

# Capítulo 1

## Transformaciones de Procesos

1.1. sin memoria

1.2. SLIT

# Capítulo 2

## Representación Espectral de Procesos

### 2.1. Motivación

Hasta el momento hemos caracterizado los procesos aleatorios en el dominio del tiempo; principalmente a través de la media y funciones de correlación, para procesos estacionarios en sentido amplio. Se puede caracterizar el comportamiento de PAESA en el dominio frecuencial por medio del análisis de Fourier.

Con señales determinísticas  $x(t)$  la representación en el dominio de la frecuencia se obtiene utilizando la transformada de Fourier

$$X(f) \triangleq \mathcal{F}\{x(t)\}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (2.1)$$

en la medida que la integral exista, por ejemplo si  $x(t)$  satisface las condiciones de Dirichlet.

Para el caso de los procesos aleatorios, un tratamiento directo transformando cada realización no parece atractivo pues bien podría pasar que muchas realizaciones del mismo proceso no tuvieran transformada. Sin embargo, con un poco de cuidado podremos introducir una definición apropiada y lo que es más importante, relacionarla fuertemente con las nociones de funciones de correlación en el dominio temporal.

Obtendremos primero la densidad espectral de potencia para un único PAESA y su relación con la autocorrelación. Luego para dos PAESA definiremos la interdensidad espectral y su vinculación con la función de intercorrelación. Finalmente veremos a manera de aplicación cómo empleando el tratamiento frecuencial se simplifica el análisis de los sistemas lineales invariantes en el tiempo excitados con señales aleatorias.

### 2.2. Densidad espectral de potencia

Como anticipamos más arriba, para el análisis frecuencial de procesos estocásticos resulta más conveniente recurrir a la noción de potencia media que para casi todos los procesos resulta finita, aún cuando pueda ocurrir que muchas realizaciones individuales no tengan transformada de Fourier por no tener energía finita.

Consideremos un proceso  $X(t, \zeta)$  para  $-\infty < t < \infty$ . Por el momento, para evitar las complicaciones de los intervalos infinitos, definimos la transformada de Fourier  $X_T(f, \zeta)$  del proceso truncado al intervalo finito  $(-T/2, T/2)$  con  $T > 0$ . Esta transformada existe siempre, dentro de hipótesis amplias, porque la realización ha sido truncada a un intervalo finito dentro

del cual siempre cumple las condiciones de Dirichlet. De manera que

$$X_T(f, \zeta) = \int_{-T/2}^{T/2} X(t, \zeta) e^{-j2\pi ft} dt \quad (2.2)$$

Suponiendo que  $X(t, \zeta)$  es una tensión aplicada sobre una resistencia de  $1\Omega$ , la energía en la realización  $\zeta$  del proceso truncado es

$$\mathcal{E}_T(\zeta) = \int_{-T/2}^{T/2} |X(t, \zeta)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(f, \zeta)|^2 df \quad (2.3)$$

La última igualdad se obtiene utilizando la relación de Parseval y expresa la energía en el dominio de la frecuencia. La potencia media  $P_T(\zeta)$  de la realización  $\zeta$ , truncada al intervalo  $(-T/2, T/2)$ , resulta entonces

$$P_T(\zeta) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |X(t, \zeta)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X_T(f, \zeta)|^2}{T} df \quad (2.4)$$

Observando la segunda integral,  $|X(f, \zeta)|^2/T$  es una *densidad espectral de potencia* y tiene dimensiones de  $\text{Volt}^2/\text{Hz}$ . Notamos que tanto la energía de (2.3) como la potencia de (2.4) son variables aleatorias.

Las expresiones desarrolladas más arriba son todavía insatisfactorias porque i) son dependientes de la realización y no denotan una propiedad del proceso como conjunto de realizaciones y ii) porque el proceso fue truncado al intervalo  $(-T/2, T/2)$ . El primer cuestionamiento es contrarrestado tomando un promedio estadístico entre todas las realizaciones y así poder hablar de propiedades en cuanto a energía y/o potencia que son del proceso y no solamente de una realización. La segunda objeción puede eliminarse tomando el límite para  $T \rightarrow \infty$  y así tomar la energía o potencia de la realización completa, en lugar de la truncada. Es interesante destacar que el orden correcto para realizar esas dos operaciones es primero tomar esperanza y luego el tomar el límite. Conceptualmente la razón es que si se tratara de tomar el límite primero, es difícil asegurar que para cada  $\epsilon > 0$  exista *un*  $T_0$  para todas las realizaciones  $\zeta$  tal que por ejemplo  $|\mathcal{E}_T(\zeta) - \mathcal{E}_{T'}(\zeta)| < \epsilon \forall (T, T') > T_0$ . En cambio, tomando primero la esperanza se asegura la existencia de la potencia media en sentido estadístico del proceso truncado al intervalo  $(-T/2, T/2)$ . Tomar ahora el límite no es técnicamente difícil pues se trata solamente de una única función de  $T$ .

