Ejercicios resueltos 1:

Transferencias de Modelos Físicos

Cátedra de Control y Servomecanismos

Ing. Cristian Zujew

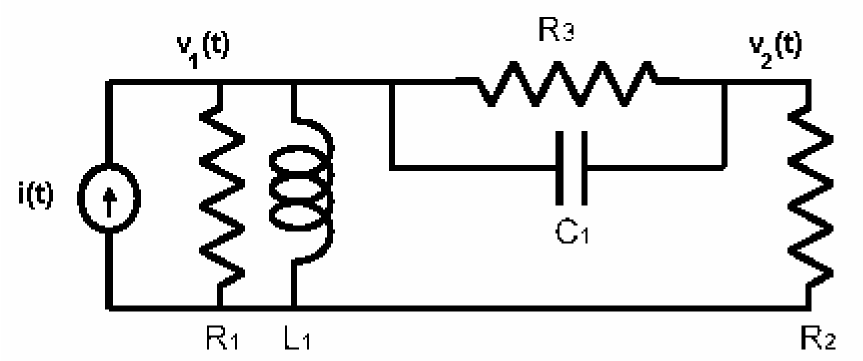
Índice

Objetivo del apunte

En este apunte recopilamos las ecuaciones que describen de distintos sistemas físicos, hacemos alusión a distintas leyes e hipótesis simplificativas y tratamos de encontrar transferencias que resulten de interés.

Sistema Eléctrico

Dado el siguiente diagrama:



Donde la relación es:

$$i(t) = \frac{v_1(t)}{R_1} + \frac{1}{L_1}\int v_1(t) \cdot \partial t + \frac{1}{R_3}\left(v_1(t) - v_2(t)\right) + C_1 \cdot \frac{\partial\left(v_1(t) - v_2(t)\right)}{\partial t}$$

$$\frac{v_2(t)}{R_2} = \frac{1}{R_3}\left(v_1(t) - v_2(t)\right) + C_1 \cdot \frac{\partial\left(v_1(t) - v_2(t)\right)}{\partial t}$$

Que se pueden resolver fácilmente para hallar la transferencia V2 / I

También se podía haber trabajado sobre las mismas expresiones pero transformadas por Laplace pero eso lo dejamos al alumno.

Sistema traslacional

Explicación:

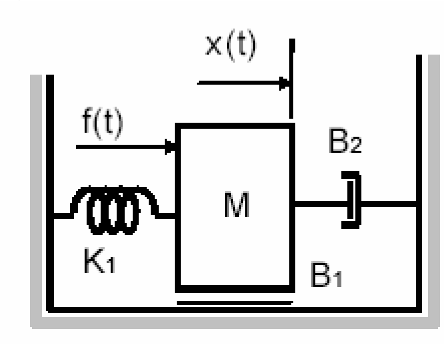
El primer elemento que encontramos en estos sistemas es la fricción cuya acción depende de la velocidad de cambio en la posición en la dirección de movimiento (es simplemente un roce o se lo puede ver también como un amortiguador –"roce viscoso"–).

También tenemos la acción plástica que se representa en forma elemental por un resorte cuya acción depende del cambio de posición relativa entre sus extremos (Δx) y por último tenemos –la esencia netamente dinámica o inercial– de las masas cuya función se pone de manifiesto con los cambios de velocidad -aceleración.

Las hipótesis simplificativas son

1. Es un sistema LIT (aunque está demás decirlo)
2. Nunca superaremos el límite plástico de los resortes
3. En la expresión del roce se considera solamente roce dinámico aproximado al primer orden

Ejercicio:



En el diagrama de la izquierda vemos como una masa "encajonada" es sometida a la acción de una fuerza f(t).

La masa M se apoya sobre el suelo de su contenedor, que le ofrecerá un roce B1 a su desplazamiento, es sostenida por un resorte de constante K1 de un lado y por un amortiguador B2 del otro.

