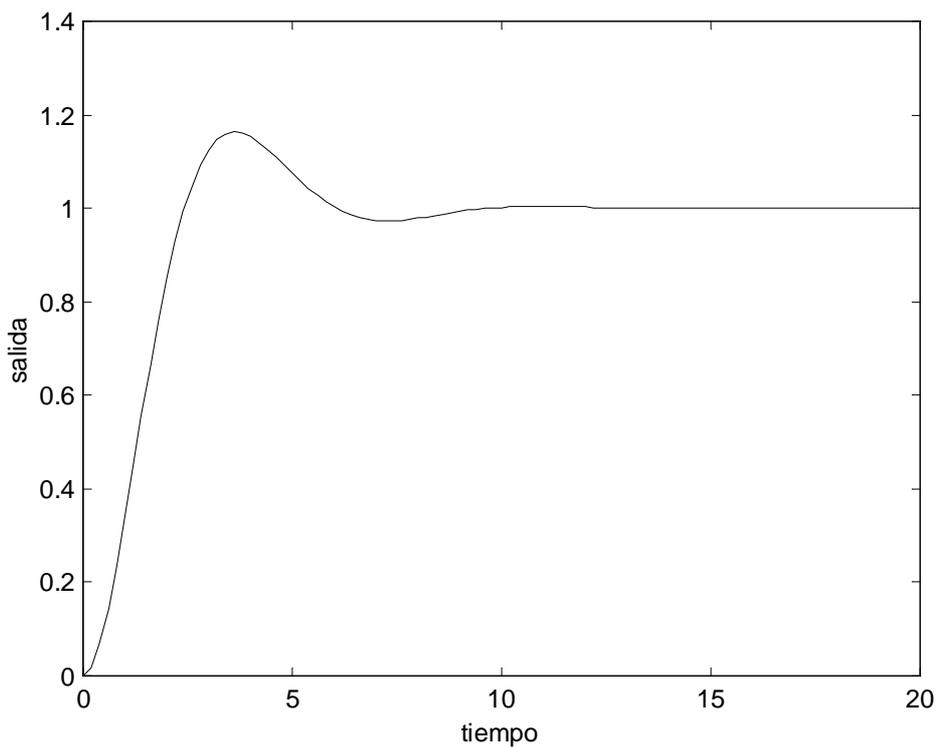


Figura 4.3. a) Respuesta al escalón del sistema analógico en lazo cerrado.

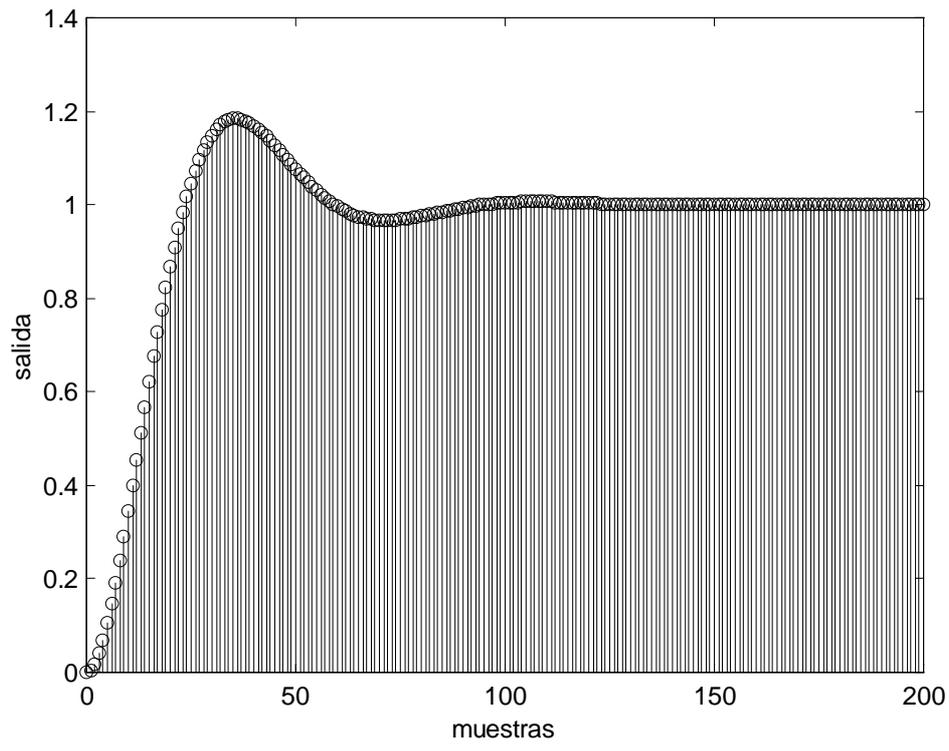


Figura 4.3. b) Respuesta temporal del sistema muestreado de lazo cerrado para $T=0.1$ seg.

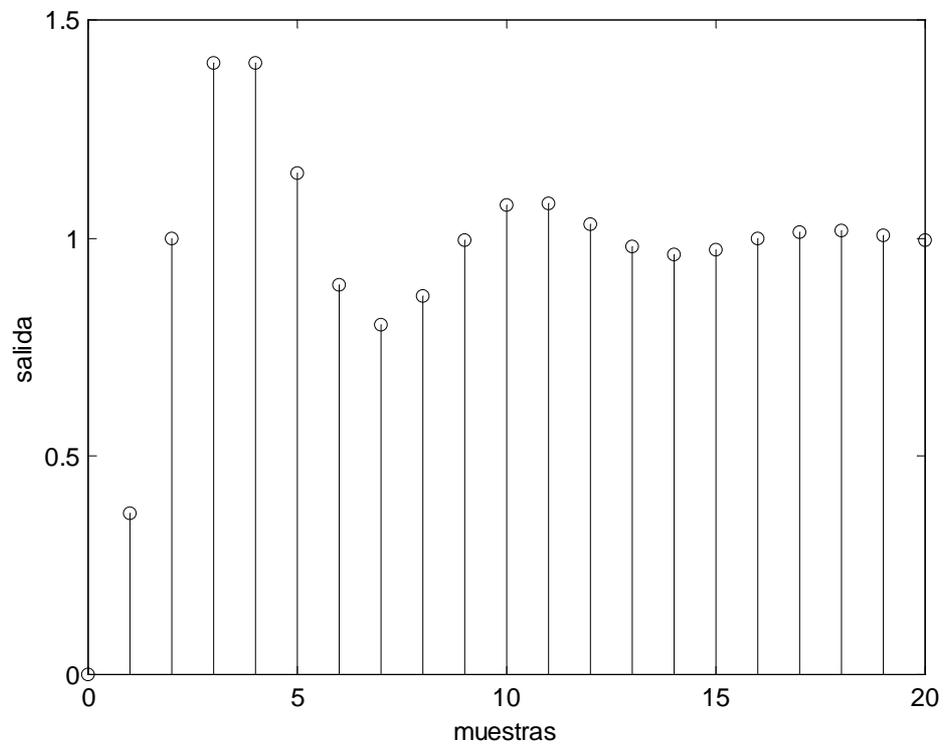


Figura 4.3. c) Respuesta temporal del sistema muestreado de lazo cerrado para $T=1$ seg.

Del análisis de la figura 4.3 se observa que el sistema digital es menos estable que su equivalente analógico, presentando un comportamiento transitorio menos amortiguado. Este resultado, presentado para un ejemplo particular, es general y se debe al retardo equivalente, de medio período de muestreo, introducido por el reconstructor de orden cero. De modo que al aumentar el período de muestreo se deteriora la estabilidad del sistema.

IV.2. ESTABILIDAD DE SISTEMAS MUESTREADOS.

Para analizar la estabilidad de un sistema muestreado, se desea saber dónde deben estar las raíces de la ecuación característica $(1 + GH(z))$ para que el sistema tenga una respuesta transitoria que se extinga en el tiempo. Para ello se calcula la respuesta del sistema en lazo cerrado.

$$Y(z) = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} R(z) = \frac{K \prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)} R(z). \quad (4-10)$$

que mediante el desarrollo en fracciones parciales puede llevarse a la forma:

$$Y(z) = \frac{k_1 z}{z - p_1} + \dots + \frac{k_n z}{z - p_n} + Y_R(z), \quad (4-11)$$

donde $Y_R(z)$ contiene los términos de $Y(z)$ originados en los polos de la excitación $R(z)$.

Los primeros n términos de la expresión (4-11) representan la respuesta transitoria de $Y(z)$. Para que el sistema sea estable, la antitransformada z de estos términos debe tender a cero cuando se incrementa el tiempo. La transformada z inversa del i -ésimo término de la ecuación (4-11) es:

$$Z^{-1} \left\{ \frac{k_i z}{z - p_i} \right\} = k_i (p_i)^{kT}. \quad (4-12)$$

Para que este término se anule al incrementarse k , el módulo de p_i debe ser menor que la unidad. Teniendo en cuenta que los valores p_i corresponden a las raíces de la ecuación característica (ecuación (4-10)) se concluye que para que un sistema realimentado de control de tiempo discreto sea estable, las raíces de su ecuación característica deben estar ubicadas en el interior del círculo de radio unitario.

IV.3. TRANSFORMACIÓN BILINEAL.

La mayoría de las técnicas de análisis de la estabilidad de sistemas de tiempo continuo se basan en que el límite de la región de estabilidad en el plano s corresponde al eje imaginario $j\omega$. Estas técnicas no pueden ser aplicadas a sistemas de tiempo discreto, ya que el límite de la región de estabilidad en el plano z corresponde al círculo unitario. Sin embargo, si se emplea la transformación bilineal definida por :

$$w = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1}, \quad (4-13)$$

la circunferencia de radio unitario en z se transforma en el eje imaginario en el nuevo plano w .

En efecto, sobre el círculo unitario se cumple que $z=e^{j\omega T}$ y reemplazando esta expresión en la ecuación 4-13 se obtiene:

$$w = \frac{2}{T} \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = j \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega T}{2}\right). \quad (4-14)$$

Al recorrer el círculo de radio unitario en el plano z , el ángulo ωT varía de $-\pi$ a π y su recorrido equivalente en el plano w corresponde a todo el eje imaginario desde $-j\infty$ a $+j\infty$.

Si nos ubicamos en el plano w en un punto sobre el eje imaginario, ($w = j\omega_w$) la expresión 4-14 permite vincular las frecuencias entre los planos s y w :

$$\omega_w = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega T}{2}\right). \quad (4-15)$$

El agregado del término $2/T$ en la definición de la transformación bilineal (ecuación 4-13) tiene por objeto que en el rango de frecuencias para las cuales $\omega T/2$ es pequeño, las frecuencias en los planos s y w coincidan. En efecto, si se cumple que $\omega T/2 \ll 1$ resulta:

$$\omega_w = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \cong \frac{2}{T} \left(\frac{\omega T}{2}\right) = \omega \quad (4-16)$$

Sin embargo, cuando la frecuencia ω en el plano s se acerca a la mitad de la frecuencia de muestreo ($2/T$), la frecuencia en el plano w (ω_w), tiende a infinito. Esto significa que a la semibanda ubicada en el semiplano izquierdo del plano s comprendida entre $-j2/T$ y $+j2/T$ le corresponde todo el semiplano izquierdo en el plano w .

IV.4. CRITERIO DE ROUTH – HURWITZ.

Este criterio es usado en sistemas de tiempo continuo para determinar si el denominador de la función de transferencia tiene raíces en el semiplano derecho del plano s . Si este criterio es aplicado a la ecuación característica de un sistema de tiempo discreto expresado en la variable z , no puede obtenerse ninguna información sobre la estabilidad del mismo. Sin embargo, si la ecuación característica es expresada como una función de la variable de transformación bilineal w , entonces la estabilidad del sistema puede ser determinada por aplicación directa del criterio de Routh–Hurwitz, de la misma manera que se aplica a los sistemas de tiempo continuo. Esto es posible, pues a través de la transformación w el interior del círculo unitario del plano z se transforma en el semiplano izquierdo del plano w , y el exterior del círculo unitario en el semiplano derecho w .

Ejemplo.

Para analizar la aplicación del criterio de estabilidad de Routh–Hurwitz se utilizará el mismo ejemplo visto previamente (ecuación 4-5):

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)} \quad (4-17)$$

El sistema de control de tiempo continuo (figura 4.1), es estable para todo valor positivo de la ganancia K . En efecto, si se aplica el criterio de Routh–Hurwitz a su ecuación característica:

$$F(s) = 1 + GH(s) = s^2 + s + K \quad (4-18)$$

resulta:

$$\begin{array}{r} s^2 \quad 1 \quad K \\ s^1 \quad 1 \\ s^0 \quad K \end{array} \quad (4-19)$$

El número de cambios de signo de la primer fila del arreglo de Routh–Hurwitz indica el número de raíces del polinomio característico $F(s)$ ubicadas en el semiplano derecho. En este caso no existen cambios de signo de modo que el sistema de tiempo continuo realimentado en forma unitaria es estable para todo valor positivo de la ganancia K .

La función de transferencia entrada–salida para el sistema equivalente de tiempo discreto, para un período de muestreo $T = 0.1$ seg. está dada por (ecuación 4-8):

$$G(z) = K \frac{0.00484 z + 0.00468}{(z-1)(z-0.905)}; \quad T = 0.1 \text{ seg} \quad (4-20)$$

Para aplicar el criterio de Routh–Hurwitz es necesario aplicar previamente la transformación bilineal (ecuación 4-13).

$$G(w) = K \frac{-0.00016w^2 - 0.1872w + 3.81}{3.81w^2 + 3.80w} \quad (4-21)$$

Luego, la ecuación característica en el plano w está dada por:

$$F(w) = 1 + G(w) = (3.81 - 0.00016K) w^2 + (3.80 - 0.1872K) w + 3.81K.$$

La aplicación del criterio de Routh–Hurwitz conduce al siguiente arreglo:

$$\begin{array}{r} w^2 \quad 3.81 - 0.00016K \quad 3.81K \\ w^1 \quad 3.80 - 0.1872K \\ w^0 \quad 3.81K \end{array} \quad (4-22)$$

Para que el sistema sea estable no debe haber cambios de signos en la primera columna del arreglo (arreglo (4-22)), siendo necesario que la ganancia K se halle comprendida en el rango:

$$0 < K < 20.3. \quad (4-23)$$

Si se elige, en cambio, un período de muestreo mayor $T = 1$ seg., se obtiene (ecuación (4-9)):

$$G(z) = K \frac{0.368 z + 0.264}{(z-1)(z-0.368)}; \quad T = 1 \text{ seg.} \quad (4-24)$$

La expresión anterior muestra que al aumentar el período de muestreo el polo de más alta frecuencia se desplaza hacia el origen del plano z .