En consecuencia,

$$P_{XX} = \lim_{T \rightarrow \infty} \text{E}\{P_T(\zeta)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \text{E}\{|X(t, \zeta)|^2\} dt \quad (2.5)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{E}\{|X_T(f, \zeta)|^2\}}{T} df = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\text{E}\{|X_T(f, \zeta)|^2\}}{T} df \quad (2.6)$$

donde la última igualdad se justifica por el teorema de la convergencia dominada.

Vemos de (2.5) que la potencia media en sentido estadístico y en sentido temporal,  $P_{XX}$  se puede expresar, en virtud de (??) y de que  $R_{XX}(t, t) = \text{E}\{|X(t)|^2\}$ , como

$$P_{XX} = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle R_{XX}(t, t) \rangle_T = \langle R_{XX}(t, t) \rangle \quad (2.7)$$

es decir, que la potencia media es igual al promedio temporal del valor cuadrático medio del proceso. En otros términos, la potencia media es igual al promedio temporal de la función

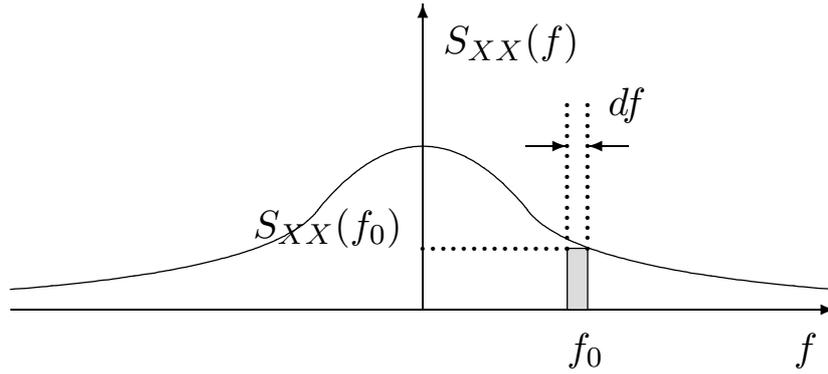


Figura 2.1: La potencia del proceso  $X(t)$  en una banda de ancho  $df$  alrededor de  $f_0$  es  $S_{XX}(f_0) df$

de autocorrelación del proceso para diferencia de tiempos nula. Es interesante notar que esta aseveración es válida para cualquier proceso estocástico con potencia media finita, estacionario en algún sentido o no. Cuando el proceso es *ESA* resulta que  $R_{XX}(t, t) = R_X(0)$  independientemente de  $t$ , entonces  $\langle R_{XX}(t, t) \rangle = \langle R_X(0) \rangle = R_X(0)$ . En consecuencia, para *PAESA* la autocorrelación para retardo cero da la potencia media del proceso. Para un proceso estocástico general la autocorrelación para retardo cero es  $R_{XX}(t, t)$  y representa la potencia instantánea en  $t$ ; mientras que por supuesto, su promedio temporal da la potencia media  $P_{XX}$ .

La ecuación (2.6) conduce a la siguiente

**Definición 2.2.1 (Densidad espectral de potencia.)** Sea  $X(t)$  un proceso estocástico con potencia media finita, entonces la densidad espectral de potencia  $S_{XX}(f)$  es

$$S_{XX}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E\{|X_T(f, \zeta)|^2\}}{T} \quad (2.8)$$

De (2.6) se aprecia fácilmente el significado de la densidad espectral de potencia que describe cómo se reparte la potencia de un PA en función de la frecuencia. Más específicamente,  $S_{XX}(f_0) df$  es la potencia del proceso en una banda de ancho  $df$  alrededor de  $f_0$ , ver fig. 2.1.

**Ejemplo 2.2.1 Coseno con fase aleatoria**

Consideremos el proceso  $X(t, \vartheta) = A \cos(\omega_0 t + \vartheta)$  donde  $A$  y  $\omega_0$  son constantes reales y positivas, mientras que  $\vartheta$  es un ángulo de fase aleatorio con distribución uniforme  $\mathcal{U}(0, \pi/2)$ . Ya hemos visto que si la distribución de la fase fuera  $-\pi, \pi$  el proceso sería estacionario en sentido amplio. En este caso veremos que el proceso no es estacionario; calcularemos igualmente su potencia media, que por ser una señal cosenoidal sabemos que debe ser  $A^2/2$  y la densidad espectral por definición.

La función de autocorrelación para retardo cero es

$$R_{XX}(t, t) = E\{|X(t, \vartheta)|^2\} = A^2 E\{\cos^2(\omega_0 t + \vartheta)\}$$

y usando que  $\cos^2 \alpha = (1 + \cos(2\alpha))/2$  resulta

$$\begin{aligned} R_{XX}(t, t) &= \frac{A^2}{2} E\{1 + \cos(2\omega_0 t + 2\vartheta)\} = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(2\omega_0 t + 2\vartheta) d\vartheta = \\ &= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{4\pi} \int_{2\omega_0 t}^{2\omega_0 t + \pi} \cos(v) dv = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2\pi} \text{sen}(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Claramente la función de autocorrelación es función de  $t$  y el proceso no es estacionario ni *ESA*. Para calcular la potencia media recurrimos a (2.5) y entonces debemos promediar temporalmente la autocorrelación

$$E\{P_T\} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left( \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2\pi} \sin(\omega_0 t) \right) dt = \frac{A^2}{2} - \left[ \frac{A^2}{2\omega_0\pi} \cos(\omega_0 t) \right]_{T/2}^{-T/2} = \frac{A^2}{2} \quad (2.9)$$

y finalmente

$$P_{XX} = \lim_{T \rightarrow \infty} E\{P_T\} = \frac{A^2}{2}$$

como esperábamos.

