# ISLD

## TPNº3     Diagrama de Karnaugh

**Ejercicio nº 1**

Convertir las siguientes funciones a la primera forma canónica y representarlas utilizando el diagrama de Karnaugh.

a) $F = \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D + B \cdot C \cdot \overline{D} + B \cdot C$

Primero transformamos la expresión en unión de mintérminos:

$$F = \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D + B \cdot C \cdot \overline{D} + B \cdot C \cdot (D + \overline{D})$$
$$F = \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D + B \cdot C \cdot \overline{D} + B \cdot C \cdot D$$

Esta expresión puede también representarse así:

$F = \sum_{BCD} m(0,1,6,7)$

El diagrama de Karnaugh correspondiente es :

| BC \ A | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | **1** $_0$ | **1** $_1$ | $_3$ | $_2$ |
| 1 | $_4$ | $_5$ | **1** $_7$ | **1** $_6$ |

**Ejercicio Nº 2**

Idem anterior pero a segunda forma canónica

b) $G = \sum_{A,B,C,D} m(0,1,2,5,7,9,10,13,15)$

Aplicando el teorema de De Morgan :

$\overline{G} = \sum_{A,B,C,D} m(3,4,6,8,11,12,14)$ (I)

Puede observarse que en la expresión (I)  esta el complemento de G

Escrito en forma explícita en función de A,B,Cy D obtenemos
$\overline{G} = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D} + A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D + A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$
si negamos otra vez y aplicamos De Morgan queda :

$$G = \underset{\overline{12}}{(A+B+\overline{C}+\overline{D})}\cdot\underset{\overline{11}}{(A+\overline{B}+C+D)}\underset{\overline{9}}{(A+\overline{B}+\overline{C}+D)}\cdot\underset{\overline{7}}{(\overline{A}+B+C+D)}\cdot\underset{\overline{4}}{(\overline{A}+B+\overline{C}+\overline{D})}\cdot\underset{\overline{3}}{(\overline{A}+\overline{B}+C+D)}\cdot\underset{\overline{1}}{(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+D)}\cdot$$

$$G = \prod_{ABCD} M(\overline{1}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{11}, \overline{12})$$

otra forma de obtener los maxtérminos directamente de (I) cuando se tienen 4 variables es restarle a 15 ( por tratarse de un Karnaugh de 4 variables) los números correspondientes a los mintérminos 15-14=1 ; 15-12=3; 15-11=4; 15-8=7; 15-6=9; 15-4=11; 15-3=12.

$C$

| CD / AB | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | **0** 1 | **0** $\overline{3}$ | 2 |
| 01 | **0** 4 | 5 | **0** 7 | 6 |
| 11 | **0** 12 | 13 | 15 | 14 |
| 10 | 8 | **0** $\overline{9}$ | **0** 11 | 10 |

A

$B$

Debemos recordar que los números de las casillas ***están negados*** (se indicaron solo dos numeros ) Por ej $\overline{9}$ equivale al maxterm $A + \overline{B} + \overline{C} + D$

**Ejercicio Nº3**
Expresar siguientes funciones en primera forma y simplificar utilizando el diagrama de Karnaugh

a) $H = \sum_{ABCD} m(1, 5, 8, 10, 11, 12, 14, 15)$

D

C

| CD / AB | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | **1** 1 | 3 | 2 |
| 01 | 4 | **1** 5 | 7 | 6 |
| 11 | **1** 12 | 13 | **1** 15 | **1** 14 |
| 10 | **1** 8 | 9 | **1** 11 | 1 10 |

B

A

Del diagrama se deduce que:
$H = A\overline{D} + AC + \overline{A}\,\overline{C}D$

c) $R = \prod_{ABCD} M(1, 7, 9, 11, 13, 15)$

Como se trata de una intersección de uniones representamos con ceros en lugar de unos
Debemos recordar que los números de las casillas NO ***están negados***, así que la disposición de variables en el diagrama K se invierte