El objetivo de problemas como este es hallar la relación entre la posición relativa x(t) en función de la acción f(t). En otras palabras la transferencia X/F.

Segunda ley de Newton: $\sum F = M \cdot a$

Directamente a través de Laplace queda:

$$F - K1 \cdot X - (B1 + B2) \cdot s \cdot X = M \cdot s^2 \cdot X \Rightarrow \frac{X}{F} = \frac{1}{M \cdot s^2 + (B1 + B2) \cdot s + K1}$$

Sistema rotacional

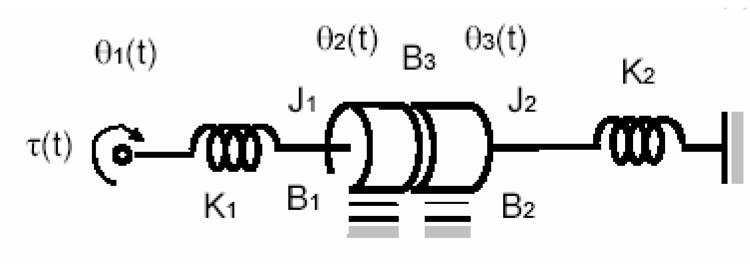
Explicación:

Básicamente se trata de situaciones análogas a la translación lineal descripta en el apartado anterior, pero fundadas sobre movimientos de rotación respecto de un eje de referencia.

El primer elemento es el roce cuya acción es proporcional ahora a la velocidad angular de rotación. El segundo se trata del efecto plástico de torsión proporcional al ángulo y por último el momento inercial, en base a la aceleración angular.

Las hipótesis simplificativas son análogas al apartado anterior.

Ejercicio:



El ejercicio propuesto trata la acción de transmisión de movimiento entre dos masas mediante roce. Efectivamente la cupla se aplica sobre una masa de inercia J1 que traslada su movimiento por simple roce a una masa de inercia J2. La cupla no se aplica directamente a J1 sino que se hace a través de un eje que posee elastancia de torsión K1. J2 se vincula a un punto de referencia fijo mediante un resorte de elastancia K2. Por último ambas masas rotantes se mueven sobre algún apoyo (cojines, rulemanes, etc) que también ofrecen roce.

En primer lugar debemos aclarar que un resorte vinculado a una masa por un extremo y con una fuerza aplicada en el otro –ya sea en sistemas rotantes o transnacionales –la única acción que realiza es la de trasladar la fuerza a la masa. Distinto sería si en el extremo libre del resorte también hubiese una masa, pero al no ser así resaltamos: no cumple otra función que la mencionada. Por tanto:

$$T - B_1 \cdot \theta_2 \cdot s - B_3 \cdot (\theta_2 - \theta_3) \cdot s = J_1 \cdot \theta_2 \cdot s^2$$

$$B_3 \cdot (\theta_2 - \theta_3) \cdot s - K_2 \cdot \theta_2 = J_2 \cdot \theta_3 \cdot s^2$$

Que es relativamente fácil de resolver.

Sistemas Hidráulicos

Explicación:

En los sistemas hidráulicos se conjugan presiones y caudales confinados en uno o más recintos contenedores y/o encausadores que pueden ser cañerías, depósitos, etc.

El origen de la presión puede ser el resultado de la operación de una bomba o bien una combinación de la presión ambiente más una determinada por la altura en la columna de líquido – que es la presión hidrostática de Bernoulli.

El paso de un caudal a través de una cañería siempre provoca una caída de presión (restricción) distribuida a lo largo de toda su extensión pero para obtener su modelo suponemos que su efecto es concentrado. Hay válvulas y reguladores de presión que efectivamente son un efecto concentrado.