Aplicando la transformación bilineal, la ecuación característica en el plano w resulta:

$$F(w) = (1 - 0.0381K)w^2 + (0.924 - 0.386K)w + 0.924K = 0,$$

y la aplicación del criterio de Routh–Hurwitz conduce al siguiente arreglo:

$$\begin{array}{r} w^2 \quad 1 - 0.0381K \quad 0.924K \\ w^1 \quad 0.924 - 0.386K \\ w^0 \quad 0.924K \end{array} \quad (4-25)$$

Examinando la primera columna del arreglo (ecuación (4-25)) se observa que para que el sistema sea estable la ganancia K debe hallarse comprendida en el rango:

$$0 < K < 2.39 \quad (4-26)$$

Comparando las expresiones (4-23) y (4-26) se observa que, como era previsible, al aumentar el período de muestreo se reduce el rango de estabilidad del sistema.

IV.5. CRITERIO DE ESTABILIDAD DE JURY.

Este criterio de estabilidad tiene la particularidad de poder ser empleado directamente sobre sistemas de tiempo discreto expresados en la variable z .

Sea la ecuación característica de un sistema discreto:

$$F(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0; \quad a_n > 0 \quad (4-27)$$

A partir de la ecuación anterior puede construirse el siguiente arreglo:

$$\begin{array}{cccccccc} z^0 & z^1 & z^2 & \dots & z^{n-k} & \dots & z^{n-1} & z^n \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-k} & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_k & \dots & a_1 & a_0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-k} & \dots & b_{n-1} & \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_{k-1} & \dots & b_0 & \\ c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-k} & \dots & & \\ c_{n-2} & c_{n-3} & c_{n-4} & \dots & c_{k-2} & \dots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ l_0 & l_1 & l_2 & l_3 & & & & \\ l_3 & l_2 & l_1 & l_0 & & & & \\ m_0 & m_1 & m_2 & & & & & \end{array} \quad (4-28)$$

con

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix} \quad c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}$$

$$d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-2-k} \\ c_{n-2} & c_k \end{vmatrix}$$

La condición necesaria y suficiente para que el polinomio $F(z)$ no tenga raíces fuera o sobre el círculo unitario, con $a_n > 0$, son:

$$\begin{aligned}
 F(1) &> 0 \\
 (-1)^n \cdot F(-1) &> 0 \\
 |a_0| &< a_n \\
 |b_0| &> |b_{n-1}| \\
 |c_0| &> |c_{n-2}| \\
 |d_0| &> |d_{n-3}| \\
 &\vdots \\
 |m_0| &> |m_2|
 \end{aligned} \tag{4-29}$$

Note que un sistema de segundo orden contiene una sola fila en el arreglo. Por cada orden adicional, dos filas adicionales son agregadas. Además, para un sistema de orden n , hay un total de $n+1$ restricciones.

Ejemplo.

Supóngase el mismo ejemplo ya analizado. El criterio de Jury se aplica directamente a la ecuación característica del sistema a lazo cerrado $(1+GH(z))$. De la ecuación (4-24) (período de muestreo $T = 1$ seg.), la ecuación característica $F(z)$ está dada por:

$$F(z) = 1 + G(z) = z^2 + (0.368 K - 1.368) z + (0.368 + 0.264 K) = 0.$$

Dado que se trata de una ecuación de segundo orden, el arreglo de Jury se reduce a:

$$\begin{array}{ccc}
 z^0 & z^1 & z^2 \\
 0.368 + 0.264 K & 0.368 K - 1.368 & 1
 \end{array} \tag{4-30}$$

La aplicación de las condiciones dadas por la expresión (4-29) conduce a:

a) $F(1) = 1 + (0.368 K - 1.368) + (0.368 + 0.264 K) > 0$

Esta condición es satisfecha para todo $K > 0$.

b) $(-1)^2 F(-1) = 1 - (0.368 K - 1.368) + (0.368 + 0.264 K) > 0$

Esta condición es satisfecha para $K < 26.3$.

c) $|a_0| = |0.368 + 0.264 K| < a_2 = 1$

Esta condición es satisfecha para $K < 2.39$.

Por lo tanto el sistema es estable para valores de la ganancia comprendidos entre $0 < K < 2.39$. Resultado coincidente con el obtenido previamente (ecuación (4-26)).

Para el valor de K correspondiente al límite del rango de estabilidad, $K = 2.39$, la ecuación característica vale:

$$z^2 - 0.49z + 1 = 0, \quad (4-31)$$

siendo sus raíces

$$z = 0.244 \mp j0.97 = 1 \angle \mp 1.32 \text{ rad} = 1 \angle \mp \omega T. \quad (4-32)$$

La expresión anterior indica que para un período de muestreo $T = 1$ seg. y una ganancia de $K = 2.39$, el sistema en lazo cerrado oscilará a una frecuencia de $(1.32/2\pi)$ 1/seg.

IV.6. MÉTODO DEL LUGAR DE LAS RAÍCES.

Suponiendo que el sistema es lineal y con parámetros invariantes en el tiempo, la transferencia de lazo abierto $GH(z)$ puede expresarse como un cociente de dos polinomios en z afectados por una ganancia K .

$$GH(z) = \frac{K \prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)}; \quad n \geq m \quad (4-33)$$

Puede verse que $GH(z)$ es de la misma forma que $G(s)H(s)$ para sistemas continuos. Por lo tanto las reglas de construcción del diagrama del lugar de las raíces, desarrolladas para el plano s son también válidas para el plano z .

Para que un punto del plano z pertenezca al lugar de las raíces, $GH(z)$ debe cumplir las siguientes condiciones:

- 1) Condición de amplitud : Módulo de $GH(z) = 1$
- 2) Condición de fase : Argumento de $GH(z) = (2n + 1) \cdot \pi$

Ejemplo:

Si nuevamente se plantea el sistema del ejemplo analizado previamente, a partir de la expresión (4-7) se obtiene:

$$G(z) = K \frac{a T (z - z_1)}{(z - 1)(z - p_1)}, \quad (4-34)$$

donde:

$$p_1 = e^{-T}; \quad z_1 = \frac{-1 + (1+T)e^{-T}}{T - 1 + e^{-T}}; \quad a = \frac{T - 1 + e^{-T}}{T}.$$

Si se reemplaza a la variable z por $z = x + jy$, en la condición de fase de $GH(z)$ se obtiene la ecuación de una circunferencia con centro en $(z_1, 0)$ y cuyo radio es la media geométrica de las distancias de los polos al cero z_1 .

$$(x - z_1)^2 + y^2 = (1 - z_1)(p_1 - z_1). \quad (4-35)$$

Además, fácilmente, puede verse que los puntos sobre el eje real entre el polo p_1 y 1 pertenecen al lugar de raíces, lo mismo que los puntos sobre el eje real a la izquierda del cero z_1 .

En la figura 4.4 se ha representado el diagrama del lugar de las raíces para un período de muestreo de $T = 1$ seg.

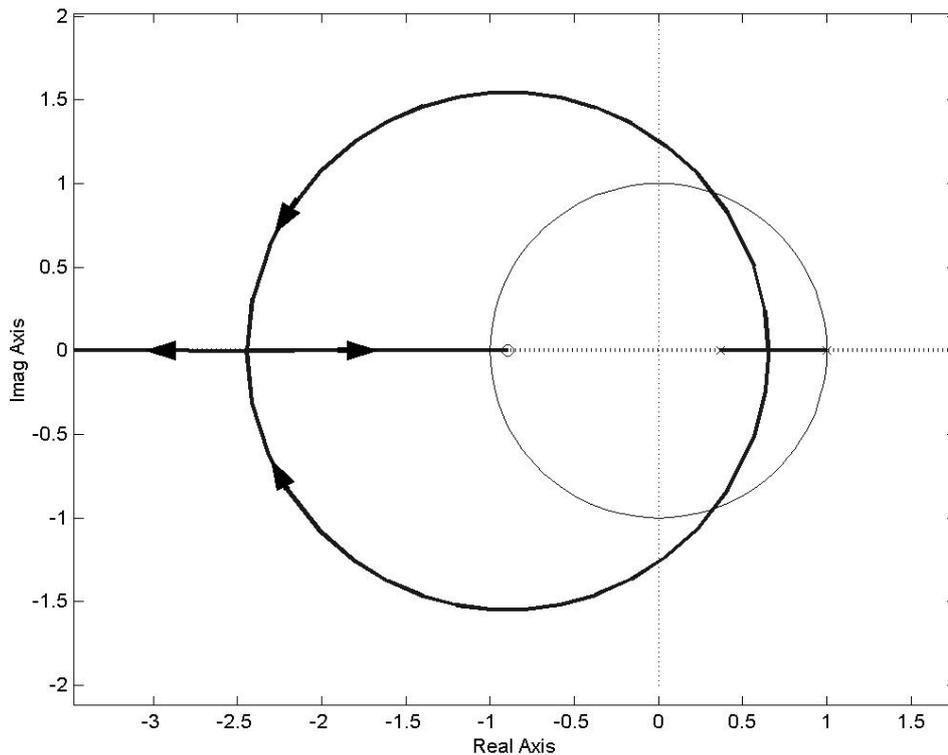


Figura 4.4. Diagrama del lugar de las raíces para $T=1$ seg.

Para $K = 0$ las raíces coinciden con las raíces del sistema a lazo abierto. Cuando K aumenta las raíces se vuelven complejas conjugadas y comienzan a describir una circunferencia para luego volver a ser reales. Por último para $K \rightarrow \infty$ una raíz coincide con el cero z_1 y la otra está en $z \rightarrow \infty$. El sistema es estable hasta un valor de K para el cual se produce la intersección del lugar de raíces con la circunferencia de radio unitario.

Se trata ahora de obtener una expresión del valor máximo de K para el cual el sistema está en el límite de estabilidad. Para ello se iguala la expresión de la circunferencia del lugar de raíces a la ecuación de la circunferencia de radio unitario y se obtiene la abscisa x que corresponde al límite de estabilidad:

$$x = [(1 - p_1) + z_1 (1 + p_1)] / 2 z_1. \quad (4-36)$$

Si el período de muestreo es de $T = 1$ seg., de la expresión anterior se obtiene: $x = 0.244$. Reemplazando este valor en la ecuación de la circunferencia (expresión (4-35)) se obtiene el correspondiente valor de y ($y = \pm 0.97$). Los valores de x e y obtenidos para el valor límite de $K = 2.39$ coinciden con los obtenidos previamente por aplicación del método de Jury (ecuación (4-32)).

IV.7. DIAGRAMAS DE BODE.

El análisis de estabilidad de sistemas de tiempo discreto puede realizarse, como en sistemas analógicos, en base al margen de fase MF y al margen de ganancia MG definidos a partir de la respuesta en frecuencia del sistema de lazo abierto. En sistemas de tiempo continuo la respuesta en frecuencia puede ser obtenida en forma aproximada a través de los diagramas de Bode. En efecto, basándose en el hecho de que la respuesta en frecuencia de un sistema continuo se obtiene al evaluar la función de transferencia en $s = j\omega$, pueden obtenerse, a través de propiedades geométricas, aproximaciones por líneas rectas de la respuesta en frecuencia.

En el dominio z , la respuesta en frecuencia se obtiene a partir de evaluar la función de transferencia en $z = e^{j\omega}$, es decir sobre puntos de la circunferencia unitaria. Evidentemente, la evaluación aproximada de Bode, por líneas rectas, no es aplicable. Sin embargo, si se emplea la transformación bilineal para pasar del plano z al plano w , las aproximaciones de Bode por líneas rectas pueden ser utilizados para analizar el comportamiento en frecuencia de sistemas muestreados.

Ejemplo.

Supóngase el mismo ejemplo ya analizado. Los diagramas de Bode del sistema de tiempo continuo dado por la ecuación (4-5) se han representado en la figura 4.5.

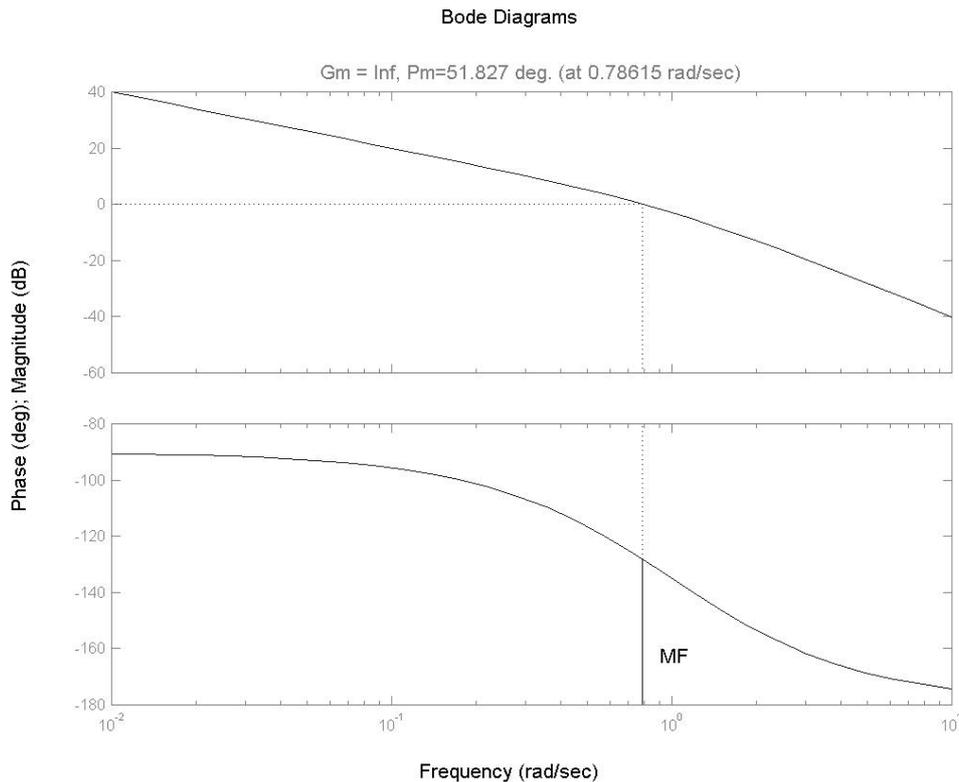


Figura 4.5. Diagramas de Bode del sistema analógico.