Ahora calcularemos la densidad espectral de potencia  $S_{XX}(f)$  por definición. Para ello, el proceso truncado es  $X_T(t, \vartheta) = A \cos(\omega_0 t + \vartheta) \Pi(t/T)$  y su transformada de Fourier es la convolución de la transformada de cada realización (fácil de hallar analíticamente en este ejemplo)

$$X(f, \vartheta) = \frac{A}{2} e^{j2\pi f\vartheta/\omega_0} \{ \delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) \}$$

con la transformada del cajón  $AT \operatorname{sinc}(fT)$ . Es decir, que

$$X_T(f, \vartheta) = \frac{AT}{2} \{ e^{j\vartheta} \operatorname{sinc}(T(f - f_0)) + e^{-j\vartheta} \operatorname{sinc}(T(f + f_0)) \}$$

y luego el módulo al cuadrado resulta

$$|X_T(f, \vartheta)|^2 = \frac{A^2 T^2}{4} \{ \operatorname{sinc}^2(T(f - f_0)) + \operatorname{sinc}^2(T(f + f_0)) + 2\Re \{ e^{j2\vartheta} \operatorname{sinc}(T(f - f_0)) \operatorname{sinc}(T(f + f_0)) \} \}$$

dividiendo por  $T$  y tomando esperanza matemática queda

$$\frac{E\{|X_T(f, \vartheta)|^2\}}{T} = \frac{A^2}{4} \{ T \operatorname{sinc}^2(T(f - f_0)) + T \operatorname{sinc}^2(T(f + f_0)) + 2TE\{\cos(2\vartheta)\} \{ \operatorname{sinc}(T(f - f_0)) \operatorname{sinc}(T(f + f_0)) \} \}$$

Al tomar el  $\lim_{T \rightarrow \infty}$  los primeros dos términos convergen -en sentido distribucional- a  $\delta(f - f_0)$  y a  $\delta(f + f_0)$  respectivamente; mientras que el tercero tiende a cero. De manera que

$$S_{XX}(f) = \frac{A^2}{4} \{ \delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) \}$$

y además

$$P_{XX} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(f) df = 2 \frac{A^2}{4} = \frac{A^2}{2}$$

que coincide con el valor que obtuvimos basados en el promedio temporal de la autocorrelación. ■

### 2.2.1. Propiedades

Veamos ahora algunas de las propiedades más relevantes de la densidad espectral de potencia (DEP):

1. La DEP es una función real, positiva, de la frecuencia; o sea,  $S_{XX}(f) \geq 0$ . Esto es una consecuencia directa de la definición (2.8). Por otra parte, como representa la cantidad de potencia por unidad de ancho de banda, físicamente no podría ser otra cosa que real y positiva.
2. Cuando el proceso  $X(t)$  es puramente real o puramente imaginario, la DEP es una función par; es decir  $S_{XX}(f) = S_{XX}(-f)$ . Esto deriva de (2.8) pues el módulo al cuadrado de la transformada de Fourier de cada realización del proceso truncado es par con los procesos indicados, pero no lo es cuando el proceso es complejo en general.
3. El área bajo la curva de la DEP es igual a la potencia media, temporal y estadística, del proceso; o sea  $\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(f) df = \langle R_{XX}(t, t) \rangle$ . Esto resulta de las ecuaciones (2.5 – 2.7). O más aún, la potencia media de un proceso es el promedio temporal de su valor cuadrático medio. Cuando el proceso es *ESA* el área bajo la curva de la DEP es simplemente igual a la autocorrelación del proceso para retardo cero,  $R_{XX}(0)$ , o valor cuadrático medio.
4. La DEP y el promedio temporal de la función de autocorrelación son pares transformados de Fourier; es decir,  $\mathcal{F}\{\langle R_{XX}(t, t + \tau) \rangle(\tau)\} = S_{XX}(f)$  y  $\langle R_{XX}(t, t + \tau) \rangle(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{XX}(f)\}$ . Este importantísimo resultado se conoce como *Teorema de Wiener – Khinchine* y daremos su demostración sólo para PAESA en el apéndice D. Cabe destacar que el teorema provee la manera más sencilla de obtener la autodensidad espectral calculando la transformada de Fourier de la función de autocorrelación en el caso de PAESA o la transformada de Fourier del promedio temporal de la función de autocorrelación, en el caso de procesos generales.