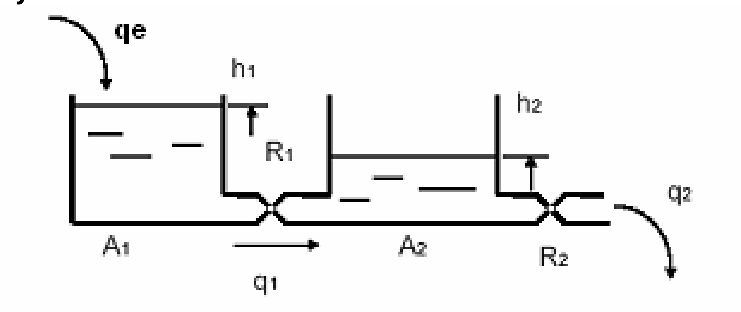
Por último la llamada capacidad es la propiedad de acumularse cierto volumen de líquido en un contenedor en función del caudal de entrada o del balance instantáneo entre entrada y salida (en el caso que hubiera ambas cosas). Lo titulamos “Capacidad” teniendo en mente la analogía con la capacidad eléctrica pero en realidad es volumen de líquido acumulado. Por ello en la expresión transformada hemos puesto área por altura que es el volumen acumulado. Luego también hemos dejado fuera de la derivada al área que en la mayoría de los casos es constante. En ese caso la altura es una función de s que llamaremos H(s).

Hipótesis simplificativas

Estas son (y ya no agregamos sistema LIT por que está de más):

1. Flujo laminar (que da expresiones simples y hasta de primer orden)
2. Fluido incompresible (más ecuaciones sencillas y no hay pérdida de presión en la compresión del líquido). O sea que no planteamos q=C.dP/dt.
3. Los contenedores son indeformables (o sea que cañerías, tanques, válvulas y demás no alteran sus dimensiones aunque cambie la presión de trabajo)
4. Despreciamos la inercia del fluido (aunque el “golpe de ariete” existe suponemos condiciones en donde su existencia es de influencia despreciable)

Ejercicio:



Mostramos aquí un caso típico de toda la bibliografía: dos estanques o columnas a cielo abierto de las cuales una sola es alimentada (por un caudal qe). La segunda columna recibe líquido mediante conexión con la primera y lo libera mediante otra cañería. Ambas conexiones ofrecen “resistencia” al paso de caudal R1 y R2. El objetivo es obtener la variación de la altura del segundo tanque en función del caudal de ingreso en el primero.

Analicemos q1: A ambos lados de esta restricción tenemos tanques a cielo abierto, así que sus presiones en la superficie son la presión ambiente. Si aplicamos Bernoulli de ambos lados e incorporamos las simplificaciones del caso (la velocidad del fluido a ambos lados del canal es la misma) la expresión del caudal sólo depende de la diferencia de alturas:

$$q1= (h1-h2) / R1$$

Para el caudal q2 la situación es similar salvo por que no tiene un tercer tanque a continuación que le imponga una resistencia al paso de líquido. Entonces:

q2= h2 / R2

Por otro lado ya sabemos que el volumen acumulado en cada tanque depende del balance de caudales:

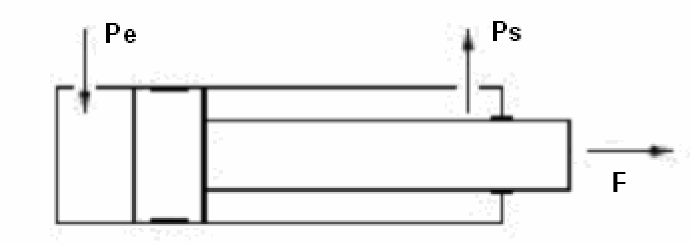
$$q_e - q_1 = A_1 \cdot \frac{\partial h_1}{\partial t} \Rightarrow \text{reemp.} + \text{transf.} \Rightarrow Q_1(s) = \frac{(H_1(s) - H_2(s))}{R_1} = Q_e(s) - A_1 \cdot s \cdot H_1(s)$$

$$q_1 - q_2 = A_2 \cdot \frac{\partial h_2}{\partial t} \Rightarrow \text{reemp.} + \text{transf.} \Rightarrow Q_2(s) = \frac{H_2(s)}{R_2} = Q_1(s) - A_2 \cdot s \cdot H_2(s)$$

De la expresión de arriba se pueden obtener dos ecuaciones: una que nos deja H1 en función de H2 y Q1 y otra que da una función de Q_1 que se puede reemplazar en la expresión inferior.