Del análisis de la figura se deduce que el sistema analógico a lazo cerrado será estable para todo valor positivo de la ganancia K ya que el margen de ganancia es infinito. Para el valor elegido de la ganancia $K=1$, el margen de fase vale $MF= 52^\circ$.

La estabilidad del sistema muestreado puede estudiarse directamente a partir de su función de transferencia $G(z)$. Las funciones de transferencia $G(z)$ para períodos de muestreo de $T=0.1$ seg. y $T=1$ seg. han sido obtenidas previamente (ecuaciones (4-8) y (4-9)):

$$G(z) = \frac{0.00484z + 0.00468}{(z-1)(z-0.905)} \quad ; \quad T = 0.1 \text{ seg.} \quad (4-37)$$

$$G(z) = \frac{0.368z + 0.264}{(z-1)(z-0.368)} \quad ; \quad T = 1 \text{ seg.} \quad (4-38)$$

El análisis de la estabilidad se realiza reemplazando la variable z a partir de su definición ($z = e^{j\omega T}$) y graficando el módulo y la fase de la función de transferencia para los valores de ωT comprendidos entre 0 y π . En las figuras 4.6 y 4.7. se han representado los diagramas del sistema muestreado correspondientes a un período de muestreo de $T = 0.1$ seg. y 1 seg. respectivamente.

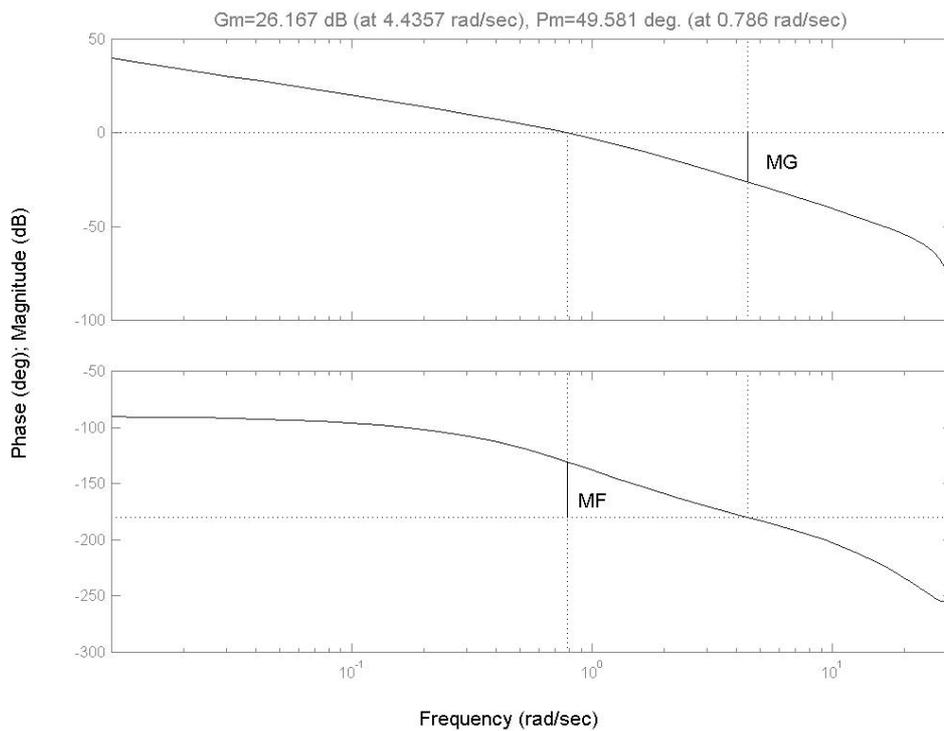


Figura 4.6. Diagrama en función de la frecuencia del sistema digital para $T=0.1$ seg.

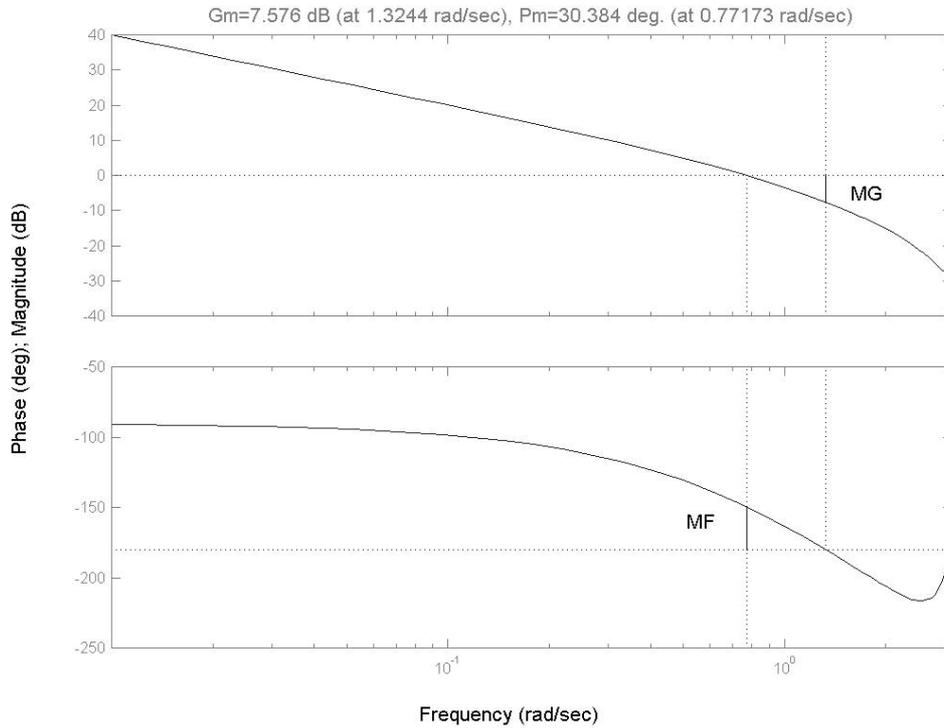


Figura 4.7. Diagrama en función de la frecuencia del sistema digital para $T=1$ seg.

Del análisis de las figuras se observa que el sistema muestreado es más inestable que el de tiempo continuo y que además el grado de inestabilidad aumenta al incrementar el período de muestreo. Los márgenes de ganancia (MG) y fase (MF), para el sistema muestreado para $T = 0.1$ seg. y $T = 1$ seg. valen:

$$\begin{aligned}
 T = 0.1 \text{ seg}; \quad & \text{MG} = 26 \text{ dB}; \quad \text{MF} = 50^\circ \\
 T = 1 \text{ seg}; \quad & \text{MG} = 7.6 \text{ dB}; \quad \text{MF} = 30^\circ
 \end{aligned}
 \tag{4-39}$$

Como se ha puntualizado, si se emplea la transformación bilineal, la respuesta en frecuencia puede ser aproximada por los diagramas de Bode, es decir, sus aproximaciones por líneas rectas pueden ser directamente utilizadas para analizar la estabilidad de los sistemas muestreados. En efecto, empleando la transformación bilineal, las expresiones (4-37) y (4-38) se transforman en:

$$G(w) = \frac{-0.00016 w^2 - 0.1872 w + 3.81}{3.81 w^2 + 3.80 w}; \quad T = 0.1 \text{ seg.} \tag{4-40}$$

$$G(w) = \frac{-0.0381 (w - 2) (w + 12.14)}{w (w + 0.924)}; \quad T = 1 \text{ seg.} \tag{4-41}$$

En las figuras 4.8 y 4.9, se han representado los diagramas de Bode en el plano w correspondientes a las expresiones (4-40) y (4-41).

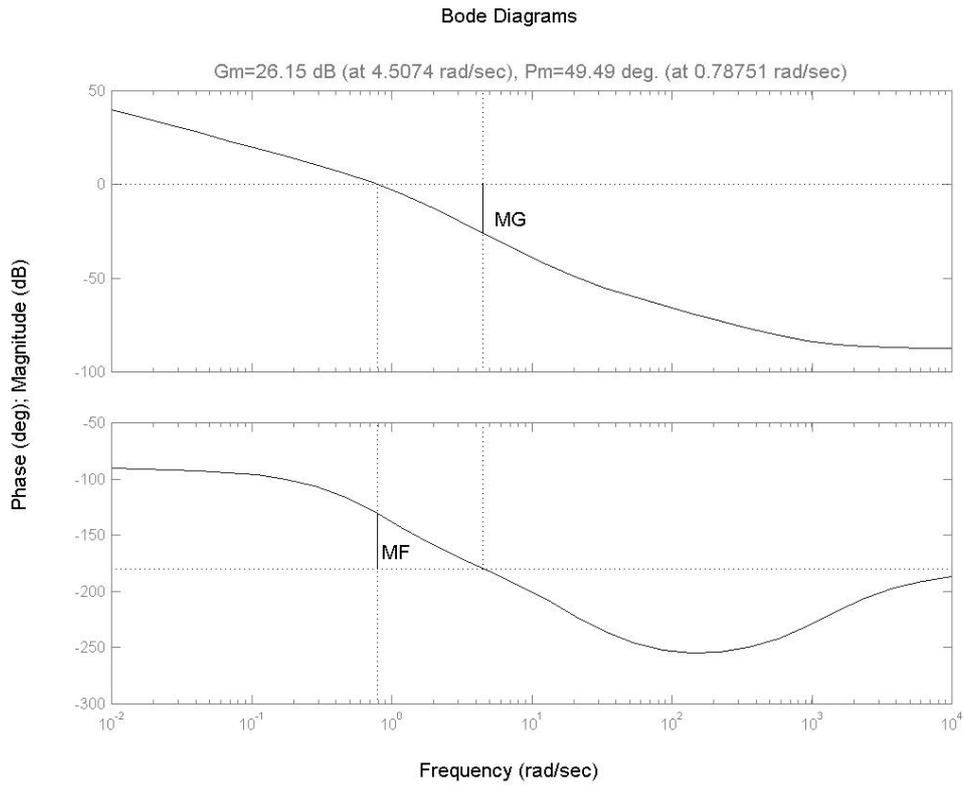


Figura 4.8. Diagramas de Bode del sistema digital en el plano w , para $T=0.1$ seg.

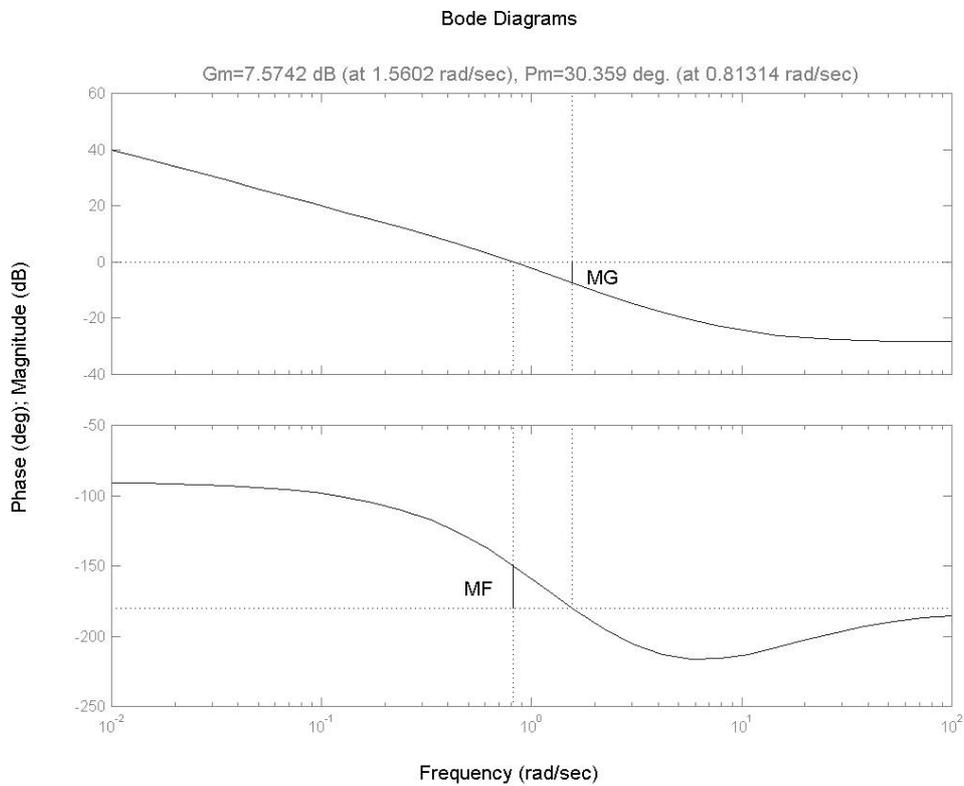


Figura 4.9. Diagramas de Bode del sistema digital en el plano w , para $T=1$ seg.

Del análisis de las figuras se desprende que los márgenes de ganancia y fase prácticamente corresponden a los obtenidos previamente (ecuación (4-39)). La única diferencia con los diagramas de las figuras 4.6 y 4.7 es que la calibración en frecuencia se ha modificado (ecuación 4-15), permitiendo el uso de las aproximaciones por líneas rectas.