### 2.2.2. Ancho de banda equivalente

Por ahora no.

### 2.2.3. Ruido blanco

Ya hemos definido el ruido blanco en § ?? a partir de su función de autocorrelación. Puesto que  $R_{XX}(t_1, t_2) = \eta\delta(t_1 - t_2)$  resulta un proceso estacionario en sentido amplio y podemos escribir más sucintamente que  $R_{XX}(\tau) = \eta\delta(\tau)$ . Entonces su densidad espectral es

$$S_{XX}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \eta \quad (2.10)$$

como se ilustra en la figura 2.2. Observando la misma puede explicarse el nombre de ruido blanco ya que, a semejanza de lo que ocurre con la luz visible, cuando el espectro tiene la misma intensidad en cada uno de sus “colores” la luz se dice que es blanca.

El área de la delta de Dirac que es la autocorrelación suele llamarse intensidad del ruido blanco y vemos que es simplemente el valor de su densidad espectral de potencia. Es importante notar que tal valor NO es la potencia del ruido pues esta es infinita. También existe el *ruido blanco no estacionario* donde la intensidad es dependiente del tiempo, por ejemplo  $R_{XX}(t_1, t_2) = \eta(t_1)\delta(t_1 - t_2)$ . Es irrelevante si  $\eta$  es función de  $t_1$  o de  $t_2$ , lo que interesa es que ya no resulta homogéneo en tiempo. Aquí la denominación de ruido blanco es más difícil de justificar, pero se lo sigue denotando de esa manera aunque también suele llamárselos como procesos con correlación microscópica. Los procesos con correlación microscópica no constituyen meramente abstracciones sino que encuentran múltiples aplicaciones en sistemas como sonar (relevamiento del fondo submarino, búsqueda de bancos de peces, etc.) y en radar (guía de aviones para entrar

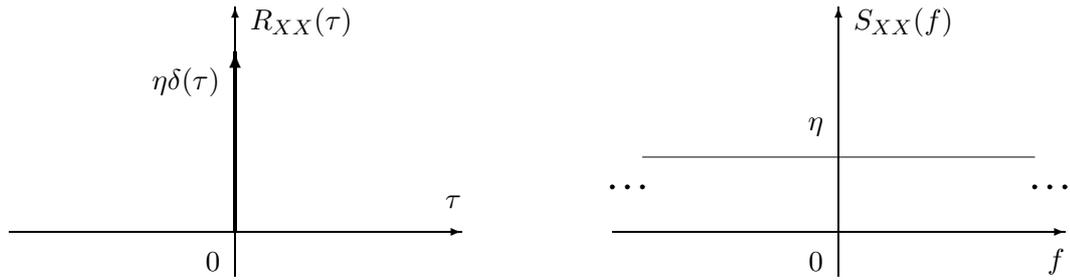


Figura 2.2: Función de autocorrelación y densidad espectral de potencia del ruido blanco *ESA*.

a un aeropuerto, sondeo de frentes de tormenta, relevamiento de propiedades de la superficie terrestre -cosechas, humedad, perfil, composición- desde satélites o aviones, etc.)

Una de las formas más frecuentes del ruido blanco es el llamado *ruido blanco gaussiano*. Es simplemente un proceso estocástico de ruido blanco cuya distribución de amplitudes es gaussiana. Es decir, supongamos que el proceso es  $W(t)$  con  $R_{WW}(\tau) = \eta_w \delta(\tau)$ . Entonces para un instante arbitrario  $t_1$  consideremos la variable aleatoria  $W(t_1)$ . Por lo pronto, su distribución de probabilidades es gaussiana. Por la forma de la función de autocorrelación inmediatamente podemos establecer que  $W(t_1)$  tiene media nula, aunque su varianza es “infinita”. Frecuentemente en forma errónea se dice que tiene varianza  $\eta_w$ , pero esto es *incorrecto* ya que  $\eta_w$  es la densidad espectral de potencia. Seleccionando otros instantes de tiempo  $t_2, t_3, \dots$ , se pueden analizar las distribuciones conjuntas de dos variables aleatorias  $W(t_1), W(t_2)$ ; de tres  $W(t_1), W(t_2), W(t_3)$ ; etc. Por hipótesis esas distribuciones son gaussianas, pero lo que resulta interesante es observar que la covarianza de cualquier colección de VA  $W(t_i), W(t_j)$  es nula para todo  $t_i \neq t_j$ , o sea que si  $\tau = t_i - t_j \neq 0$  es  $R_{WW}(\tau) = 0$ . En consecuencia,  $W(t_i), W(t_j)$  son *independientes*  $\forall t_i \neq t_j$ .

