Facultad de Ingeniería

# SEÑALES Y SISTEMAS
## Clase 2

Carlos H. Muravchik

09 de Marzo de 2020



## Noticias Administrativas

1. ¿Se inscribió en Facultad? SIU-Guaraní
2. ¿Vió la página de la cátedra? http://www.ing.unlp.edu.ar/senysis/
3. Práctica 0: Repaso temas aleatorios (otro Clases 4-6)
4. Práctica: comienzan los problemas de T.P. No. 1.

# Por su *variable independiente* - 1

Número de variables independientes

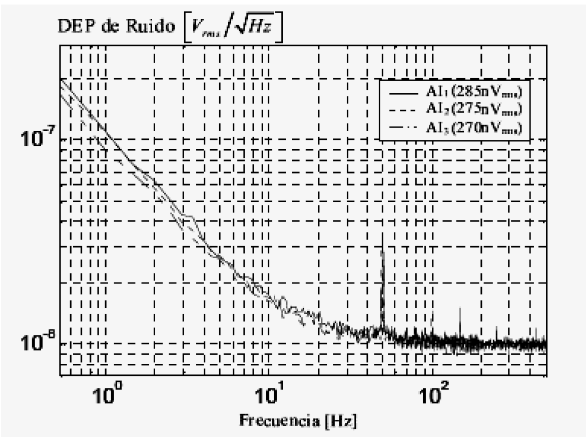
- 1 (1D): tratadas en SyS
- 2 (2D), 3 (3D): imágenes rasterizadas (TV, monitor); cortes tomográficos (imágenes de resonancia magnética, de tomografía computada de rayos X, de emisión de positrones, etc), sensado remoto... (pixels, voxels)
- Múltiples (MD): multidimensionales



# Variable independiente

La variable independiente no tiene por qué ser siempre “tiempo”.

**Ejemplo:** densidad de potencia de ruido en un amplificador



# Por su *variable independiente* - 2

## Tipo de Dominio

$$f : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$$

- SVIC: Señal de Variable Independiente Continua (naturalmente SVIC o por reconstrucción de SVID). Funciones $\boxed{f(t)}$ con $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$ o un intervalo $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$
- SVID: Señal de Variable Independiente Discreta (naturalmente SVID o por muestreo de SVIC). Secuencias $\boxed{f[n]}$ con $\mathcal{D} = \mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ o un intervalo $\mathcal{I} \in \mathbb{Z}$.



# Por su rango o *amplitudes* 1

## Rango de la función o secuencia

$$f : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$$

- Continuo: Las amplitudes toman valores que pertenecen a $\mathcal{R} \equiv$ intervalo de $\mathbb{R}$.

  Ejemplos: tensión eficaz de línea, temperatura promedio del día en un invernáculo, presión intraventricular del corazón, tensión sobre el cuero cabelludo de un electrodo de EEG

# Por su rango o *amplitudes* 2

$$f : \mathcal{D} \to \mathcal{N}$$

- Discreto: Las amplitudes pueden tomar sólo un número contable de valores; p.ej.: 2 niveles (o señal binaria); o $\mathcal{N} \equiv$ intervalo de $\mathbb{Z}$.

  Ejemplos: señal de manipulador telegráfico (idealizada), número de requerimientos de llamado a una central telefónica, número de fotones que llegan a un fotodiodo, número de autos que pasan por "verde" de un semáforo, códigos para detección y corrección de errores, códigos para encriptación y seguridad.



# Tipos de señales

- Analógica: SVIC y Amplitud continua
- Muestreada: SVID y Amplitud continua
- Cuantizada: SVIC y Amplitud discreta
- Digital: SVID y Amplitud discreta

# Tipos de señales

### Por su naturaleza 1

**Realización:** señal que se toma de una experiencia sobre una magnitud física.

- Determinística: describible para todo valor de la variable indep'te por una función matemática (sin variables aleatorias). Al repetir una experiencia, cada realización da la misma señal.
  Ejemplo: $x(t) = A\cos(2\pi f_o t + \phi)$, con $A, f_0, \phi$ constantes.