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | **0** 1 | 3 | 2 |
| 01 | 4 | 5 | **0** 7 | 6 |
| 11 | 12 | **0** 13 | **0** 15 | 14 |
| 10 | 8 | **0** 9 | **0** 11 | 10 |

A B B C D D

Por inspección del diagrama K obtenemos $R = (\overline{A} + \overline{D})(B + C + \overline{D})(\overline{B} + \overline{C} + \overline{D})$

Podemos pasar a primera forma recordando que $\overline{R} = \prod_{A,B,C,D} M(0,2,3,4,5,6,8,10,12,14)$

( los minterminos pueden ser obtenidos reemplazado 1 por ceros )

$$R = \sum_{A,B,C,D} m(0,2,3,4,5,6,8,10,12,14)$$

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | **1** 0 | 1 | **1** 3 | **1** 2 |
| 01 | **1** 4 | **1** 5 | 7 | **1** 6 |
| 11 | **1** 12 | 13 | 15 | **1** 14 |
| 10 | **1** 8 | 9 | 11 | **1** 10 |

De donde resulta

$$R = \overline{D} + \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C} = \overline{D} + \overline{A}(B\oplus C)$$

Nota: para verificar consideremos $R = \overline{\overline{(\overline{A} + \overline{D})(B + C + \overline{D})(\overline{B} + \overline{C} + \overline{D})}}$ de aquí

$$R = \overline{AD + \overline{B}\overline{C}D + BCD} = \overline{(A + \overline{B}\overline{C} + BC)D} = \overline{(A + \overline{B\oplus C})D} = \overline{(A + \overline{B\oplus C})} + \overline{D}$$

$$R = \overline{D} + \overline{A}(B\oplus C)$$

f) $P = \sum_{W,X,Y,Z} m(7,8,9,12,14,19,23,24,27,29,30) + d(1, 10,17,26,28,31)$ Se trata de un ejemplo con especificación incompleta. En este caso puede utilizarse cualquier x para simplificar el diseño pudiendo utilizarlas de acuerdo a nuestra conveniencia para agrupar

| A=0 | | | | |
|---|---|---|---|---|
| BC \ DE | 00 | 01 | 11 | 10 |
| 00 | 0 | X 1 | 3 | 2 |
| 01 | 4 | 5 | 1 7 | 6 |
| 11 | 1 12 | 1 13 | 15 | 1 14 |
| 10 | 1 8 | 1 9 | 11 | X 10 |

| A=1 | | | | |
|---|---|---|---|---|
| BC \ DE | 00 | 01 | 11 | 10 |
| 00 | 16 | 1 17 | 1 19 | 18 |
| 01 | 20 | 21 | 1 23 | 22 |
| 11 | X 28 | 1 29 | X 31 | 1 30 |
| 10 | 1 24 | 25 | 1 27 | X 26 |

$$F=\overline{B}CDE+\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}E+\overline{A}B\overline{D}+B\overline{E}+ABC+ADE$$

**Ejercicio Nº 4**

Simplificar las siguientes funciones utilizando el diagrama de Karnaugh sin pasar previamente a primera o segunda forma

$H=(A+C)\cdot(A+\overline{C}+D)\cdot(\overline{A}+B+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B})\cdot(\overline{C}+D)$ .Se consideran los números de las casillas sin invertir

/C

$\boxed{\overline{A}}$

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 0 | 0 1 | 3 | 0 2 |
| 01 | 0 4 | 0 5 | 7 | 0 6 |
| 11 | 0 12 | 0 13 | 0 15 | 0 14 |
| 10 | 8 | 9 | 0 11 | 0 10 |

Por ej se ha representado A+C incluyendo las casillas 0,1,4,5

Simplificando $H=(A+C)(\overline{A}+\overline{B})(\overline{A}+\overline{C})(\overline{C}+D)$

Del diagrama K se observa que faltan los maxterms 3,7,8,9. Como no se han invertido los numeros de las casillas para obtener la expresión en minterms basta con invertir las variables del diagrama K e indicar unos en las casillas vacías obteniendose

$$H=\sum_{A,B,C,D}(3,7,8,9)=\overline{A}\,\overline{B}CD+\overline{A}BCD+A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+A\overline{B}\,\overline{C}D$$

Simplificando por inspección del diagrama K ( basta con suponer unos en 3,7,8 y 9 queda $H=\overline{A}CD+A\overline{B}\,\overline{C}$

**Ejercicio Nº 5**

Dada la siguiente función sintetizarla e implementar el circuito con compuertas or exclusivas y nor.