Ya hemos dicho que en la realidad es imposible encontrar un proceso que sea puramente de ruido blanco y que en su forma exacta es sólo una abstracción matemática, aunque extremadamente útil. En la práctica lo que se encuentra muy frecuentemente es ruido cuya densidad espectral de potencia es constante en una banda de frecuencias  $(-B/2, B/2)$ . En ese caso, la función de autocorrelación y la dep son las mostradas en la figura 2.3 {Note que debido a un error, la figura tiene mal marcados los puntos del eje de frecuencias que deben ser “ $-B/2$ ” y “ $B/2$ ”. Además en el eje de ordenadas de la autocorrelación debe leerse  $B\eta$  en lugar de  $2B\eta$ .}

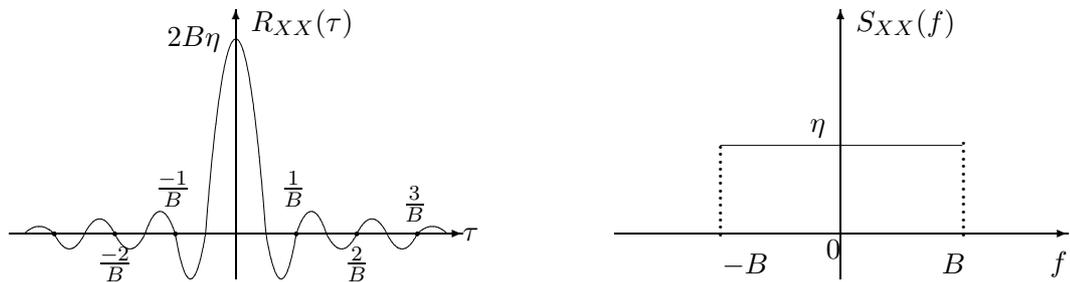


Figura 2.3: Función de autocorrelación y densidad espectral de potencia de ruido que puede considerarse “blanco” (siempre y cuando no interese observar correlaciones de VA del proceso separadas menos de unas 3 o 4 veces  $1/B$ , dependiendo de la aplicación y precisión de cálculo deseados).

## 2.3. Interdensidad espectral

### 2.3.1. Motivación

Vimos que la autodensidad espectral describía la repartición de potencia en función de la frecuencia de un proceso estocástico. A través del teorema de Wiener-Khinchine vimos cómo hay una estrecha relación entre la autocorrelación y la densidad espectral de potencia pues son pares transformados de Fourier. En esta sección veremos que se pueden analizar las propiedades conjuntas de dos procesos en el dominio de la frecuencia con un tratamiento similar al que hemos hecho para un sólo proceso.

Ni bien consideramos en un problema dos procesos estocásticos aparecen inmediatamente en el análisis las funciones de intercorrelación. Si hiciéramos ese mismo análisis en el dominio de la frecuencia veríamos que aparece la necesidad de contar con la transformada de Fourier de la intercorrelación. En efecto, supongamos que sabemos que el proceso  $Z(t)$  se construye de la suma de los procesos  $X(t)$  e  $Y(t)$ , tal como explicamos en §2.2. Consideremos la función de autocorrelación de  $Z$  que resulta

$$\begin{aligned} R_{ZZ}(t_1, t_2) &= E\{Z(t_1)Z(t_2)^*\} = E\{(X(t_1) + Y(t_1))(X(t_2) + Y(t_2))^*\} = \\ &= R_{XX}(t_1, t_2) + R_{YY}(t_1, t_2) + R_{XY}(t_1, t_2) + R_{YX}(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

No podríamos tomar simplemente la transformada de Fourier de esta expresión. Si se tomara antes el promedio temporal de cada lado de la igualdad entonces al menos sabemos que existirían las transformadas de Fourier de los términos que involucran autocorrelaciones, por lo visto en la sección §2.2.1. El promedio temporal del lado izquierdo también tendría por transformada de Fourier la auto-dep del proceso  $Z$ ,  $S_{ZZ}(f)$ . Sin embargo, queríamos estar seguros del significado de los términos que surgen del tercer y cuarto términos del lado derecho en (2.11).

Una inquietud en similar dirección surge cuando se analizan las correlaciones entre procesos estocásticos a la entrada y a la salida de un sistema lineal. El análisis en el dominio temporal se puede efectuar mediante las apropiadas funciones de correlación. Pero así como el análisis frecuencial suele aportar nuevas herramientas para describir el comportamiento de los sistemas lineales excitados con entradas determinísticas; esperamos poder hacer también análisis frecuencial cuando las entradas son aleatorias. Y en ese caso necesitaremos ver la relación entre intercorrelaciones (de la entrada y salida) y la transformada de Fourier de cada realización.