Cilindro Hidráulico de Efecto simple

Una barra (pistón) se desplaza dentro de un cilindro debido a la diferencia de presiones de entrada (Pe) y salida (Ps). La acción del pistón se dirige solo a uno de los extremos donde se colocará la carga. La presión de salida Ps suele ser igual o muy cercana a la presión ambiente.



Para reponer la posición inicial del actuador este deberá contraerse mediante resortes o por la misma gravedad al momento que se disminuye la presión Pe.
Supongamos que la fuerza de acción F se aplica para vencer un roce (de coef. B) y desplazar una masa M –en un caso real aquí habría que evaluar si la masa del pistón se incluye o no en los cálculos.

La diferencia de presiones aplicada al área del pistón produce una fuerza:

F= (Pe-Ps). A

La cual será aplicada a la carga elegida:

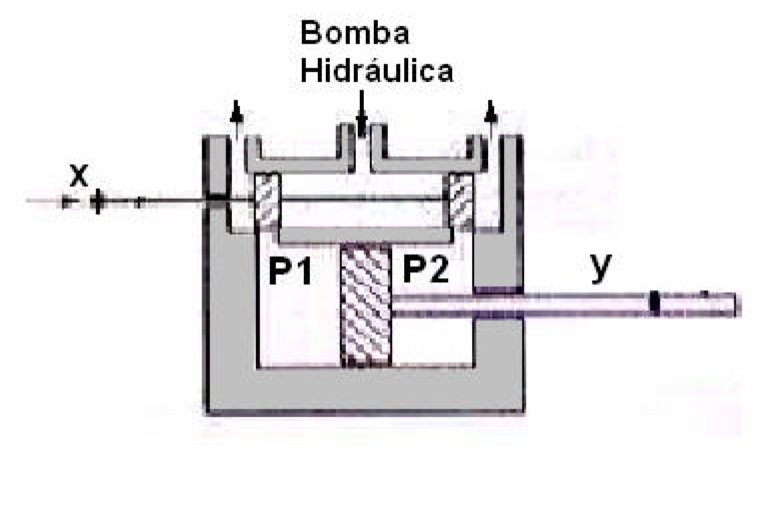
F= (Pe-Ps). A = B X s+ M X s^2 = (B+Ms) X s

Se puede buscar una relación entre Pe y Ps que forma parte del resto del sistema hidráulico que no figura en el esquema o bien dejar la transferencia como X/(Pe-Ps) donde:

$$T(s) = \frac{A}{s \cdot (B + Ms)}$$ que delata un comportamiento integral.

Un efecto que se debe analizar es si hay filtración de líquido hidráulico por los contornos del pistón y si esta filtración es importante o se puede despreciar.

Bomba Hidráulica



Suposiciones Básicas:

1. El fluido hidráulico es incompresible
2. La inercia del pistón de fuerza es despreciable
3. El pistón de fuerza no tiene roce
4. El flujo de masa Q [en Kg/s] que deja circular cualquier válvula se puede suponer proporcional a la diferencia de presiones entre la entrada y salida. En este caso en lugar de la presión de la bomba hidráulica P_b se puede suponer que el flujo está en relación al área A de apertura de la admisión (o de escape que es lo mismo)

Entonces tenemos:

$$Q_1= k.(P_b - P_1) = k.P_b – k.P_1 = C.A – k.P_1= C\ X.d – k.P_1$$

Siendo d una de las dimensiones del área que atraviesa el flujo. De modo que termina dando la ecuación sugerida en la práctica:

$$Q_1= C_1.\ X – C_2.P_1 \qquad ❶$$

La presión P_1 entra restando en esta ecuación por que a mayor presión en la cavidad izquierda menor ingreso de flujo.