$J = \sum m(3,6,9,10,12,15)$

/C

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 1 | **1** 3 | 2 |
| 01 | 4 | 5 | 7 | **1** 6 |
| 11 | **1** 12 | 13 | **1** 15 | 14 |
| 10 | 8 | **1** 9 | 11 | **1** 10 |

/A

A

Como debemos trabajar con compuertas OR exclusivas (OREX) del diagrama se ve que $A\overline{C}$ intersecta a $\overline{D}B + D\overline{B} = D \oplus B$ , siguiendo este razonamiento encontramos las otras dos intersecciones dos intersecciones,

$$J = A\overline{C}(D \oplus B) + \overline{A}C(D \oplus B) + AC(\overline{D \oplus B})$$

$$J = (D \oplus B)(A \oplus C) + AC(\overline{D \oplus B})\cdots \quad pero \quad AC = (\overline{\overline{A}\,\overline{C} + A \oplus C})$$

$$AC = (\overline{A \oplus C})(A + C)\ (1)$$

y $(D \oplus B)(A \oplus C) = (D \oplus B)(A \oplus C)(A + C)$ (2) con esto

$$J = (A \oplus C)(B \oplus D)(A + C) + (A + C)(\overline{A \oplus C})(\overline{B \oplus D})$$

$$J = (A + C)(\overline{A \oplus B \oplus C \oplus D})$$

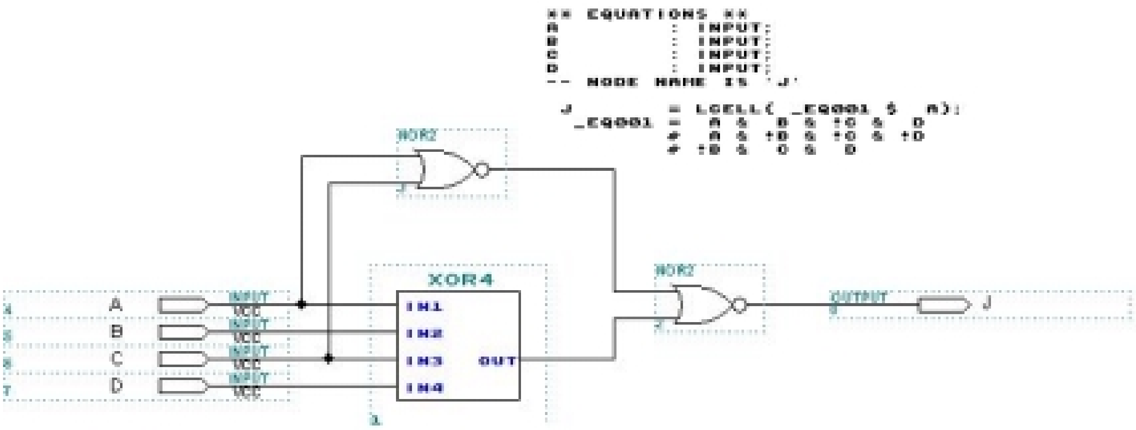
Los pasos (1) y (2) son bastante difíciles para deducir, por eso a veces es conveniente trabajar con los diagramas K . El primer diagrama se eligió pues representa la función $F1 = \overline{A \oplus B \oplus C \oplus D}$ mientras que el segundo es F2=A+C que intersectados con el segundo producen el diagrama original

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | **1** 0 | 1 | **1** 3 | 2 |
| 01 | 4 | **1** 5 | 7 | **1** 6 |
| 11 | **1** 12 | 13 | **1** 15 | 14 |
| 10 | 8 | **1** 9 | 11 | **1** 10 |