### 2.3.2. Interdensidad espectral e intercorrelación

Consideremos los procesos estocásticos  $X(t)$  e  $Y(t)$  y realizaciones genéricas de los mismos  $X(t, \zeta)$  e  $Y(t, \xi)$ . Por las razones expuestas cuando consideramos un único proceso no podemos esperar que tener en cuenta en forma separada transformadas de Fourier de las realizaciones aisladas nos de mucha información de lo que sucede en forma conjunta con los dos procesos. Replicamos las ideas expuestas en §2.2 y truncamos las realizaciones al intervalo  $(-T/2, T/2)$ . Bajo hipótesis poco restrictivas las realizaciones truncadas resultan Fourier transformables, es decir existen

$$\begin{aligned} X_T(f, \zeta) &= \mathcal{F}\{X(t, \zeta) \square(t/T)\} \\ Y_T(f, \xi) &= \mathcal{F}\{Y(t, \xi) \square(t/T)\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

La energía conjunta de las dos realizaciones se obtiene integrando el producto de las realizaciones truncadas entre  $-T/2$  y  $T/2$ . Dividiendo por  $T$  se obtiene la variable aleatoria  $P_T(\zeta, \xi)$  que

representa el promedio temporal de la potencia conjunta de las realizaciones truncadas. Es decir,

$$P_T(\zeta, \xi) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t, \zeta)Y(t, \xi)^* dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(f, \zeta)Y_T(f, \xi)^* df \quad (2.13)$$

donde la última igualdad se obtiene de usar el teorema de Rayleigh [?]. Para obtener una potencia conjunta que sea propiedad de los dos procesos y no meramente de las realizaciones elegidas, debemos promediar la variable aleatoria  $P_T(\zeta, \xi)$  entre todas las realizaciones. Además, para llevar la potencia conjunta desde el intervalo  $(-T/2, T/2)$  hasta cubrir las realizaciones en forma total se deberá tomar el límite para  $T$  tendiendo a infinito. Ya hemos razonado en §2.2 sobre el orden en que deben llevarse a cabo estas operaciones. Por lo tanto, tomando la esperanza sobre todas las realizaciones de  $X$  e  $Y$ , es decir sobre todos los pares  $(\zeta, \xi)$ , se obtiene

$$P_T = E\{P_T(\zeta, \xi)\} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_{XY}(t, t)dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} E\{X_T(f)Y_T(f)^*\} df \quad (2.14)$$

Finalmente, tomando el límite se obtiene la potencia total conjunta de los procesos  $P_{XY}$  como

$$P_{XY} = \lim_{T \rightarrow \infty} P_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_{XY}(t, t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E\{X_T(f)Y_T(f)^*\}}{T} df$$

La primera igualdad indica que la potencia media conjunta de los dos procesos está dada por el promedio temporal de la función de intercorrelación con retardo cero. Invirtiendo el papel de  $X(t)$  e  $Y(t)$  se pueden obtener relaciones para la potencia  $P_{YX}$ . La última igualdad sirve para definir la interdensidad espectral

**Definición 2.3.1 (Interdensidad espectral de potencia)** Sean  $X(t)$  e  $Y(t)$  dos procesos estocásticos con potencia media finita, entonces la interdensidad espectral de potencia  $S_{XY}(f)$  es

$$S_{XY}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E\{X_T(f)Y_T(f)^*\}}{T} \quad (2.15)$$

y

$$S_{YX}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E\{Y_T(f)X_T(f)^*\}}{T} \quad (2.16)$$

En consecuencia la potencia media conjunta puede obtenerse como

$$P_{XY} = \langle R_{XY}(t, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(f) df \quad (2.17)$$

según sea la información de que dispongamos; es decir intercorrelación o interdensidad espectral de potencia.

Observemos que de manera completamente similar se puede desarrollar el concepto de la potencia media conjunta  $P_{YX}$  y las relaciones

$$P_{YX} = \langle R_{YX}(t, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_{YX}(f) df \quad (2.18)$$

Insistimos en el significado de la interdensidad espectral  $S_{XY}(f_0)$  representando la potencia media  $S_{XY}(f_0) df$  que tienen en común los procesos  $X$  e  $Y$  en una banda de ancho  $df$  alrededor de la frecuencia  $f_0$ .

### 2.3.3. Propiedades

Ahora presentamos algunas de las propiedades más relevantes de la interdensidad espectral de potencia (IDEP):

1. Es una función con cierta simetría  $S_{XY}(f) = S_{YX}^*(f)$ .
2. El área bajo la curva de la IDEP es igual a la potencia media, temporal y estadística, conjunta de los procesos. Cuando el proceso es *ESA* el área bajo la curva de la IDEP es igual a la intercorrelación del proceso para retardo cero,  $R_{XY}(0)$ .
3. La IDEP y el promedio temporal de la función de intercorrelación son pares transformados de Fourier; es decir,  $\mathcal{F}\{\langle R_{XY}(t+\tau, t) \rangle(\tau)\} = S_{XY}(f)$  y  $\langle R_{XY}(t+\tau, t) \rangle(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{XY}(f)\}$ .