IV. 8. CRITERIO DE ESTABILIDAD DE NYQUIST.

Como en los casos del criterio de Routh–Hurwitz y de los diagramas de Bode, el criterio de estabilidad de Nyquist, desarrollado para sistemas continuos, puede aplicarse directamente a sistemas discretos mediante el empleo de la transformada bilineal.

Sin embargo el criterio de estabilidad de Nyquist puede ser desarrollado a partir de la función de transferencia del sistema muestreado en el plano z . Como en el caso de tiempo continuo, el desarrollo del criterio se basa en la aplicación del Principio de Cauchy, pero, en el caso discreto, en lugar de rodear todo el semiplano izquierdo s , el camino de Nyquist para analizar la estabilidad en el plano z es el círculo unitario rodeado en sentido antihorario.

La función característica del sistema muestreado $F(z)$ puede ser factorizada como:

$$F(z) = 1 + GH(z) = \frac{K \prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)}. \quad (4-42)$$

Al recorrer el círculo unitario del plano z en sentido antihorario, el criterio de Nyquist establece que:

$$N = Z - P, \quad (4-43)$$

donde:

N representa el número de giros en sentido horario de la función $F(z)$ alrededor del punto -1 .

Z el número de ceros de la ecuación característica ($F(z)$), situados fuera del círculo unitario.

P el número de polos de la función de transferencia a lazo abierto ($GH(z)$) o de la ecuación característica ($F(z)$) situados fuera del círculo unitario.

Ejemplo:

Supóngase el mismo ejemplo analizado previamente. El estudio de la estabilidad del sistema muestreado mediante el empleo del criterio de estabilidad de Nyquist puede realizarse a partir de los planos z o w . Si partimos del plano z , para un período de muestreo de $T = 1$ seg., resulta:

$$G(z) = \frac{0.368 z + 0.264}{(z - 1)(z - 0.368)}; \quad T = 1 \text{ seg.} \quad (4-44)$$

Dado que la función de transferencia $G(z)$ tiene un polo sobre el círculo unitario ubicado en $z=1$, el camino de Nyquist debe esquivar dicho punto. La desviación de la trayectoria de Ny-

quist alrededor del punto $z=1$ se realiza usualmente siguiendo el camino $z=1+\rho e^{j\theta}$, con $\rho \rightarrow 0$ y θ variando de $-\pi/2$ a $\pi/2$.

El diagrama de Nyquist resultante se ha representado en la figura 4.10.

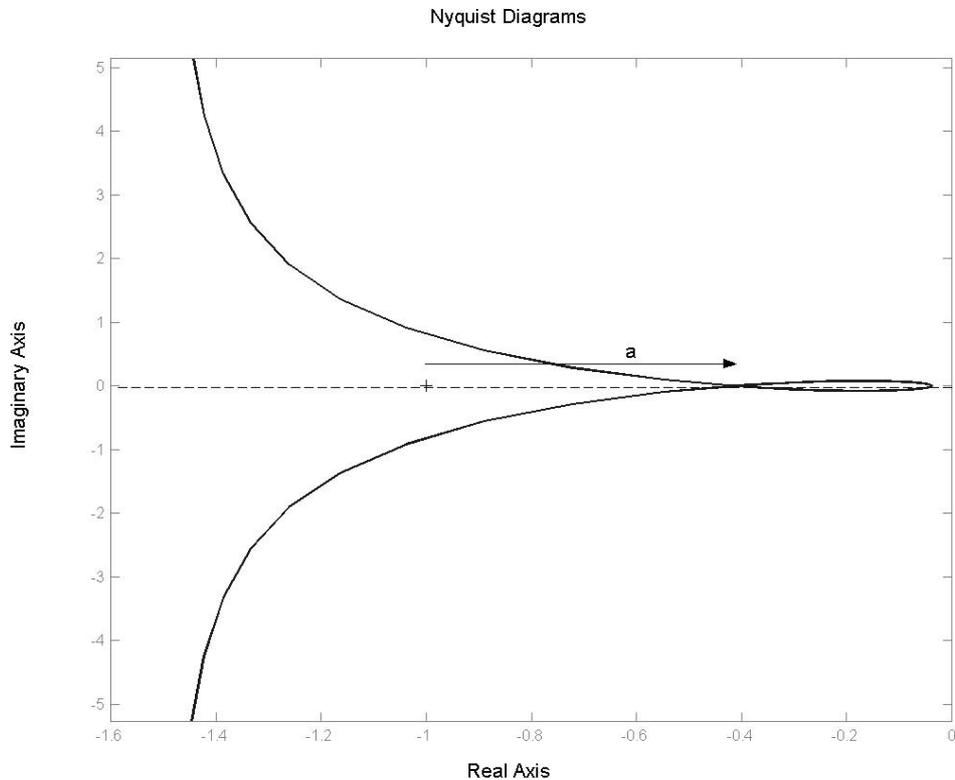


Figura 4.10. Diagrama de Nyquist del sistema digital para $T=1$ seg.

Los márgenes de ganancia y fase obtenidos de la figura coinciden con los hallados previamente:

$$MG = 1/(1-a) = 2.4$$

$$MF = 30^\circ \text{ (Tener en cuenta las escalas de la figura)}$$

Si la aplicación del criterio de Nyquist se realiza en el plano w , para un período de muestreo $T = 1$ seg. la función de transferencia del sistema muestreado en el plano w está dada por:

$$G(w) = \frac{-0.0381 (w - 2) (w + 12.14)}{w (w - 0.924)}; \quad T = 1 \text{ seg.} \quad (4-45)$$

Como la función de transferencia tiene un polo en el origen, dicha discontinuidad debe ser evitada. Para ello el contorno de Nyquist sigue usualmente una trayectoria circular, alrededor del origen, de radio infinitesimal. El diagrama de Nyquist resultante coincide con el representado en la figura 4.10 ya que la única diferencia entre ambos diagramas radica en la calibración en frecuencia del mismo.

CAPÍTULO CINCO.

COMPENSACIÓN CLÁSICA DE SISTEMAS MUESTREADOS.

V.1. INTRODUCCIÓN.

En este capítulo se discuten algunas de las técnicas clásicas en el diseño de controladores digitales simples. Ellas son:

- Controladores de tiempo mínimo.
- Técnicas de aproximación numérica. Diseño de controladores digitales por aproximación de controladores de tiempo continuo.
- Técnicas del lugar de las raíces.
- Compensación en el dominio w .

En la sección 6 se realiza una breve discusión acerca de algunos aspectos esenciales a tener en cuenta en la elección del período de muestreo.

V.2. CONTROLADORES DE TIEMPO MÍNIMO.

Como se ha comentado en secciones previas, un sistema digital cuya función de transferencia $T(z)$ tiene todos sus polos en $z=0$, presenta la particularidad de tener una respuesta impulsionial finita. En otras palabras, su comportamiento transitorio se agota en n períodos de muestreo, siendo n el orden del denominador.

Ejemplo 1.

Considérese la respuesta transitoria a un pulso unitario del sistema de función de transferencia:

$$T(z) = \frac{z^3 + 3z^2 - 2z + 1}{z^3} . \quad (5-1)$$

Su respuesta a un impulso unitario, es:

$$y_{nT} = Z^{-1}\{T(z)\} \quad (5-2)$$

$$y_{nT} = 1 \cdot \delta_{nT} + 3 \cdot \delta_{(n-1)T} - 2 \cdot \delta_{(n-2)T} + 1 \cdot \delta_{(n-3)T} . \quad (5-3)$$

En la figura 5.1 puede observarse que la respuesta transitoria se agota luego de $n = 3$.

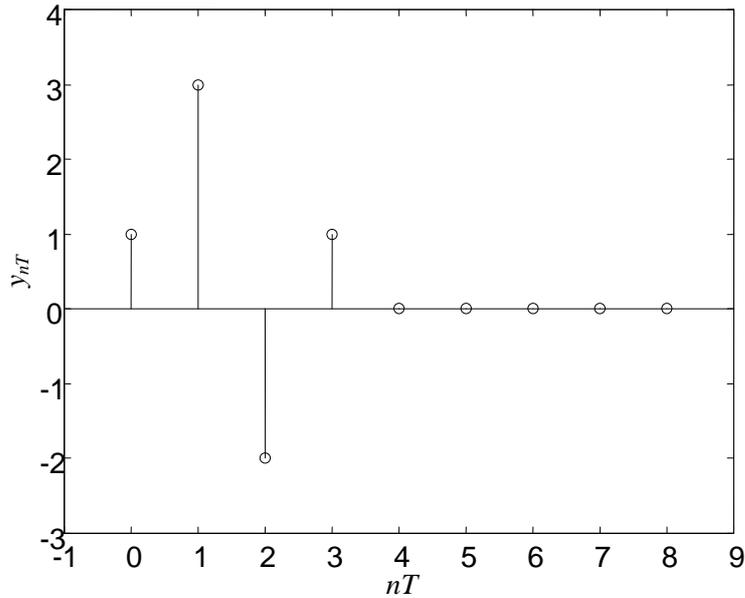


Figura 5.1.

En esta sección se analiza cómo puede diseñarse un compensador digital a los efectos de obtener una función de transferencia de lazo cerrado que presente esta característica.

Se supondrán las siguientes especificaciones para el diseño:

- la transferencia de lazo cerrado $T(z)$ debe corresponder a un sistema de respuesta impulsional finita, debiendo extinguirse su respuesta transitoria (correspondiente a los instantes de muestreo) en el menor tiempo posible. Es importante destacar que en principio, el planteo que se propone sólo asegura lo que sucede en los instantes de muestreo,
- el error de estado estacionario a una determinada excitación debe estar acotado a $e_{m\acute{a}x}$,
- la señal de comando u_{nT} debe estar acotada en un valor $u_{m\acute{a}x}$,

La transferencia del sistema de lazo cerrado es:

$$T(z) = \frac{D(z)(1-z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}}{1 + D(z)(1-z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}}. \quad (5-4)$$

A los efectos de simplificar las expresiones definimos:

$$G(z) = (1-z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}, \quad (5-5)$$

luego

$$T(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)}. \quad (5-6)$$

Para cumplir con la especificación a), todas las raíces de la expresión $(1+D(z)G(z))$ deben estar en el origen. Es decir, que el denominador de $T(z)$ debe ser de la forma :

$$1 + D(z)G(z) = \frac{z^n}{pol(z)} \quad (5-7)$$

siendo $pol(z)$ un polinomio en z y n un entero que determina el número de muestras en que se agota el transitorio.

Si la ecuación (5-7) es reemplazada en la (5-6), se observa que efectivamente $T(z)$ es una transferencia de respuesta impulsional finita.

$$T(z) = \frac{z^n - pol(z)}{z^n}. \quad (5-8)$$

La expresión del controlador puede despejarse de la ecuación (5-7):

$$D(z) = \frac{z^n - pol(z)}{pol(z)} \frac{1}{G(z)}. \quad (5-9)$$

A partir de esta ecuación se pone de manifiesto que para que $D(z)$ pueda ser implementado, el orden de $pol(z)$ no puede ser otro que n (tener presente que, siempre la transferencia digital que corresponde al conjunto reconstuctor y el sistema $G(s)$ tiene sólo un polo más que el número de ceros).

A los efectos de determinar el polinomio $pol(z)$ más adecuado pueden evaluarse los siguientes aspectos:

- a) la elección de $pol(z)$ influye sobre el error de estado estacionario
- b) los coeficientes del polinomio $pol(z)$ (con excepción del primero) corresponden a los valores de las muestras de salida durante el comportamiento transitorio (respuesta impulsional)
- c) existe un compromiso entre las especificaciones de comportamiento transitorio, y la acción de control disponible.

Analicemos cómo influye $pol(z)$ sobre el error de estado estacionario. El error está definido por:

$$E(z) = R(z) - Y(z) = R(z) \cdot [1 - T(z)], \quad (5-10)$$

luego, reemplazando (5-8) en (5-10), resulta

$$E(z) = R(z) \frac{pol(z)}{z^n}. \quad (5-11)$$

Para una secuencia de entrada escalón unitario

$$R(z) = \frac{z}{z-1}, \quad (5-12)$$

la transformada de la secuencia de muestras correspondiente al error resulta:

$$E(z) = \frac{z}{z-1} \frac{pol(z)}{z^n}. \quad (5-13)$$

Luego el error de estado estacionario es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{pol(z)}{z^n} \quad (5-14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = \lim_{z \rightarrow 1} pol(z). \quad (5-15)$$

De la expresión anterior resulta obvia la conveniencia de elegir $pol(z)$ de manera que contenga un factor de la forma $(z-1)$. Este análisis puede extenderse sin mayores complicaciones a otros tipos de excitaciones.

El otro factor predominante para elegir $pol(z)$ es el comportamiento transitorio deseado ya que los coeficientes de $pol(z)$ están íntimamente ligados a la respuesta transitoria.

Una vez concluido el primer diseño debe verificarse que, debido a las exigencias en cuanto al comportamiento transitorio, la amplitud de la señal de comando no supere el valor máximo $u_{m\acute{a}x}$ (especificación c). De ser este el caso, se deberían disminuir las demandas en cuanto al comportamiento transitorio eligiendo un n mayor. Dicha verificación puede ser realizada por cálculo o simulación teniendo presente que:

$$U(z) = \frac{D(z)}{1 + D(z)G(z)} R(z) \quad (5-16)$$

Pese a que el diseño propuesto asegura que luego de n muestras, la salida iguala a la referencia en los instantes de muestreo, podría haber la posibilidad de que la señal continua de salida estuviese oscilando a una frecuencia igual a la mitad de la de muestreo. Esta situación puede ser detectada a partir de analizar las muestras de la acción de control u_{nT} (tener presente que la señal $u(t)$ es constante entre las muestras).

Ejemplo 2.