Señales predecibles en todo su dominio.



# Tipos de señales

**Notación:** Variable aleatoria (VA).

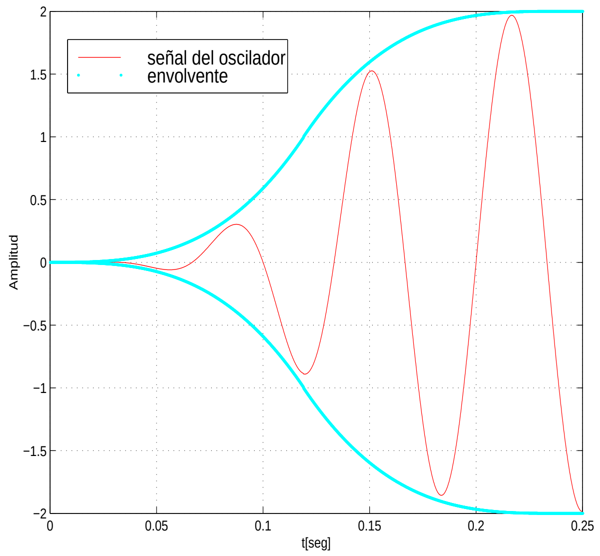
### Por su naturaleza 2

- Aleatoria: no se puede describir por una función matemática sin recurrir a un número (finito o infinito) de variables aleatorias. Al repetir una experiencia, todas las realizaciones difieren entre sí. La colección o *ensemble* de realizaciones se denomina PROCESO ESTOCÁSTICO
  Ejemplos:
  Con una VA: $x(t) = A\cos(2\pi f_o t + \phi)$ con $\phi$ una VA distribuida uniformemente en $[-\pi, \pi)$.
  Con infinitas VA: proceso independiente e idénticamente distribuido *iid* ("ruido").

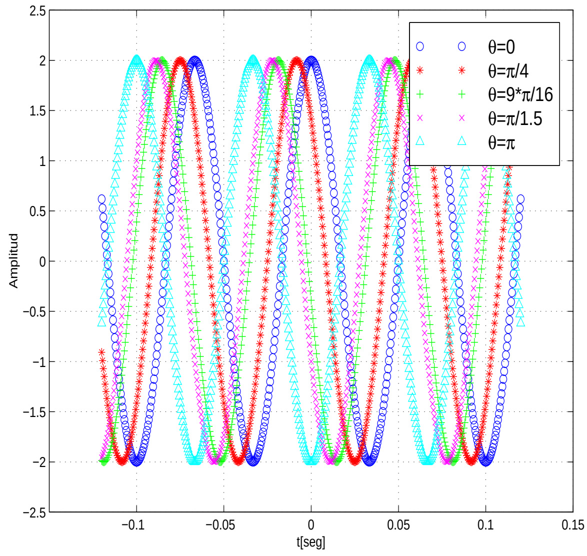
Señales no predecibles en todo su dominio, a menos que se estimen una o varias VA.

# Señales aleatorias 1

Una *aproximación* de la tensión de salida de un generador senoidal desde su inicio