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 1 | **1** 3 | **1** 2 |
| 01 | 4 | 5 | **1** 7 | **1** 6 |
| 11 | **1** 12 | **1** 13 | **1** 15 | **1** 14 |
| 10 | **1** 8 | **1** 9 | **1** 11 | **1** 10 |

Así $\overline{J} = \overline{(A\oplus B\oplus C\oplus D)}(A+C)$ o $J = \overline{A\oplus B\oplus C\oplus D + \overline{A+C}}$

Que puede implementarse con compuertas NOR y OR exclusiva solamente



**Ejercicio Nº 6**

Diseñar un comparador de numeros binarios sin signo A ( A1 y A 0 ) y B (B1 y B0 )
Con tres salidas que permitan detectar A >B , A <B y A=B

Representaremos las situaciones posibles en la tabla

| A1 | A0 | B1 | B0 | A>B | A=B | A<B |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

Para sintetizar cada función construiremos 2 diagramas de Karnaugh uno para cada desigualdad

A<B

| $A_1 A_0$ \ $B_1 B_0$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 1 1 | 1 3 | 1 2 |
| 01 | 4 | 5 | 1 7 | 1 6 |
| 11 | 12 | 13 | 15 | 14 |
| 10 | 8 | 9 | 1 11 | 10 |

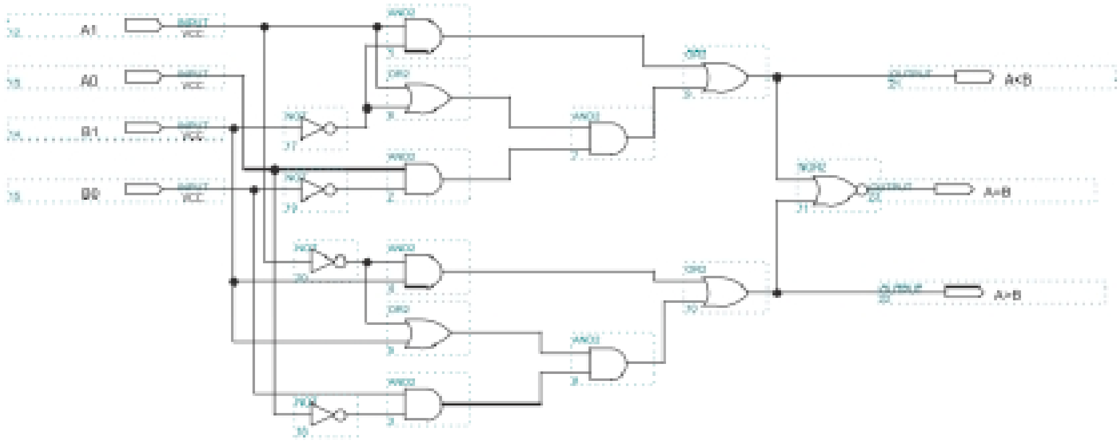
A>B

| $A_1 A_0$ \ $B_1 B_0$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 1 | 3 | 2 |
| 01 | 1 4 | 5 | 7 | 6 |
| 11 | 1 12 | 1 13 | 15 | 1 14 |
| 10 | 1 8 | 1 9 | 11 | 10 |

Las ecuaciones correspondientes serán

$$A < B = A_1 \overline{B}_1 + A_0 \overline{B}_0 (\overline{B}_1 + A_1)$$
$$A > B = \overline{A}_1 B_1 + \overline{A}_0 B_0 (B_1 + \overline{A}_1)$$

La igualdad obviamente se cumplirá cuando ninguna de las condiciones anteriores sea válida
El circuito obtenido es



**<u>Ejercicio Nº 9</u>**

Dadas las siguientes funciones encontrar posibles subfunciones comunes a ambas
A fin de minimizar la cantidad de compuertas necesarias para implementarlas. Dibujar el circuito

a)

$H = \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}BD + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + ABD$  $G = \overline{A}BCD + \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C}D + ABC$