Un motor de corriente continua (ecuación de transferencia (5-17)) es empleado para el control de velocidad de una cinta transportadora. Se pretende diseñar un controlador digital $D(z)$ que permita que el sistema alcance el estado estacionario en el menor tiempo posible, con error de estado estacionario nulo ante excitaciones constantes. El accionador de potencia tiene una ganancia de 10, no pudiendo trabajar con tensiones de entrada superiores a los 5 volts.

Usualmente, desde el punto de vista práctico, el efecto de la constante de tiempo asociada al polo eléctrico puede ser despreciado frente al correspondiente al de la constante de tiempo mecánica, en particular si se hace control de par. Esta simplificación ha sido realizada en la ecuación (5-17).

$$G(s) \cong \frac{K}{J \cdot s + F} = \frac{0.14}{3 \cdot s + 1} \quad (5-17)$$

con:

J = momento de inercia del eje del rotor y de la carga.

F = coeficiente de fricción viscosa del motor y de la carga.

$K = k_f \cdot i_f \cdot k$

k_f = constante de proporcionalidad entre la corriente de campo i_f y el flujo.

La transferencia digital $G(z)$ (correspondiente al reconstructor, actuador y motor) para $T=0.2$ seg. resulta:

$$G(z) = \frac{0.09}{z - 0.935} \quad (5-18)$$

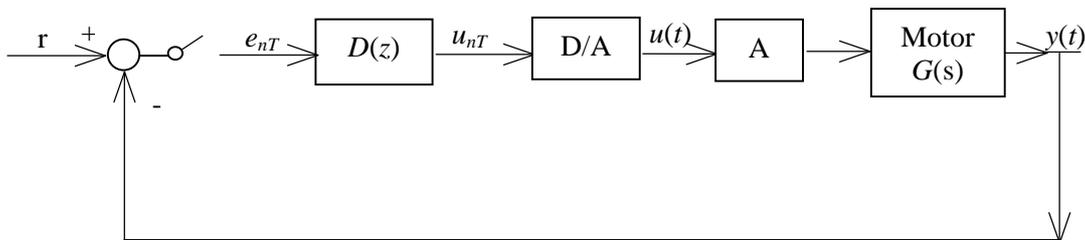


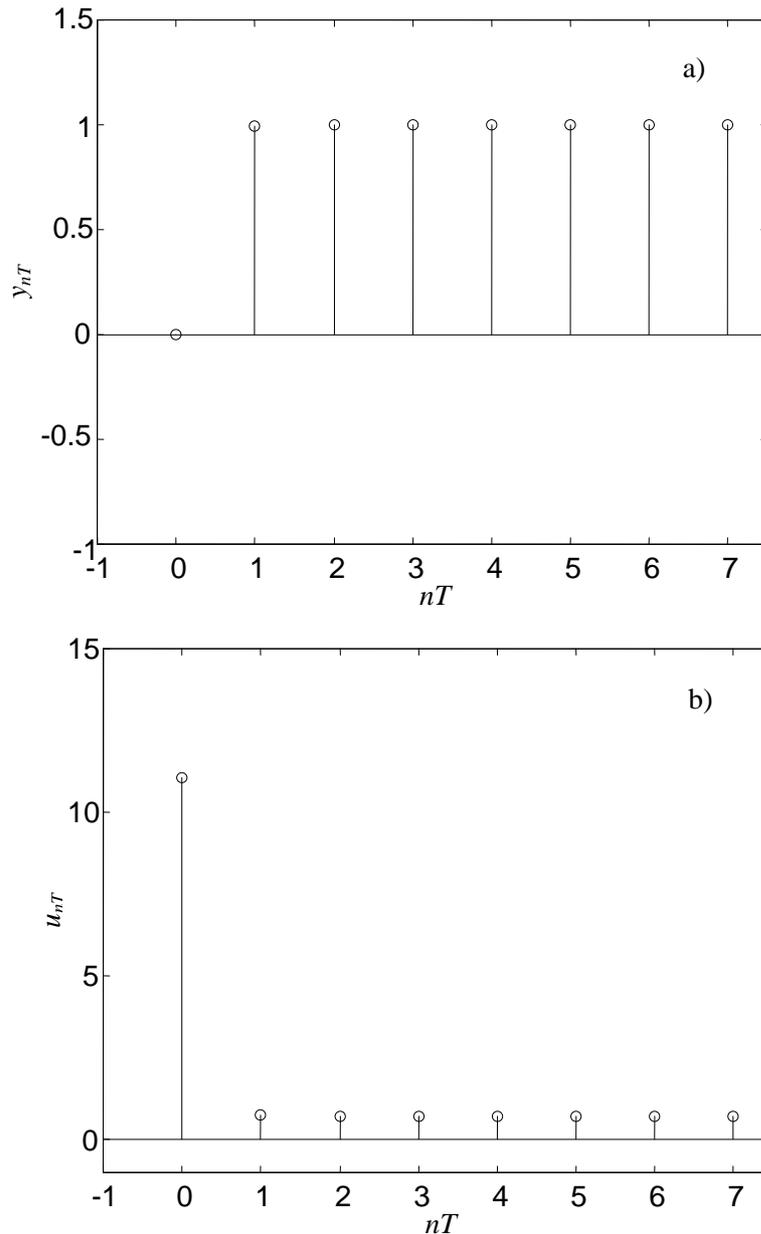
Figura 5.2

De acuerdo a la discusión previa puede elegirse $n=1$ y $pol(z)=(z-1)$ a los efectos de que el estado estacionario se alcance en sólo una muestra y con error nulo. Según la ecuación (5-9) el controlador digital resulta:

$$D(z) = \frac{11.07 (z - 0.935)}{(z - 1)} \quad (5-19)$$

En la figura 5.3a puede observarse que efectivamente, cuando se emplea el controlador de la ecuación (5-19), la variable controlada alcanza el estado estacionario luego de una muestra.

Este comportamiento transitorio óptimo puede alcanzarse sólo si el accionador de potencia es capaz de entregar la energía necesaria. En la figura 5.3b se observa la acción de control u_{nT} , la cual es superior a la permitida en nuestro problema.



Figuras 5.3 a) y_{nT} para $(n=1)$. b) u_{nT}

A los efectos de poder cumplir que $u_{nT} < u_{m\acute{a}x}$ el dise\~{n}ador podr\~{a} reducir sus exigencias desde el punto de vista transitorio.

Con esta finalidad puede elegirse $n > 1$ y $pol(z)$ otro polinomio (siempre manteniendo un factor de la forma $(z-1)$ para anular el error de estado estacionario). Por ejemplo, si se elige $n=3$ y $pol(z)=(z^3-0.3z^2-0.3z-0.4)$ resulta un controlador:

$$D(z) = \frac{11.11 (0.3z^2 + 0.3z + 0.4)(z - 0.935)}{(z^3 - 0.3z^2 - 0.3z - 0.4)} \quad (5-20)$$

Las variables controladas y de control para este caso pueden ser observadas en las figuras 5.4a y b respectivamente.

Obsérvese la relación entre los valores de las muestras de la señal controlada y los de los coeficientes de $pol(z)$.

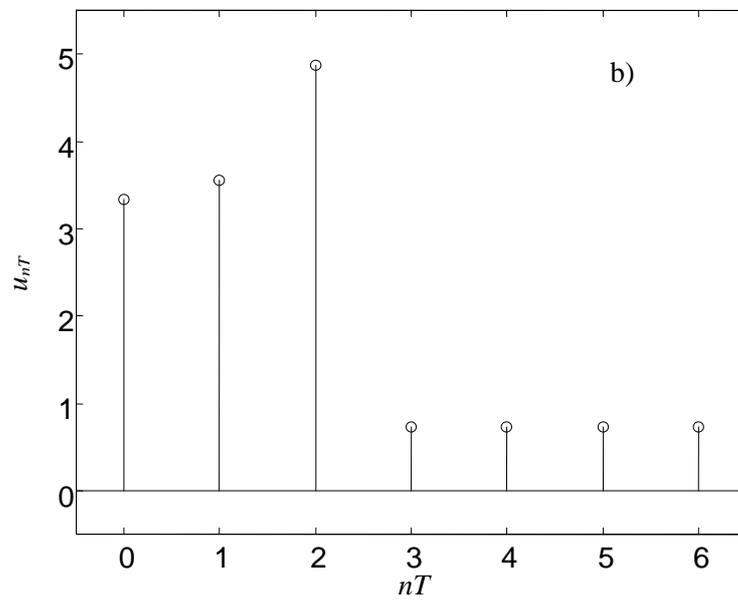
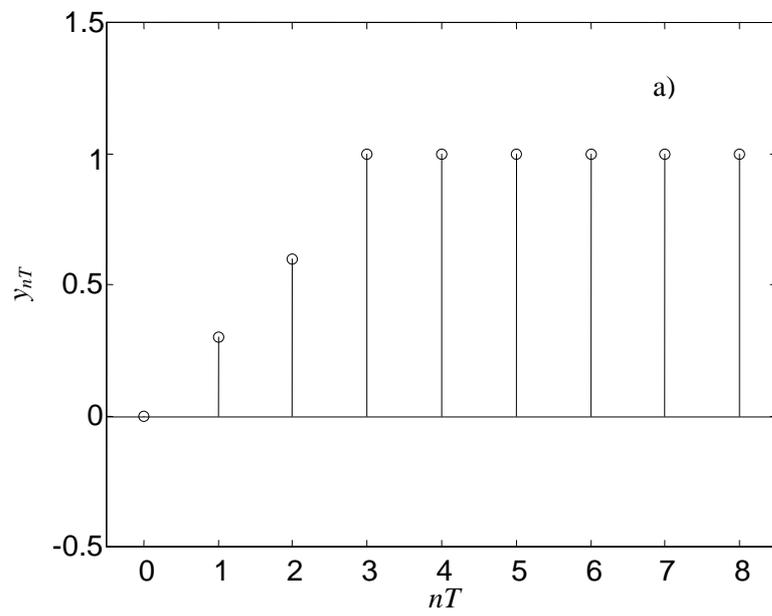


Figura 5.4. a) y_{nT} para ($n=3$). b) u_{nT}

V.3. DISEÑO DE CONTROLADORES DIGITALES POR APROXIMACIÓN DE CONTROLADORES ANALÓGICOS.

El diseño de un controlador digital suele ser realizado empleando técnicas de análisis y diseño propias de sistemas muestreados (como la discutida en la sección previa).

Potencialmente, estas técnicas permiten obtener controles más versátiles que los que se pueden conseguir con compensadores analógicos. Sin embargo, existen aplicaciones donde los controladores analógicos han demostrado trabajar satisfactoriamente, razón por la cual en muchas de estas aplicaciones se prefiere diseñar los controladores digitales como aproximación de los controladores analógicos (figura 5-5). Este es, por ejemplo, el caso del controlador PID (controlador de acción proporcional, integral y derivativa) cuya implementación digital es sólo una aproximación numérica de la ecuación integro-diferencial de su versión analógica (ecuación (5-21)).

$$u(t) = K_p \left\{ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{d e(t)}{d t} \right\}, \quad (5-21)$$

donde:

K_p es la ganancia proporcional (100/Banda proporcional)

T_i es el tiempo integral

T_d es el tiempo derivativo

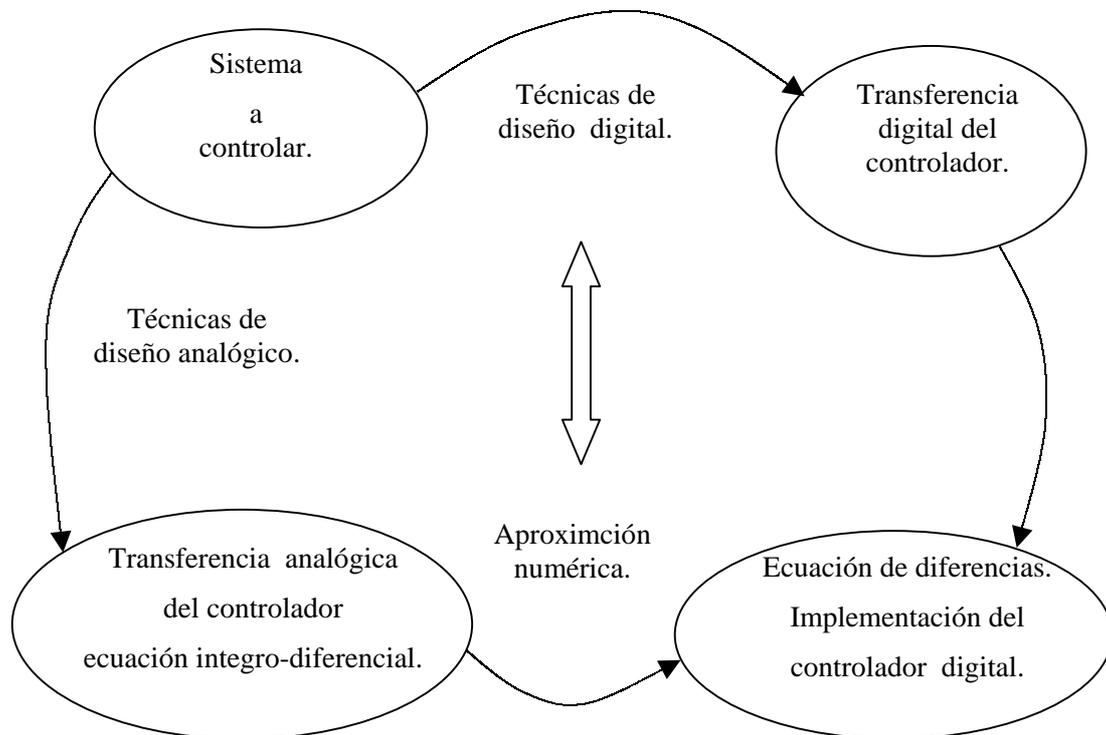


Figura 5-5.

V.3.1. APROXIMACIONES NUMÉRICAS.

A continuación citamos algunas de las aproximaciones numéricas más comúnmente empleadas para aproximar la integración y la diferenciación.