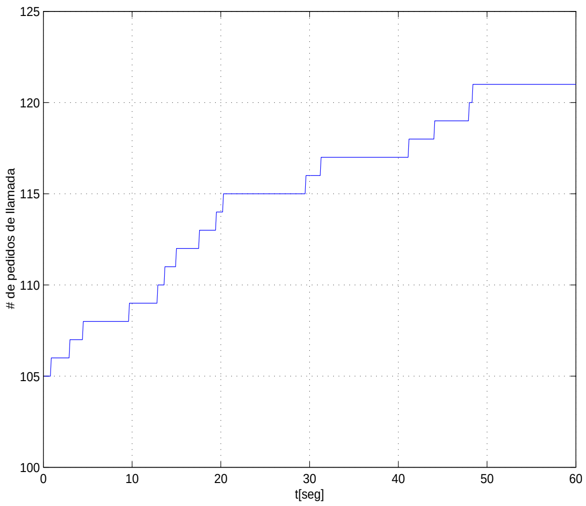

Realizaciones de un generador senoidal *modelado* como proceso estocástico

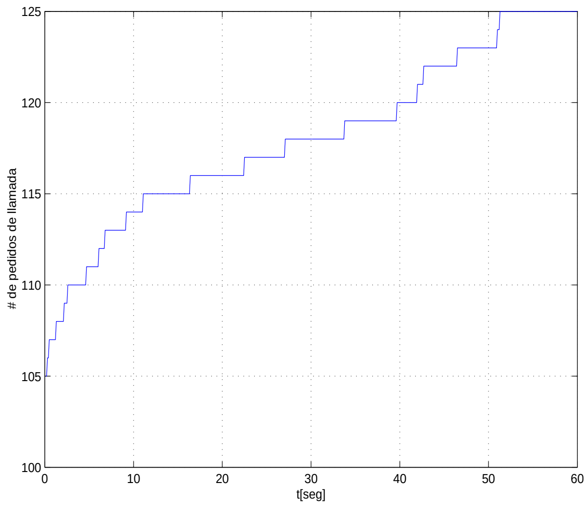





# Señales aleatorias 2

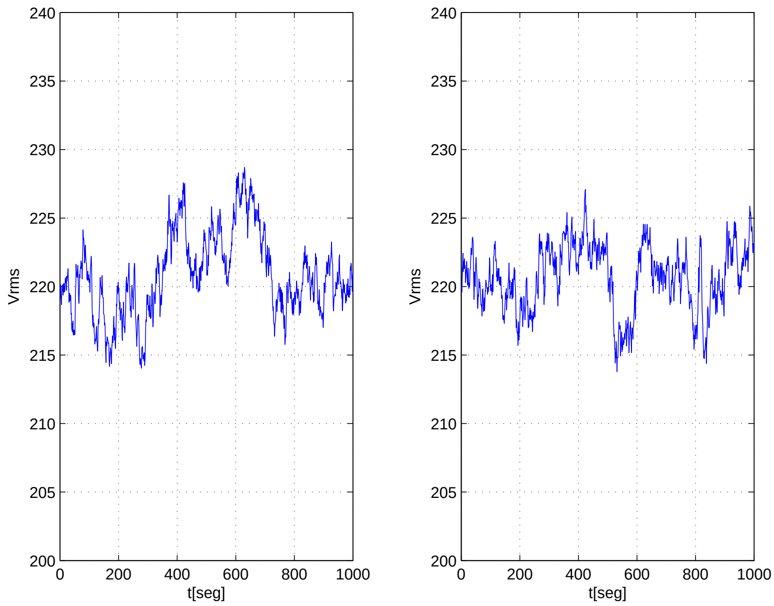
Número de llamadas a una central telefónica en una hora pico



# Señales aleatorias 3

## Registros de tensión eficaz de línea






# Señales aleatorias 4

Se puede ir leyendo la primera parte de “Tópicos de procesos estocásticos” disponible en

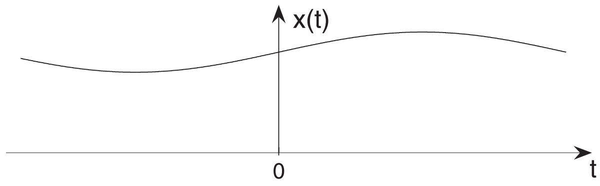
http://www.ing.unlp.edu.ar/senysis/ayudas.htm

o mejor, cualquier buen libro de los indicados en la bibliografía.

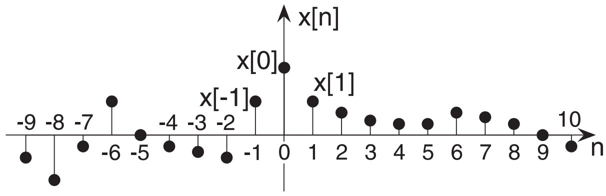
Lo anteriormente descripto no es la única forma posible de manejar **incertidumbre**; existen por ejemplo, las señales caóticas,
fractales, etc.
*Para mantener la simplicidad, no las trataremos en SyS.*

# Señales, secuencias. VI: tiempo, índice

SVIC




SVID




No “hay” señal entre muestras; no está definida



# Señales usuales

SVIC

- escalón $\rightarrow u(x)$
- cajón $\rightarrow \sqcap(x)$

.