Para la cavidad derecha la situación es al contrario ya que la presión P_2 ayuda a la evacuación de masa lo cual lleva a:

$$Q_2= C_1.\ X + C_2.P_2 \qquad ❷$$

También interviene X ya que el flujo Q_2 evacua a través de un área A=X.d idéntica al área de ingreso de Q_1.

Si las hipótesis 2 y 3 son correctas entonces no hay diferencia de flujo entre la entrada y la salida

$$Q=Q_1=Q_2$$

Ahora sumamos las ecuaciones ❶ y ❷ para arribar a una única expresión del flujo:

$$Q= C_1.\ X + C_2.\ (P_2 – P_1) / 2 = C_1.\ X + C_3.\ (P_2 – P_1) \qquad ❸$$

Por otro lado sabemos que el flujo (acumulado en el lado derecho o evacuado en el lado izquierdo) es variación de masa por unidad de tiempo, la masa es densidad por volumen y el volumen será el área A del pistón por su desplazamiento Y

$Q = dm / dt = \rho \, dV / dt = \rho \, A \, dY / dt$

Que en conjunción con la ec. ❸ y en el dominio de las frecuencias se transforma en:

$\rho \, A \, Y \, s = C_1 . X + C_3 . (P_2 - P_1)$ ❹ (<Diferencia con lo que sugiere la práctica)

Ya que hay un solo componente que almacena energía (el cilindro del pistón, que si no hay roce ambas cavidades se transforman en una sola –dos capacitares en paralelo. Si hay roce se hace presente un elemento disipativo entre ambas cavidades –una resistencia entre dos capacitares).

Todo ha quedado en función de s salvo las constantes ρ, A, C_1 y C_3

El extremo del émbolo puede actuar venciendo un roce y moviendo una masa:

$F = (P_1 - P_2) A = C \, s \, Y + m \, s^2 \, Y = (C \, s + m \, s^2) \, Y$ ❺

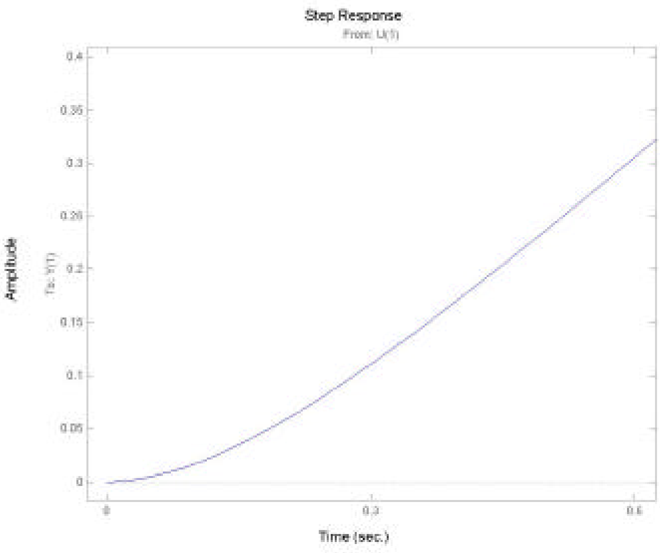
Entre las ❹ y ❺ obtenemos:

$Y / X = A . C_1 / \{ s [s \, m \, C_3 + (\rho \, A^2 + C_3)] \}$

Que ofrece un comportamiento integral según se observa en el modelo real.

Si la masa que mueve es despreciable es un integrador puro.