1-integral

a) *Regla rectangular hacia delante.* Según esta regla, la integral (5-22), es decir el arrea bajo la curva $e(t)$ (figura 5-6), puede ser aproximada por la sumatoria (5-23).

$$u(t) = \int_0^t e(t) dt \quad (5-22)$$

$$u_{nT} = T \sum_{i=0}^{n-1} e_{iT} \cdot \quad (5-23)$$

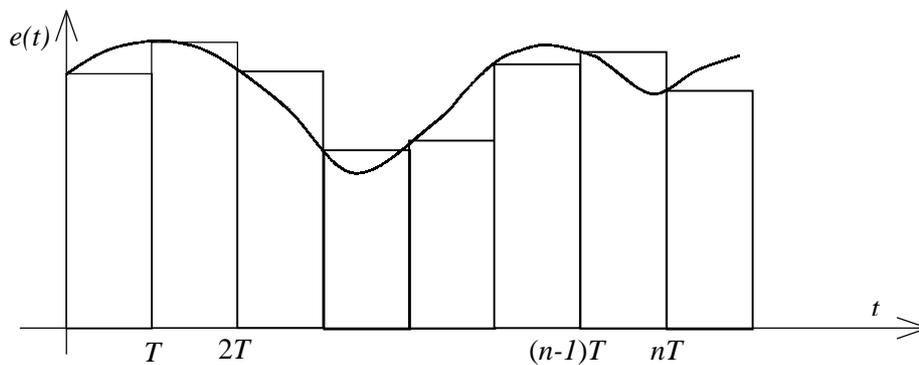


Figura 5-6 Aproximación de la integral por la "regla rectangular a izquierda".

La ecuación (5-23) (conocida como "algoritmo de posición") no es útil para su aplicación directa ya que requiere almacenar todas las muestras pesadas de una señal para aproximar la integral en el instante $t=nT$. Normalmente se emplea el algoritmo recursivo denominado "de velocidad" en el que sólo es necesario almacenar algunas muestras. A partir de la ecuación (5-23) es:

$$u_{nT} = T \sum_{i=0}^{n-2} e_{iT} + T e_{(n-1)T} \cdot \quad (5-24)$$

Esta expresión puede reducirse aplicando nuevamente la ecuación (5-23) a:

$$u_{nT} = u_{(n-1)T} + T e_{(n-1)T} \quad (5-25)$$

La ecuación (5-25) es de aplicación inmediata y requiere solamente la utilización de la última muestra de la señal $e_{(n-1)T}$ y del resultado de la integral en el paso previo $u_{(n-1)T}$.

Según esta regla de aproximación numérica, la transferencia digital de un integrador resulta:

$$\frac{U(z)}{E(z)} \cong \frac{T z^{-1}}{1 - z^{-1}}, \quad (5-26)$$

que si se vincula con la función de transferencia de un integrador analógico, implicaría que existe una transformación entre planos dada por:

$$s \cong \frac{1 - z^{-1}}{T z^{-1}}. \quad (5-27)$$

b) *Regla rectangular hacia atrás.* Según esta regla, la integral (5-22) es aproximada por la ecuación (5-28) (figura 5-7).

$$u_{nT} = T \sum_{i=1}^n e_{iT}, \quad (5-28)$$

luego

$$u_{nT} = T \sum_{i=1}^{n-1} e_{iT} + T e_{nT} \quad (5-29)$$

$$u_{nT} = u_{(n-1)T} + T e_{nT}. \quad (5-30)$$

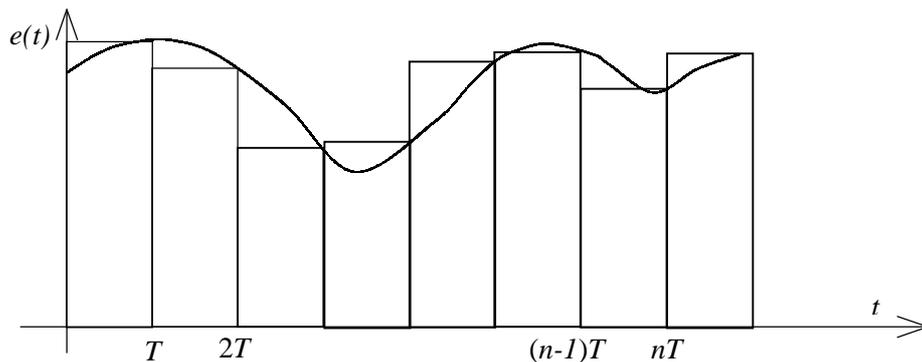


Figura 5.7. Aproximación de la integral por la "regla rectangular a la derecha".

La diferencia con el caso anterior (ecuación (5-25)) radica en que se utiliza la muestra actual de la señal e_{nT} en lugar de la muestra anterior $e_{(n-1)T}$. Luego la función de transferencia digital de un integrador es aproximada por:

$$\frac{U(z)}{E(z)} \cong \frac{T}{1-z^{-1}}.$$

Expresión que si se vincula con la correspondiente a la función de transferencia de un integrador analógico resulta:

$$s \cong \frac{1-z^{-1}}{T}. \quad (5-31)$$

c) *Regla trapezoidal.* Según esta regla, la integral (5-2) es aproximada por la ecuación (5-32) (figura 5.8).

$$u_{nT} = \frac{T}{2} \sum_{i=1}^n (e_{(i-1)T} + e_{iT}), \quad (5-32)$$

luego:

$$u_{nT} = u_{(n-1)T} + \frac{T}{2} (e_{nT} + e_{(n-1)T}). \quad (5-33)$$

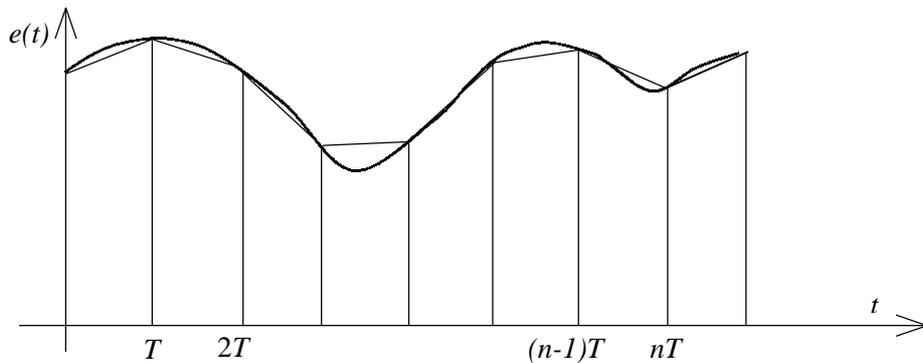


Figura 5.8. Aproximación de la integral por la "regla trapezoidal".

Esta regla (ecuación (5-33)) utiliza para el cálculo de la integral en el instante nT el resultado de la integral en el paso previo ($u_{(n-1)T}$) y los valores actual (e_{nT}) y previo ($e_{(n-1)T}$) de la señal. Luego, a través de esta aproximación, la función de transferencia de un integrador digital resulta:

$$\frac{U(z)}{E(z)} \cong \frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}.$$

De acuerdo a la aproximación empleada sería válida la siguiente transformación:

$$s \cong \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \quad (5-34)$$

- diferenciación

Diferenciación hacia atrás. Esta es la diferenciación más difundida para aproximar la derivada de una señal. La misma está dada por:

$$\frac{d e(t)}{dt} \cong \frac{e(t) - e(t-T)}{T} \quad (5-35)$$

$$\left. \frac{d e(t)}{dt} \right|_{t=nT} \cong \frac{e_{nT} - e_{(n-1)T}}{T}. \quad (5-36)$$

La expresión (5-36) sólo requiere, para aproximar el valor de la derivada de una señal en un dado instante de tiempo (nT) el conocimiento del valor de la señal en dicho instante (e_{nT}) y en el instante de muestreo previo ($e_{(n-1)T}$) (figura 5.9).

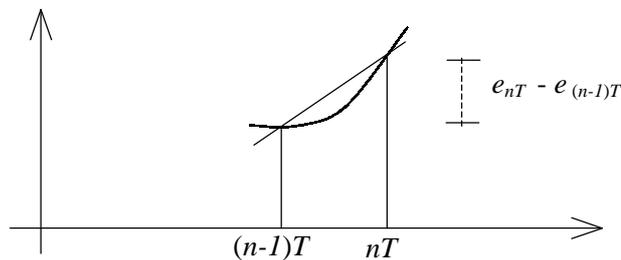


Figura 5.9. Aproximación de la derivada.

Luego, esta aproximación implica:

$$s \cong \frac{1 - z^{-1}}{T}. \quad (5-37)$$

expresión coincidente con la ecuación (5-31).

Las aproximaciones anteriores son las más empleadas para discretizar la ecuación integro-diferencial del controlador. Obviamente, todas tienen un comportamiento apto en la medida que el período de muestreo sea chico frente a la dinámica del proceso bajo control, condición que generalmente se verifica en procesos industriales.

Ejemplo 3.

La ecuación integro-diferencial del controlador PID analógico es:

$$u(t) = K_p \left\{ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{d e(t)}{dt} \right\}. \quad (5-38)$$

Si para su discretización se utiliza la expresión (5-25) para la acción integral y la (5-36) para la acción derivativa, se obtiene:

$$u_{nT} = u_{(n-1)T} + k_1 \cdot e_{nT} + k_2 \cdot e_{(n-1)T} + k_3 \cdot e_{(n-2)T}, \quad (5-39)$$

con

$$\begin{aligned} k_1 &= K_p \left(1 + \frac{T_d}{T} \right) \\ k_2 &= -K_p \left(1 + \frac{2T_d}{T} - \frac{T}{T_i} \right) \\ k_3 &= K_p \frac{T_d}{T}. \end{aligned} \quad (5-40)$$

Observe que en la ecuación (5-39) el término $u_{(n-1)T}$ incluye las acciones proporcional y derivativa calculadas en el instante $(n-1)T$.

Si, para discretizar la ecuación del PID, en lugar de la ecuación (5-25) se emplea para la acción integral la ecuación (5-33) resulta:

$$u_{nT} = u_{(n-1)T} + k_1^* \cdot e_{nT} + k_2^* \cdot e_{(n-1)T} + k_3^* \cdot e_{(n-2)T}, \quad (5-41)$$

con:

$$\begin{aligned} k_1^* &= K_p \left(1 + \frac{T_d}{T} + \frac{T}{2T_i} \right) \\ k_2^* &= -K_p \left(1 + \frac{2T_d}{T} - \frac{T}{2T_i} \right) \\ k_3^* &= K_p \frac{T_d}{T}. \end{aligned} \quad (5-42)$$

Aún bajo la suposición de que la aproximación del controlador digital es lo suficientemente buena, el comportamiento del sistema de lazo cerrado compensado digitalmente puede diferir del correspondiente al sistema de lazo cerrado puramente analógico. Esto es debido al efecto del muestreador y reconstructor de señal, los cuales no han sido incluidos en la aproximación.

En una sección previa se demostró que es posible modelar el conjunto muestreador re-constructor de señal por un retardo puro de medio período de muestreo. A su vez este retardo puede ser aproximado por una serie truncada del desarrollo en serie de la exponencial $e^{-sT/2}$. Así por ejemplo, el conjunto muestreador re-constructor podría modelarse por:

$$e^{-sT/2} \cong \frac{1}{\frac{sT}{2} + 1}. \quad (5-43)$$

Si la locación de este polo, se encuentra lejana con respecto a la de los polos dominantes del sistema a compensar, no habrá diferencias significativas entre las repuestas de los dos lazos de control. Si en cambio, este polo se encuentra próximo a los polos del sistema a lazo abierto, habrá que diseñar el controlador analógico teniendo en cuenta este polo.

V.4. COMPENSACIÓN MEDIANTE LA TÉCNICA DEL LUGAR DE RAÍCES.

V.4.1 COMPENSADOR POR RETRASO DE FASE.

El compensador por retraso de fase es empleado, en forma análoga a sistemas continuos, para reducir el error de estado estacionario. Su estructura es de la forma:

$$D(z) = K_d \frac{z - z_0}{z - z_p}, \quad (5-44)$$

con $z_0 < z_p$ y $0 < z_p \leq 1$.

Luego, la ganancia de lazo abierto es de la forma:

$$D(z)G(z) = K_d \frac{z - z_0}{z - z_p} G(z). \quad (5-45)$$

Como ha sido comentado en secciones previas, el error de estado estacionario se encuentra asociado en forma inversa al límite de la ecuación (5-45) cuando $z \rightarrow 1$ (es decir $\omega \rightarrow 0$).

Resulta obvio que si se elige el polo del compensador en $z=1$, se aumenta en uno el tipo del sistema, se anula el error de estado estacionario a una determinada excitación y se reduce el correspondiente a una excitación de mayor orden. Esto, en un sistema analógico, corresponde a poner una acción integral pura en el controlador, es decir un polo en $s=0$. A diferencia de lo que sucede en sistemas continuos, donde un integrador ideal no puede ser implementado, en sistemas discretos no existe dificultad para implementar una transferencia digital con un polo en $z=1$, ya que esto se reduce a poner el coeficiente adecuado en una ecuación recursiva.

A los efectos de que la inclusión del polo en $z=1$ del controlador no afecte la estabilidad relativa del sistema de lazo cerrado debe localizarse el cero del controlador en las proximidades de este polo.

V.4.2. COMPENSADOR POR ADELANTO DE FASE.

Este compensador es de la misma forma que el compensador por retraso de fase (ecuación (5-44)) pero con la condición que $0 < z_p < z_0 \leq 1$. Es empleado cuando se quiere mejorar el comportamiento transitorio, no difiriendo la metodología de diseño de la del caso analógico. Efectivamente, el diseño se reduce a:

a) de acuerdo a las especificaciones temporales, se elige la locación de los polos dominantes (z_1, z_2) del sistema a lazo cerrado,

b) se verifica si el lugar de raíces pasa por dichos puntos, a los efectos de ver si es posible cumplir las especificaciones con un controlador de acción únicamente proporcional,

c) si no se verifica la condición anterior, se determina el aporte de fase necesario que debe introducir el compensador a los efectos de que el lugar de raíces pase por los puntos z_1 y z_2 :

$$\angle D(z_1) = -180^\circ - \angle G(z_1), \quad (5-46)$$

d) se elige la localización del par polo-cero para verificar la condición anterior,

e) se ajusta la ganancia del controlador para verificar la condición de módulo

$$|D(z_1)G(z_1)| = 1. \quad (5-47)$$

Ejemplo 4.