.

- triángulo $\rightarrow \wedge(x)$

.

- exponencial $\rightarrow e^{cx}$, $c \in \mathbb{C}$
- seno y coseno $\rightarrow$ $\text{sen}(2\pi f_0 t + \vartheta)$
- sinc $\rightarrow$ $\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}$
- sind $\rightarrow$ $\text{sind}_N(x) = \frac{\text{sen}(\pi N x)}{\text{sen}(\pi x)}$

SVID

- escalón $\rightarrow u[n]$
- cajón $\rightarrow \mathcal{R}_N[n]$ de $N$-puntos, sólo para $N$ impar
- triángulo $\rightarrow$ no lo definimos
- exponencial $\rightarrow e^{cn}$, $c \in \mathbb{C}$
- seno y coseno $\rightarrow$ $\text{sen}(2\pi f_0 n + \varphi)$
- sinc $\rightarrow$ $\text{sinc}[n] = \frac{\text{sen}(\pi F n)}{\pi n}$, $|F| < 1/2$
- .

  .

## Señales usuales

- gráficos pizarrón
- gráficos computadora

Para jugar:

```
 xd=(1:1999)/2000;
yd=sin(pi*xd*11)./sin(pi*xd);
plot(xd,yd);
```

¿Puede explicar qué pasa en $xd = 1$?

**Intermedio: 5 minutos**



## Delta de Dirac – SVIC

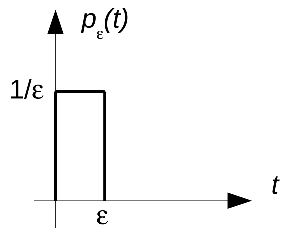
Importante para

- representar condiciones iniciales de sistemas (en circuitos por ej, carga inicial de un capacitor)
- para poder transformar señales periódicas (Fourier, Laplace)
- para definir la respuesta impulsional de sistemas lineales

entre otros usos.

# Delta de Dirac – Idea

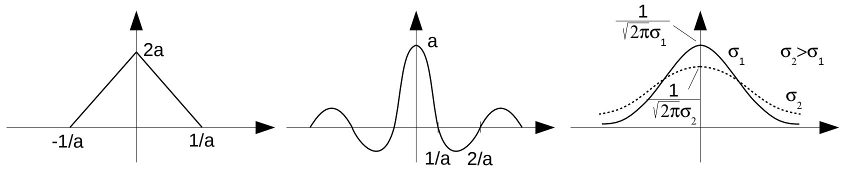
Teoría de distribuciones o
Funciones generalizadas




- Área del Pulso-límite $\int \lim_{\epsilon\to 0} p_\epsilon(\tau)d\tau = 0$ pero como $\lim_{\epsilon\to 0}\int p_\epsilon(\tau)d\tau = 1$;
- *adoptamos* $\int \delta(\tau)d\tau = 1$ *atribuyendo* a $\delta(\tau)$ ser $\lim_{\epsilon\to 0} p_\epsilon(\tau)$
- Representantes de la Delta (“integral=1; soporte→0”)

$$\lim_{a\to\infty} 2a\bigwedge(ax); \quad \lim_{a\to\infty}\frac{\text{sen}(\pi a x)}{\pi x}; \quad \lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-x^2/2\sigma^2}$$

y muchas otras






# Delta de Dirac – Propiedades 1

- Área de la delta
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx = 1$$
- Igualdad en sentido distribucional $\delta_{LI}(x)$“$=$”$\delta_{LD}(x)$ es
$$\int \delta_{LI}(x)\Phi(x)dx = \int \delta_{LD}(x)\Phi(x)dx \qquad \forall\Phi(x)\in FPB$$
donde *FPB* es la clase de funciones que se “portan bien”.
- Expansión-Compresión
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(ct)dt = \frac{1}{c}\int_{-c\infty}^{c\infty}\delta(x)dx = \frac{1}{|c|}$$
- No se puede definir, en general, el producto de distribuciones de manera consistente