Ejemplo: proceso retardado

### 2.3.4. Relación con la densidad espectral de energía

Se sabe que si  $g(t)$  y  $h(t)$  son dos señales determinísticas de energía con transformada de Fourier  $G(f)$  y  $H(f)$  respectivamente, entonces se define la autocorrelación de  $g$  con  $h$  como  $\gamma_{gh}(\tau)$  y está dada por

$$\gamma_{gh}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t + \tau) h^*(t) dt \quad (2.19)$$

Aplicando directamente el teorema de Rayleigh resulta que la interdensidad espectral de energía está dada por

$$\Gamma_{gh}(f) = \mathcal{F}\{\gamma_{gh}(\tau)\} = G(f)H^*(f) \quad (2.20)$$

Estas fórmulas pueden ser especializadas para la autocorrelación de la señal  $g(t)$ ,  $\gamma_{gg}(\tau)$  resultando en

$$\gamma_{gg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t + \tau) g^*(t) dt \quad (2.21)$$

y en la autodensidad espectral de energía de  $g$

$$\Gamma_{gg}(f) = \mathcal{F}\{\gamma_{gg}(\tau)\} = |G(f)|^2 \quad (2.22)$$

Puede observarse claramente el paralelo con el desarrollo que hemos presentado para los procesos estocásticos; en particular para el teorema de Wiener-Khintchine. Este paralelo es tan notorio que sugiere el camino para un tratamiento directo de la transformada de Fourier de procesos.

Esquemáticamente, definir el proceso estocástico (en la frecuencia) “transformada de Fourier de las realizaciones de un PA (en el tiempo)” como

$$X(f, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t, \zeta) e^{-j2\pi ft} dt$$

similarmente para el proceso  $Y(t, \zeta)$  se define su transformada de Fourier  $Y(f, \zeta)$ . Luego, motivado por las relaciones determinísticas, definir

$$S_{XY}(f) = E\{X(f, \zeta)Y^*(f, \zeta)\} \text{ y } S_{XX}(f) = E\{X(f, \zeta)X^*(f, \zeta)\} = E\{|X(f, \zeta)|^2\} \quad (2.23)$$

Esta forma tan sencilla de plantear la densidad espectral de potencia para un proceso no es rigurosa, dentro de los elementos con que nos hemos manejado. Asimismo origina algunos *equivocos* como creer que uno puede “estimar” la autodensidad espectral de potencia tan simplemente como tomando el módulo al cuadrado de la transformada de Fourier de una realización de un proceso. Sin embargo, aún cuando solamente desde un punto de vista formal, usar las expresiones (2.23) resulta cómodo y rápido.

## **2.4. Estimación - medición de la función de correlación y la DEP**

Por ahora no.

## **2.5. SLIT**

## **2.6. Secuencias aleatorias**

### **2.6.1. Wiener**

Discusión. NO tanto W-K sino toda la metodología Wiener con promedios temporales... (Koopmans, Priestley, Jenkins-Watts...) Doob, Gnedenko y Teor. de Bochner.. pondremos algo?

# Apéndice A

## Distribución conjunta de 2 o más variables aleatorias

## Apéndice B

otra más no en la línea principal

# Apéndice C

## Slutsky y condics para ergod

# Apéndice D

## Autodensidad espectral y autocorrelación

En la §2.2.1 mencionamos el teorema de Wiener-Khinchine que vincula la función de autocorrelación con la autodensidad espectral de un proceso.

Demostraremos este teorema suponiendo que el proceso estocástico  $X(t, \zeta)$  es estacionario en sentido amplio. De acuerdo con lo expuesto en (2.2) la densidad espectral de un proceso estocástico se define como

$$S_{XX}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E\{|X_T(f, \zeta)|^2\}}{T} \quad (\text{D.1})$$

donde  $X_T(f, \zeta)$  es la transformada de Fourier de una realización genérica  $\zeta$  del proceso, truncada al intervalo  $(-T/2, T/2)$ ; o sea

$$X_T(f, \zeta) = \int_{-T/2}^{T/2} X(t, \zeta) e^{-j2\pi ft} dt$$

Puesto que

$$X_T(f, \zeta)^* = \int_{-T/2}^{T/2} X(t, \zeta)^* e^{j2\pi ft} dt$$

Entonces  $|X_T(f, \zeta)|^2$  resulta

$$|X_T(f, \zeta)|^2 = X_T(f, \zeta) X_T(f, \zeta)^* = \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} X(t_1, \zeta) e^{-j2\pi ft_1} X(t_2, \zeta)^* e^{j2\pi ft_2} dt_1 dt_2$$

Tomando la esperanza matemática de ambos miembros, e introduciéndola dentro de la integral doble (se puede pues ambas integrales de la esperanza del integrando existen),

$$\begin{aligned} E\{|X_T(f, \zeta)|^2\} &= \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} E\{X(t_1, \zeta) X(t_2, \zeta)^*\} e^{j2\pi f(t_2 - t_1)} dt_1 dt_2 = \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} R_{XX}(t_1, t_2) e^{j2\pi f(t_2 - t_1)} dt_1 dt_2 \quad (\text{D.2}) \end{aligned}$$

Hasta este punto no hemos usado que el proceso es *ESA*. Ahora introducimos la función de autocorrelación de la única variable retardo  $R_{XX}(t_1 - t_2) = R_{XX}(t_1, t_2)$ . Recordemos que para evitar la proliferación de nomenclatura usamos los mismos símbolos  $R_{XX}$  para representar la función de autocorrelación general de dos variables  $R_{XX}(t_1, t_2)$  como la función de autocorrelación de un proceso *ESA* que resulta ser función solamente del retardo  $t_1 - t_2$ ; aunque