No obstante se halle presente el otro polo aún se puede ver la acción integradora:



Respuesta al escalón del modelo

Explicación:

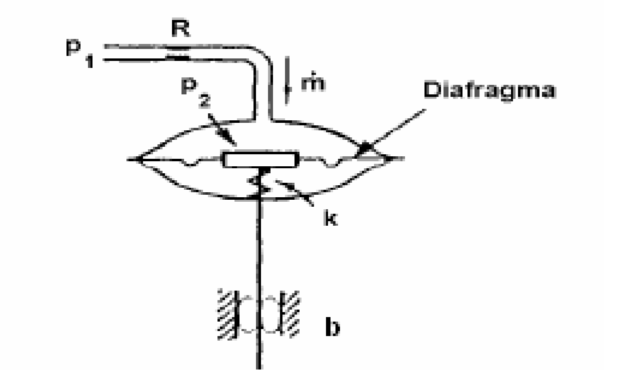
En los sistemas neumáticos tenemos un fluido compresible, consideramos su flujo de masa y todas aquellas situaciones donde puede haber masa acumulada.

Entonces se conforma lo que llamamos “pérdida” (caída de presión en un recorrido) donde decimos que el flujo de masa es proporcional a la caída de presión y en lo que respecta a la acumulación neumática de masa (caso análogo a la acumulación de cargas en un capacitor) hablamos de “capacidad” almacenada en algún recipiente o contenedor a la presión p.

Hipótesis simplificativas

1. Gas ideal
2. Temperatura constante (entonces R y C son realmente constantes)
3. Variaciones de volumen pequeñas.
4. Compresiones y descompresiones adiabáticas.

Ejercicio: Actuador Neumático de Diafragma



El esquema de la izquierda corresponde a un actuador neumático de diafragma.
En este caso dos cascos semiesféricos enfrentados están separados por un diafragma elástico. Sus contornos están sellados de forma tal que no se producen fugas.
Una fuente regulada de presión P1 (on/off) inyecta durante un cierto intervalo de tiempo masa de aire en la semiesfera superior empujando hacia abajo el émbolo inferior que ejerce la acción.

Para reponer el dispositivo debe caer P1 a los valores de la presión atmosférica dejando que el resorte k coloque el diafragma en la posición de reposo. En principio consideremos que diafragma+émbolo+”lo que sea” tiene una masa Md y además el émbolo vence un determinado roce.

$$p_1 - p_2 = R \cdot \frac{dm}{dt} \Rightarrow P_1 - P_2 = s \cdot M \cdot R \rightarrow \text{flujo}$$

$$m = C \cdot p_2 \Rightarrow M = C \cdot P_2 \rightarrow \text{acumulada}$$

$$P_2 \cdot A = k \cdot Y + b \cdot s \cdot Y + Md \cdot s^2 \cdot Y = (k + b \cdot s + Md \cdot s^2) \cdot Y \rightarrow \text{Newton}$$

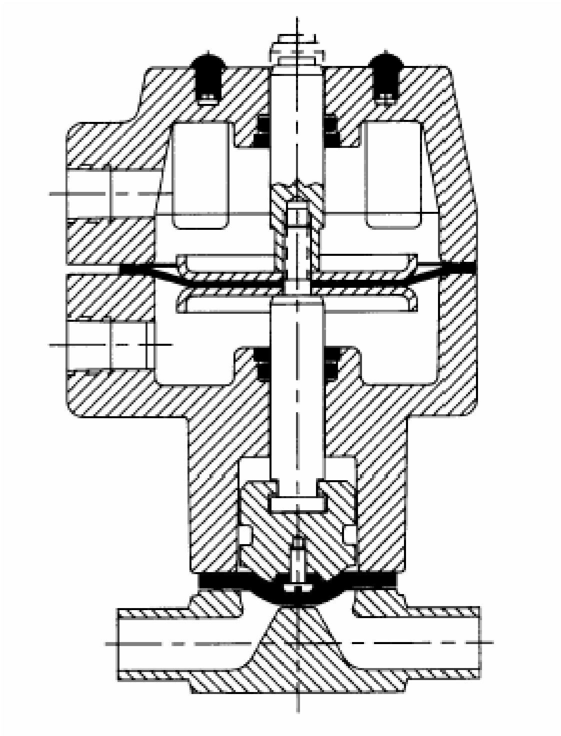
Incorporamos el área –que debería ser un dato – en la última ecuación que ya mostramos transformada por Laplace. Es evidente que una transferencia de interés es la relación que tiene el desplazamiento “Y” debido a la presión de acción “P1”.