Supóngase el sistema:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}. \quad (5-48)$$

Basados en especificaciones de respuesta temporal, se desea que el sistema a lazo cerrado presente dos polos dominantes con coeficiente de amortiguamiento $\xi = 0,7$ y pulsación natural $\omega_n = 2$ rad/seg.

Si se elige $T = 0,1$ seg., resulta:

$$T = 0,1 \text{ seg. ;} \quad G(z) = \frac{0,00484 z + 0,00468}{(z-1)(z-0,905)} \quad (5-49)$$

Para el diseño se procede a:

a) De acuerdo a las especificaciones, los polos de lazo cerrado deben localizarse en:

$$z_1, z_2 = 0,86 \pm j 0,125$$

b) En la figura 5.10 se muestra el diagrama del lugar de raíces para el caso en que se emplea un controlador proporcional puro.

Como este diagrama no pasa por los puntos z_1 y z_2 , se diseña un controlador por adelanto de fase a los efectos de verificar las especificaciones.

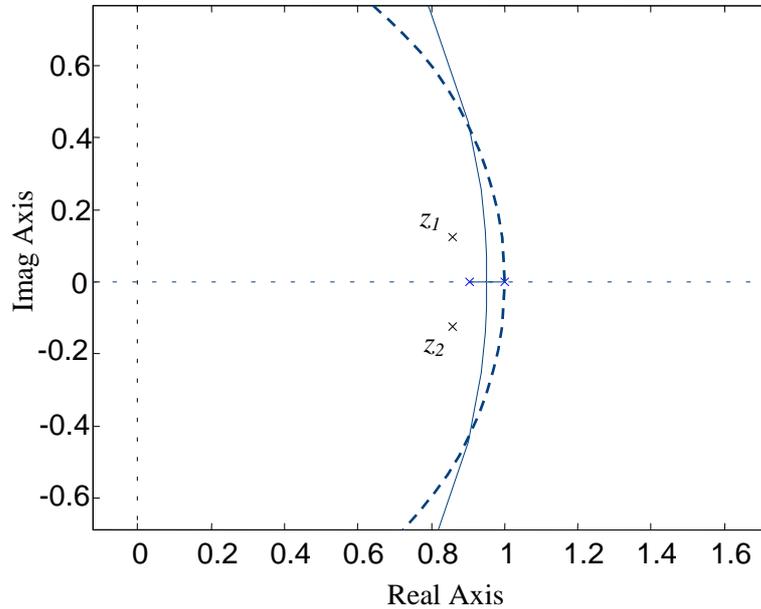


Figura 5.10 Lugar de raíces del sistema con controlador proporcional puro.

c) El aporte de fase del compensador resulta:

$$\angle D(z_1) = -180^\circ - \angle G(z_1) = 64^\circ.$$

d) Evidentemente, es necesario utilizar un compensador por adelanto de fase. El diseño se realiza fijando la posición del cero $z_0=0,9$ y calculando la posición del polo para que el aporte de fase sea de 64° . De ese modo se obtiene:

$$D(z) = \frac{z - 0,9}{z - 0,73}.$$

e) El diagrama del lugar de las raíces correspondiente al sistema compensado ($G(z)D(z)$) se ha representado en la figura 5.11.

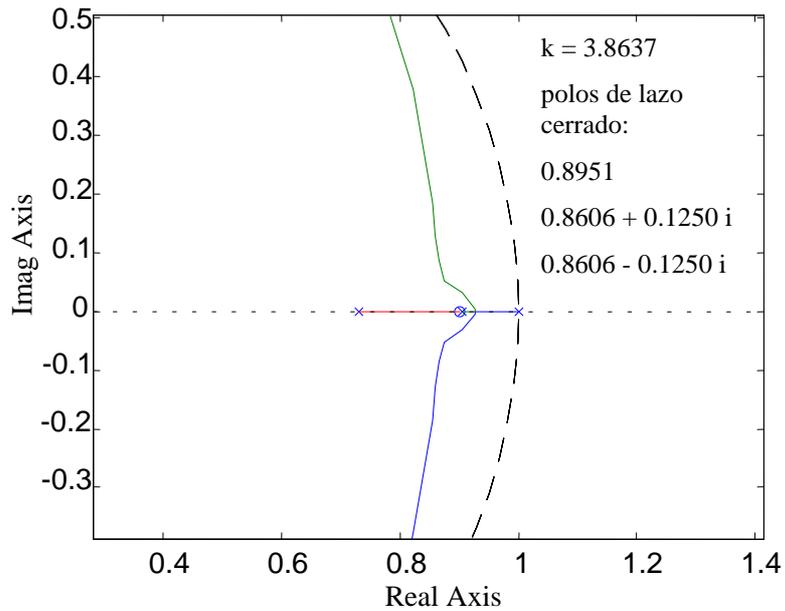


Figura 5.11. Lugar de raíces del sistema compensado.

Se observa en la figura que el diagrama pasa por los puntos z_1 y z_2 para una ganancia del compensador de valor $K_d=3,8637$. De modo que la expresión final del compensador está dada por:

$$D(z) = 3,8637 \frac{z - 0,9}{z - 0,73}$$

En la figura 5.12 se ha representado la respuesta del sistema compensado a lazo cerrado frente a una excitación escalón unitario.

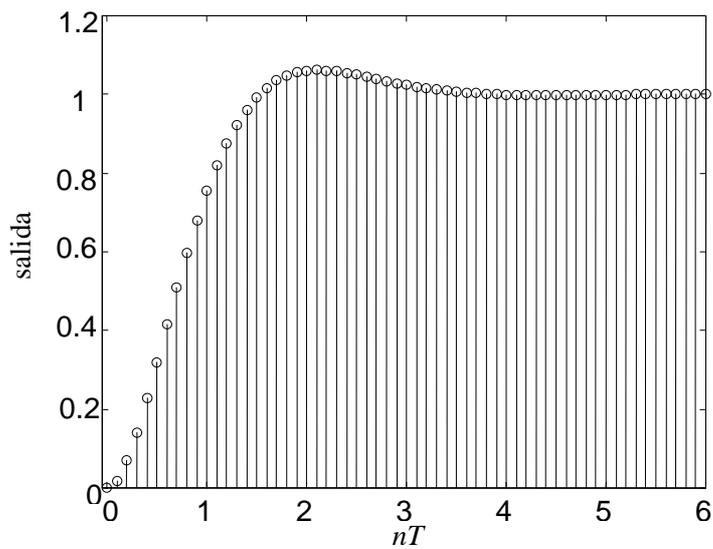


Figura 5.12. Respuesta al escalón del sistema compensado.

V.5. COMPENSACIÓN EN EL DOMINIO w .

Como ya se ha discutido, pueden emplearse las ideas de compensación por retraso y adelanto de fase para mejorar las características de un sistema muestreado de lazo cerrado. En forma análoga al caso de controladores de tiempo continuo, estos compensadores pueden expresarse en el dominio z a través de:

$$D(z) = K_d \frac{z - z_0}{z - z_p} \quad (5-50)$$

En sistemas continuos, el diseño de este tipo de controladores suele ser realizado a partir de la respuesta en frecuencia del sistema a controlar, en base a especificaciones de márgenes de fase y ganancia, y a los coeficientes de error. El diseño se ve favorecido por la posibilidad de levantar la respuesta en frecuencia por medio de los diagramas de Bode. Esta facilidad no es accesible en el dominio de la variable z .

Sin embargo, la misma metodología de diseño empleada para los sistemas continuos puede ser empleada en sistemas discretos si estos son analizados en el dominio w . A este efecto debe obtenerse $G(w)$ a partir de reemplazar

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w} \quad (5-51)$$

en la expresión de la función de transferencia $G(z)$. Posteriormente puede obtenerse la respuesta en frecuencia en forma aproximada a través de los diagramas de Bode y proceder en forma completamente análoga al diseño clásico de compensadores continuos. A partir de esta metodología es obtenido el compensador en el dominio w :

$$D(w) = \frac{1 + \frac{w}{w_0}}{1 + \frac{w}{w_p}} \quad (5-52)$$

siendo, ahora, necesario obtener el equivalente en el dominio z :

$$D(z) = \frac{1 + \frac{w}{w_0}}{1 + \frac{w}{w_p}} \bigg|_{w=T(z-1)/2(z+1)} \quad (5-53)$$

$$D(z) = \frac{w_p (w_0 + 2/T)}{w_0 (w_p + 2/T)} \frac{z + \frac{(w_0 - 2/T)}{(w_0 + 2/T)}}{z + \frac{(w_p - 2/T)}{(w_p + 2/T)}}, \quad (5-54)$$

es decir que

$$K_d = \frac{w_p (w_0 + 2/T)}{w_0 (w_p + 2/T)} \quad (5-55)$$

$$z_0 = -\frac{(w_0 - 2/T)}{(w_0 + 2/T)} \quad (5-56)$$

$$z_p = -\frac{(w_p - 2/T)}{(w_p + 2/T)}. \quad (5-57)$$

Ejemplo 4.

Se desea controlar digitalmente la mano de un brazo robótico la cual debe sujetar y transportar frágiles vasos de vidrio de diferentes tamaños. El objetivo es diseñar el servomecanismo digital que controla el movimiento en una dirección del sistema de sujeción. Un diagrama esquemático de la mano artificial, que es accionada mediante un motor de corriente continua, se ha representado en la figura 5.13.

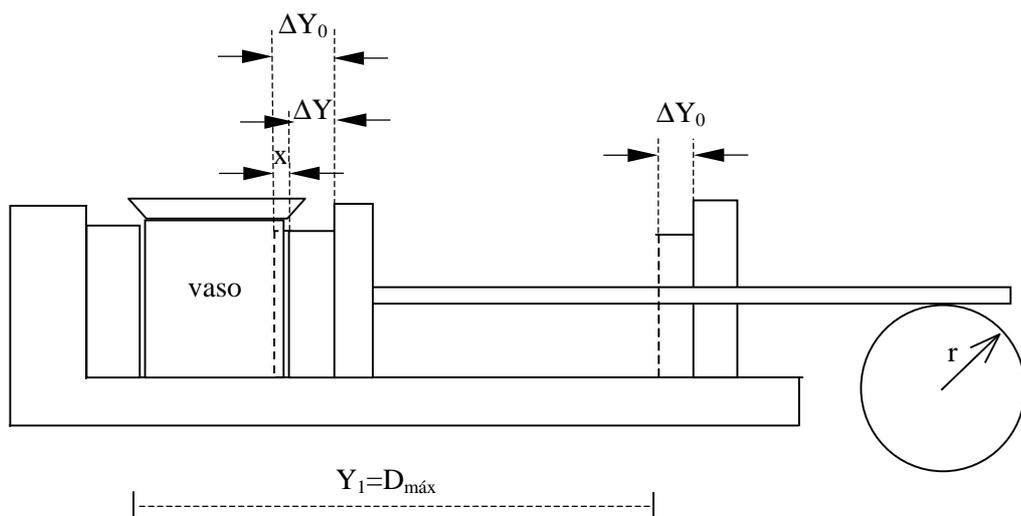


Figura 5.13. Diagrama esquemático de la mano artificial.

Para sostener firmemente el vaso de vidrio, sin romperlo, el soporte está recubierto por una banda elástica la cual debe comprimirse entre $X=5\text{mm}$ y $X=6\text{mm}$. Un sensor de presión permite determinar el espesor de la banda elástica con una precisión de $0,1\text{mm}$. El diámetro del vaso es desconocido, pero el diámetro máximo es de $0,2\text{m}$. El movimiento de cierre debe ser rápido y suave, el tiempo entre arranque y parada debe ser del orden de $0,5\text{ seg.}$ y no puede utilizarse ningún sistema mecánico como ser embrague o freno.

El movimiento mecánico debe realizarse en tres etapas a saber: aceleración, desaceleración y posicionamiento.

- Aceleración:

Durante esta etapa, el sistema de accionamiento cerrará la mano a aceleración constante hasta que el sensor de presión contacta al vaso. La posición inicial de la mano abierta es igual diámetro máximo de $0,2\text{m}$.

- Desaceleración:

Esta etapa comienza cuando el sensor de presión toca al vaso de vidrio y termina cuando se detiene la operación de cierre. La distancia de frenado es de $X \leq 5\text{mm}$.

- Posicionamiento:

El servomecanismo de posición establece la posición final del sistema de sujeción que es del orden de $X \cong 5,2\text{ mm}$. Este valor se obtiene teniendo en cuenta que el sistema se detiene cuando la variable medida alcanza 5mm y que ambos, precisión del sensor y zona muerta del lazo de control son de $0,1\text{mm}$.

El sobrepaso máximo admisible será de:

$$M = \frac{6 - 5,2}{5,2} = 15\% . \quad (5-58)$$

El diagrama en bloques del sistema en lazo cerrado se ha indicado en la figura 5.14. $D(z)$ representa al controlador digital, K_I al amplificador de potencia, K_T la constante del motor cuyos polos se suponen despreciables, T_F el valor estimado de la fricción coulombiana, $G(s)$ la planta a controlar y K_0 la ganancia del sensor de presión.