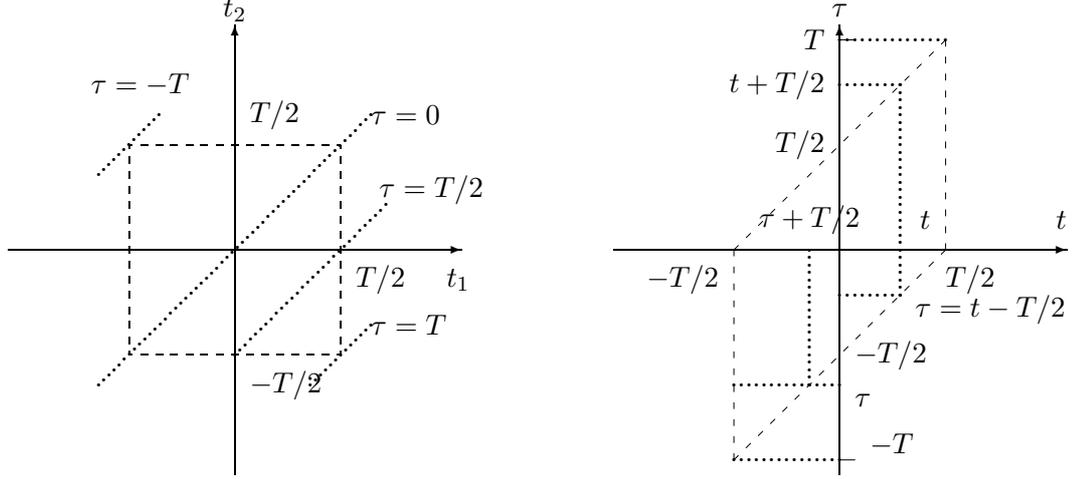


Figura D.1: Cambio de variables en (D.3). A izquierda: región de integración para (D.2). A la derecha: región de integración para (D.3) y para (D.4).

formalmente se trata de dos funciones distintas. Además haciendo el cambio de variables  $t = t_1$  y  $\tau = t_1 - t_2$  de la ecuación anterior se obtiene

$$E\{|X_T(f, \zeta)|^2\} = \int_{-T/2}^{T/2} \left( \int_{t-T/2}^{t+T/2} R_{XX}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right) dt \quad (D.3)$$

Los límites de integración de (D.3) se obtienen de la figura D.1. Integrando en (D.3) externamente en la variable  $\tau$  e internamente en  $t$  se obtiene,

$$\begin{aligned} E\{|X_T(f, \zeta)|^2\} &= \\ &= \int_{-T}^0 \left( \int_{-T/2}^{t+T/2} R_{XX}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} dt \right) d\tau + \int_0^T \left( \int_{\tau-T/2}^{T/2} R_{XX}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} dt \right) d\tau \\ &= \int_{-T}^0 R_{XX}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} \left( \int_{-T/2}^{\tau+T/2} dt \right) d\tau + \int_0^T R_{XX}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} \left( \int_{\tau-T/2}^{T/2} dt \right) d\tau \\ &= \int_{-T}^0 R_{XX}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} (T + \tau) d\tau + \int_0^T R_{XX}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} (T - \tau) d\tau \\ &= \int_{-T}^T R_{XX}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} (T - |\tau|) d\tau \end{aligned} \quad (D.4)$$

Como (D.1) requiere dividir por  $T$ , queda

$$\frac{E\{|X_T(f, \zeta)|^2\}}{T} = \int_{-T}^T R_{XX}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} \left( 1 - \frac{|\tau|}{T} \right) d\tau$$

Notemos que usando la función triángulo  $\wedge(t/T) = (1 - |\tau|/T) \square(t/T)$  podemos escribir la ecuación anterior como

$$\frac{E\{|X_T(f, \zeta)|^2\}}{T} = \int_{-\infty}^{\infty} (R_{XX}(\tau) \wedge(t/T)) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (D.5)$$

Suponiendo que existe (de otro modo no tendría sentido el teorema de Wiener-Khintchine) y llamando  $S(f)$  a la transformada de Fourier de la autocorrelación  $R_{XX}(\tau)$ , es decir  $S(f) =$

$\mathcal{F}\{R_{XX}(\tau)\}$ ; obtenemos

$$\frac{\mathbb{E}\{|X_T(f, \zeta)|^2\}}{T} = S(f) * T \text{sinc}^2(fT) \quad (\text{D.6})$$

Para cumplir con (D.1) debemos hacer tender  $T$  a infinito. Como  $S(f)$  no depende de  $T$ , y la segunda función tiende a una delta de Dirac; resulta que el lado derecho de (D.6) es la convolución de  $S(f)$  con una delta de Dirac entonces,

$$S_{XX}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}\{|X_T(f, \zeta)|^2\}}{T} = S(f) = \mathcal{F}\{R_{XX}(\tau)\} \quad (\text{D.7})$$

que es lo que pretendíamos demostrar.