La primera de las ecuaciones nos ofrece P2 en función de P1 para luego reemplazar P2 –que no nos sirve de mucho –en todas las demás expresiones. Tampoco nos sirve de mucho la masa neumática que ha operado el dispositivo pero en la segunda ecuación tenemos su equivalente. Entonces:

$$P_2 \cdot A = \frac{P_1 \cdot A}{(1 + sCR)} = (k + b \cdot s + Md \cdot s^2) \cdot Y \Rightarrow \frac{Y}{P_1} = \frac{A}{(1 + sCR) \cdot (k + bs + Md \cdot s^2)}$$

Notamos que si Md es despreciable el sistema presenta dos polos simples y es de tipo cero.

A título informativo en el esquema de corte siguiente vemos un actuador de diafragma de aplicación industrial cuya finalidad es accionar la válvula de obstrucción inferior y que, debemos destacar, es una de las aplicaciones más comunes de este dispositivo. Podemos ver que la válvula está cerrada y el diafragma desplazado con lo cual debemos entender que la cavidad superior está a presión de trabajo.



Corte de un actuador neumático real

Explicación:

En las ecuaciones podemos observar la variable q(t) que es el flujo de calor y está dado en calorías por segundo.

La primera expresión no es más que la ecuación de la transmisión de calor, o sea: el gradiente de temperatura. Sabemos que tenemos dos formas de trasmitir calor: convección y radiación. También sabemos que la radiación involucra ecuaciones racionales y de orden superior por lo cual la evitaremos, en principio, para así obtener expresiones más simples.

Entonces el flujo de calor por convección libre será proporcional al área del elemento transmisor y habrá un coeficiente que incluirá la rugosidad de la superficie, color, densidad, etc.

$q=h.A.\Delta\theta \rightarrow$ si el área es constante $\rightarrow q=K.\Delta\theta$

Para comprender la segunda fórmula utilizamos la termodinámica donde sabemos que la cantidad de calor necesaria para elevar en $\Delta\theta$ grados centígrados a una masa m es:

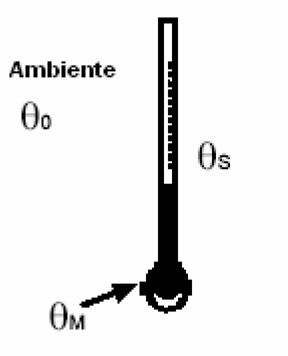
$Q= m\ c\ \Delta\theta= C\ \Delta\theta$

Donde m es la cantidad de masa que se está calentando, c es su capacidad calorífica específica y $\Delta\theta$ es el incremento de temperatura apreciado al entregarse la cantidad de calor Q.

Si tomamos el incremento como $\theta - \theta_O = \Delta\theta$, siendo θ_O una temperatura de referencia constante y derivamos ambos miembros de esta expresión con respecto al tiempo queda el flujo de calor: $q=C\ d\theta / dt$

Hipótesis simplificativas

1. No hay cambios de dimensiones de los elementos por acción de la temperatura
2. No hay transmisión por radiación, sólo por convección libre (tampoco forzada).



Ejercicio: Termómetro de mercurio

Donde:
θ_O= temperatura ambiente (también será la referencia)
θ_V= temperatura del cristal
θ_M= temperatura del mercurio
Rav= Resistencia térmica de convección aire/vidrio
Rvm= Resistencia térmica de convección vidrio/mercurio
C_V= Capacidad Calorífica del Vidrio
C_M= Capacidad Calorífica del Mercurio

El extremo del termómetro es calentado por aquello a lo que se le quiere medir la temperatura. Supongamos para nuestro caso que es aire, eso significa que estamos midiendo la temperatura ambiente. Entonces la situación es que el ambiente calienta primero el vidrio que a su vez calienta al mercurio.