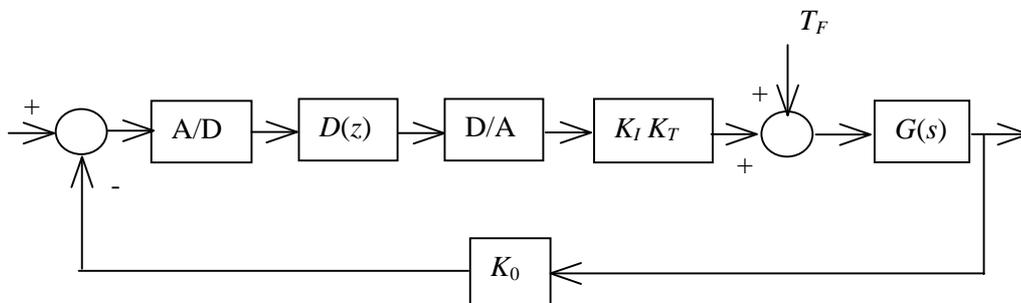


Figura 5.14. Diagrama en bloques del sistema a lazo cerrado.

Se supone que no existe roce viscoso, de modo que la función de transferencia de la planta se obtiene por aplicación directa de la segunda ley de Newton.

$$G(s) = \frac{1}{r m s^2}, \quad (5-59)$$

donde r representa el radio de la polea ($r=0,015\text{m}$) y m la masa del brazo móvil ($m=1\text{Kg.}$)

Las especificaciones son las siguientes:

Aceleración:

$$a_1 = 2 Y_1 / t_1^2 = 1,6 \text{ m/s}^2. \quad (5-60)$$

Velocidad máxima:

$$V_m = a_1 t_1 = 0,8 \text{ m/s}. \quad (5-61)$$

Desaceleración:

$$a_2 = \frac{V_m^2}{2 \times 5 \text{ mm}} = 64 \text{ m/s}^2. \quad (5-62)$$

El radio de la polea es de $r=0,015\text{m}$ de modo que la cupla de frenado debe ser de:

$$T_1 = r m a_2 = 0,015 \times 1 \times 64 = 0,95 \text{ Nm} \quad (5-63)$$

Se elige un motor cuya cupla máxima es de $T_m=1,2 \text{ Nm}$ y su constante es de $K_T=0,3 \text{ Nm/A}$. Se elige un amplificador de potencia de ganancia $K_I=1 \text{ A/V}$ cuya saturación es de $I_m=T_m/K_T=4\text{A}$.

Dado que la zona muerta de sistema debe ser de $0,1\text{mm}$, la ganancia del controlador debe ser de:

$$K_c = \frac{T_F}{ZM K_0 K_I K_T} = 0,4. \quad (5-64)$$

La función de transferencia de lazo abierto, empleando un controlador proporcional, está dada por:

$$G(z) = K_1 (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{1}{s^3} \right\}, \quad (5-65)$$

donde $K_1 = K_0 K_c K_I K_T / (r m) = 6.640 \text{ 1/s}^2$.

A partir de las tablas de transformada z se obtiene:

$$G(z) = \frac{K_1 T^2 (z + 1)}{2 (z - 1)^2}. \quad (5-66)$$

Si se elige un período de muestreo de $T=1,4 \text{ ms.}$, se obtiene:

$$G(z) = 6,5 \times 10^{-3} \frac{(z + 1)}{(z - 1)^2}. \quad (5-67)$$

El análisis de la estabilidad y el diseño de la compensación se realizará empleando los diagramas de Bode en plano w .

La función de transferencia de lazo abierto en el plano w está dada por:

$$G(w) = -6640 \frac{(-1 + 0.0007w)}{w^2}. \quad (5-68)$$

Los diagramas de Bode correspondientes a la expresión anterior se han representado en la figura 5.15.

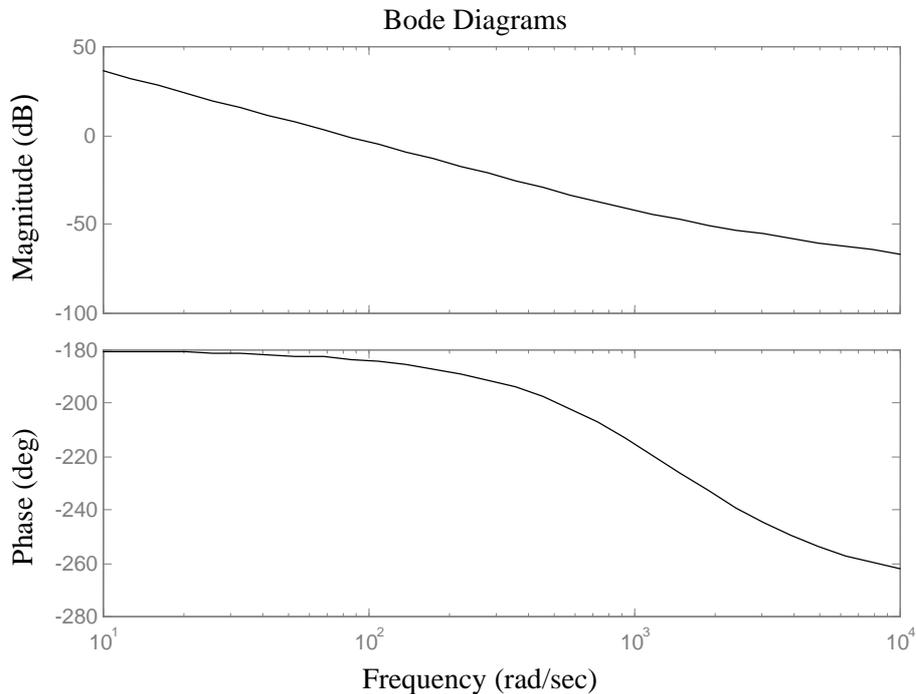


Figura 5.15. Diagramas de Bode del sistema sin compensar a lazo abierto en el plano w .

Del análisis de la figura se deduce que el sistema sin compensar (compensación solamente proporcional) es inestable. En efecto, ambos márgenes de ganancia (MG) y fase (MF) son negativos y el margen de ganancia alcanza una magnitud ilimitada. Obsérvese que el cero introduce una rotación de fase negativa debido a que se trata de un cero de no mínima fase.

El máximo sobrepaso permitido para la respuesta al escalón del sistema en lazo cerrado es del 15%. Suponiendo que el comportamiento del sistema a lazo cerrado sea el de un segundo orden dominante, los márgenes de fase y ganancia deben ser:

$$MF > 50^\circ ; MG > 10 \text{ dB.} \quad (5-69)$$

Es necesario utilizar un compensador por adelanto de fase. Después de varios intentos de prueba y error, el compensador elegido es el siguiente:

$$D(w) = 0,8 \frac{(1 + w/35)}{(1 + w/7000)} \quad (5-70)$$

La función de transferencia a lazo abierto del sistema compensado, en plano w vale:

$$G(w) = -5,3136 \times 10^3 \frac{(1 + w/35)(-1 + 0,0007 w)}{(1 + w/7000)w^2} \quad (5-71)$$

Con el fin de facilitar la compensación, se han representado en la figura 5.16 los diagramas de Bode del sistema a lazo abierto sin compensar y compensado.

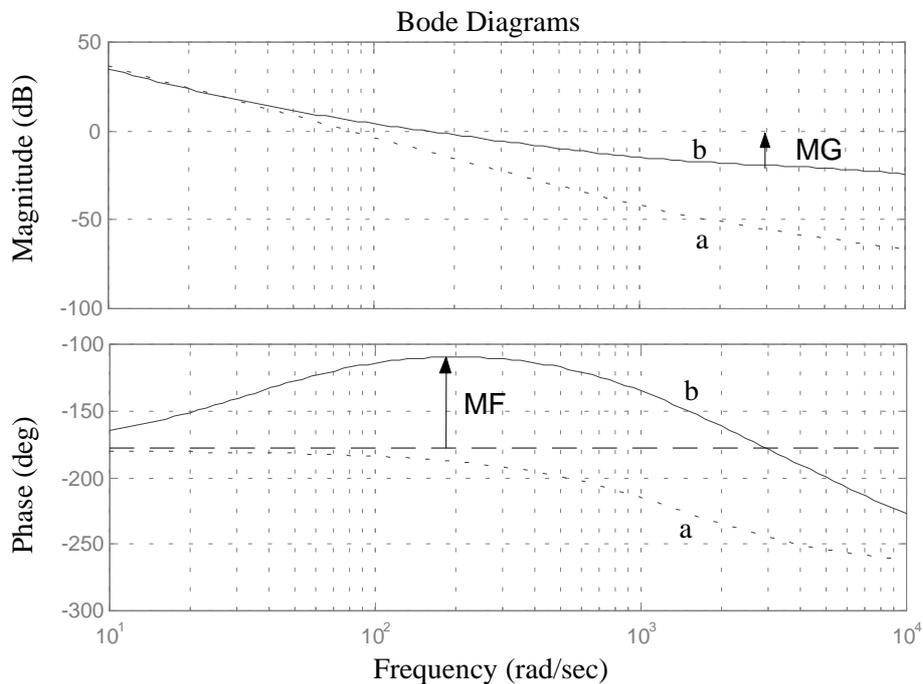


Figura 5.16. Diagrama de Bode del sistema a lazo abierto en el plano w . a) con compensación proporcional. b) con compensación por adelanto de fase.

Del análisis de la figura se desprende que el sistema compensado a lazo cerrado será estable. Además los márgenes de ganancia y fase valen:

$$MF = 69.859^\circ ; MG = 19.43 \text{ dB} \quad (5-72)$$

La implementación del controlador puede realizarse empleando la transformada inversa w . A partir de la ecuación (5-70), se obtiene:

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = 27,7831 \frac{(z - 0,9522)}{(z + 0,661)} \quad (5-73)$$

Pasando al plano temporal, la ecuación a diferencias resultante es:

$$u_{nT} = -0,661 u_{(n-1)T} + 27,7831 e_{nT} - 26,4551 e_{(n-1)T} \quad (5-74)$$

Esta es la ecuación a diferencias que debe ser implementada en el controlador digital.

La respuesta al escalón del sistema compensado a lazo cerrado, se ha graficado en la figura 5.17.

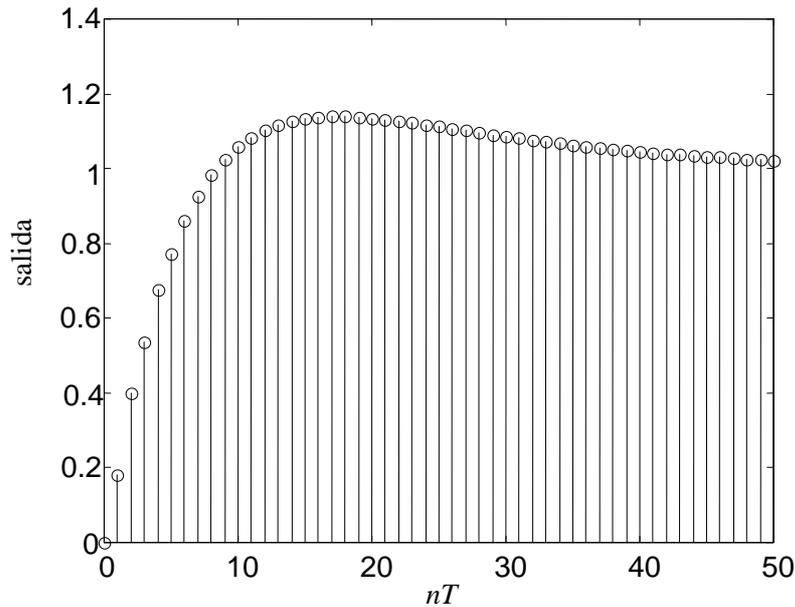


Figura 5.17. Respuesta al escalón del sistema compensado a lazo cerrado.

La figura muestra que el comportamiento del sistema a lazo cerrado es satisfactorio ya que el sobrepaso es del 12%.

V.6. ELECCIÓN DEL PERÍODO DE MUESTREO.

Como se ha mencionado, es conveniente que T sea suficientemente pequeño a los efectos de que:

- la aproximación empleada en la discretización sea correcta,
- no se afecte la estabilidad del lazo,
- no se pierda información de la señal muestreada.

Sin embargo, el período de muestreo no puede ser reducido todo lo que se quiera; ya que existen, entre otras, limitaciones debidas a la velocidad de cálculo del procesador digital y dificultades debidas al “redondeo” entre las operaciones. Por ejemplo, un controlador de acción integral responde a la siguiente ecuación:

$$u_{nT} = u_{(n-1)T} + (T/T_i) e_{nT} \quad (5-75)$$

Esta acción actúa cuando e_{nT} es distinto de cero, pero debido a la cuantización, la señal de control que sale del convertidor digital-analógico D/A vale cero mientras que el error esté dentro de un intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$, esto hace que mientras

$$|e_{nT}| < \frac{T_i}{T} \varepsilon \quad (5-76)$$

no se produzca integración y haya una acumulación de errores. La reducción de T aumenta el factor que multiplica al nivel de cuantización ε , aumentando la zona muerta equivalente que presenta el algoritmo.

Otro ejemplo que pone de manifiesto la imposibilidad de elegir T tan pequeño como se desee es el siguiente, supóngase la acción derivativa

$$\frac{T_d}{T} (e_{(n-1)T} - e_{nT}) \quad (5-77)$$

En este caso la señal $e(t)$ entra al controlador a través del convertidor A/D y por lo tanto sólo puede tomar valores discretos distanciados en lo que se llama nivel de cuantización. Esto hace que, para el controlador, la señal e_{nT} varíe a saltos, los cuales quedan multiplicados por el factor (T_d/T) . Por lo tanto, T no puede hacerse tan pequeño como se quiera.

Estos dos efectos pueden eliminarse, desde un punto de vista práctico, empleando aritmética de punto flotante, pero esto aumenta las exigencias de almacenamiento y tiempo de computación.

Otros factores a tener en cuenta en la selección del período de muestreo T son:

- espectro de las perturbaciones
- tipo de actuador empleado
- equipo de medida
- costo computacional.

En muchos casos prácticos el período de muestreo se selecciona en base al tiempo de crecimiento de la respuesta del proceso a un escalón, eligiéndose T entre la sexta y vigésima parte del tiempo de crecimiento.