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 1 | 3 | **1** 2 |
| 01 | 4 | **1** 5 | **1** 7 | 6 |
| 11 | 12 | **1** 13 | **1** 15 | 14 |
| 10 | **1** 8 | 9 | 11 | 10 |

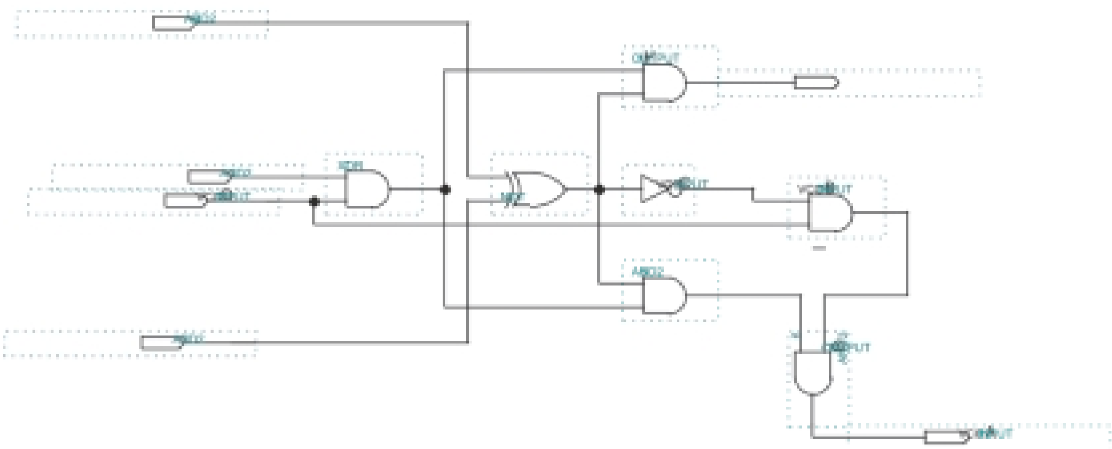
| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 1 | 3 | 2 |
| 01 | **1** 4 | **1** 5 | **1** 7 | 6 |
| 11 | 12 | **1** 13 | **1** 15 | **1** 14 |
| 10 | 8 | 9 | 11 | 10 |

De los diagramas se deduce

$G = BD + A \oplus C$ Y $G = BD(A \oplus C) + B(\overline{A \oplus C})$

La región común , como surge del diagrama K es BD

El circuito que se obtiene es



**<u>Ejercicio Nº 11</u>**

Uncircuito recibe 2 números binarios de 2 bits **Y =Y1,Y0** y **X = X1,X0** . La salida **Z=Z1,Z0** debe ser igual a **11** si **X=Y**, **10** si **Y>X** y **01** si **Y<X .** Realizar A**)** La tabla de Verdad ,B)Minimizar la función de salida ,C) sintetizar el circuito.

A)Tabla de verdad

| Y1 | Y0 | X1 | X0 | Z1 | Z0 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

B) Salidas minimizadas

| AB / CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | **1** 0 | 1 | 3 | 2 |
| 01 | **1** 4 | **1** 5 | 7 | 6 |
| 11 | **1** 12 | **1** 13 | **1** 15 | **1** 14 |
| 10 | **1** 8 | **1** 9 | 11 | 1 10 |

| AB / CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | **1** 0 | **1** 1 | **1** 3 | **1** 2 |
| 01 | 4 | **1** 5 | **1** 7 | **1** 6 |
| 11 | 12 | 13 | **1** 15 | 14 |
| 10 | 8 | 9 | **1** 11 | 1 10 |

$Z_1 = Y_0\overline{X}_1 + Y_1\overline{X}_1 + Y_1\overline{X}_0 + X_1Y_1Y_0 + \overline{Y}_1\overline{X}_1\overline{X}_0$

$Z_0 = \overline{Y}_0X_1 + \overline{Y}_1X_1 + \overline{Y}_1X_0 + X_1Y_1X_0 + \overline{Y}_1\overline{X}_1\overline{Y}_0$

c) Síntesis del circuito.