1. del ambiente al vidrio qav= (θ_O - θ_V)/Rav ①
2. del vidrio al mercurio qvm= (θ_V - θ_M)/Rvm ②
3. La temperatura del vidrio sufre cambios graduales debido a que acumula calor qv=$C_V \times d\theta_V / dt$ ③
4. Lo mismo le sucede al mercurio qm=$C_M \times d\theta_M / dt$ ④

Luego de estas ecuaciones individuales tenemos los balances que las interrelacionan y describimos de la siguiente manera:

En el vidrio el flujo de calor que llega desde el medio ambiente ① se utiliza en calentar el propio vidrio ③ y cierta parte se transmite al mercurio ②

$$qav = qv + qvm \Rightarrow \frac{1}{Rav}(\theta_0 - \theta_V) = C_V \cdot s \cdot \theta_V + \frac{1}{Rvm}(\theta_V - \theta_M)$$

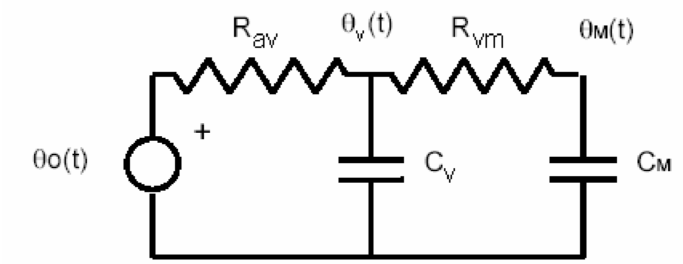
situándonos en el mercurio vemos que recibe calor del vidrio ② para elevar su propia temperatura ④:

$$qvm = qm \Rightarrow \frac{1}{Rvm}(\theta_V - \theta_M) = C_M \cdot s \cdot \theta_M$$

Se obtiene la transferencia:

$$\frac{\theta_M}{\theta_O} = \frac{Rav^2}{(1+s \cdot Rav \cdot C_V)(1+s \cdot Rvm \cdot C_M) + s \cdot Rav \cdot C_M}$$

Si asociamos temperaturas a tensiones y flujos de calor a corrientes tenemos un equivalente eléctrico del asunto:



Si θ_O fuese un escalón habrá un transitorio inicial luego del cual los capacitares estarán cargados y en el extremo de θ_M tendremos un circuito abierto en donde sólo puede ser θ_M=θ_O

Bibliografía:

1.- Título: "Autómatas Programables",
Autor/es: Joseph Balcells, Jose Luis Romeral,
Editorial: Marcombo.
2.- Título: "Automatismos eléctricos, neumáticos e hidráulicos",
Autor/es: F. Jesús Címbranos,
Editorial: Paraninfo.
3.- Título: "Autómatas programables: fundamento, manejo, instalación y prácticas",
Autor/es: Porras Criado, Antonio Plácido Montanero Molina,
Editorial: McGraw-Hill.
4.- Título: "Neumática, hidraúlica y electricidad aplicada", Autor/es: José Roldán Viloria.
Editorial: Paraninfo.
5.- Título: "Ingeniería de control moderna",
Autor/es: Katsuhiko Ogata.
Editorial: Prentice Hall, 1993.
En inglés:
6.- Título: "Modeling of Dynamical Systems”
Autor/es: Ljung, L.; Glad, T.
Editorial: Prentice Hall, 1994.
7.- Título: "System Identification”
Autor/es: Ljung, L.
Editorial: Prentice Hall, 1987.
8.- Título: "Process Dynamics: Modeling Analysis and Simulation”
Autor/es: Bequette, W.
Editorial: Prentice Hall, 1994.