# Delta de Dirac – Propiedades 2

- Extracción
$$\int_a^b \delta(x) f(x) dx = f(0)$$
siempre que $a < 0 < b$
- Derivada
$$\int_a^b \delta^{(n)}(x) f(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(0)$$
con $a < 0 < b$, donde $f^{(n)}(x)$ es la derivada $n$-sima de $f(x)$
- $\delta(x)$ tiene área 1; $A\delta(x)$ tiene área $A$

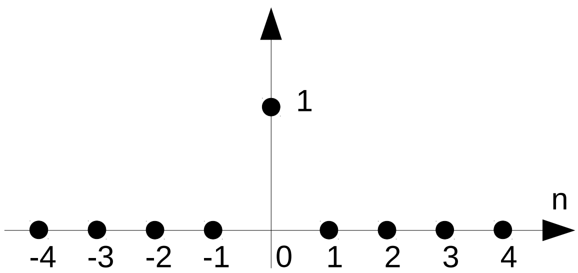


# Delta de Kronecker – SVID

- Juega un papel similar a la Delta de Dirac en SVIC
- Mucho más sencilla de tratar

**Definición:**
$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & si \quad n = 0 \\ 0 & si \quad n \neq 0 \end{cases}$$

Matlab: vector de índices, señal, plot



## Definiciones

1. **SVIC periódica:** $x(t)$ periódica de *período fundamental* $T$ si existe un $T \in \mathbb{R}$ de modo que $T$ es el mínimo $T > 0$ que satisface $x(t) = x(t+T)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
2. **SVID periódica:** $x[n]$ periódica de *período fundamental* $N$ si existe un $N \in \mathbb{N}$ de modo que $N$ es el mínimo que satisface $x[n] = x[n+N]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.



## SVIC periódicas

- Exponencial compleja; si $c = \omega + j\alpha$

$$e^{jct} = \underbrace{e^{-\alpha t}}_{\text{amortiguación}} \; \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{periódica}}$$

- Pulsación: $\omega$ rad/seg. Frecuencia: $\omega = 2\pi f$
- Periodicidad de $e^{j\omega t}$

$$e^{j2\pi ft} = e^{j2\pi f(t+T)} \qquad \Rightarrow \qquad e^{j2\pi fT} = 1$$
$$\Rightarrow 2\pi fT = 2\pi k; \qquad \text{con } fT = k \in \mathbb{Z} \quad \text{ó } T = k/f$$

- "mínimo $T > 0 \ldots$" $\Rightarrow k = 1$ si $f > 0$; ó $k = -1$ si $f < 0$
- Número de ciclos por segundo $= 1/T = |f|$

# SVIC periódicas

## Consecuencias

- A mayor $|\omega| = 2\pi/T$ mayor cantidad de oscilaciones por segundo
- $e^{j\omega t}$ es periódica $\forall \omega \in \mathbb{R}$
- Armónicos: dada $e^{j\omega_0 t}$; $\omega_0 \in \mathbb{R}$; $k\omega_0$, $k \in \mathbb{Z}$ son las frecuencias armónicas, que también dan SVIC periódicas
- Existe un infinito número de armónicos, que también dan SVIC periódicas $e^{jk\omega_0 t}$
- Algunos armónicos pueden serlo de una señal periódica de distinto período fundamental. P.ej.: el armónico $k/T$ con $T = qT'$ y $k = qk'$ y $q \in \mathbb{N}$ es en realidad la frecuencia $k'/T'$, $k'$-simo armónico de $1/T'$, de per. fundam. $T'$.

Ejemplo $e^{j2k\pi f_0 t}$. Matlab.



# SVID periódicas

- Exponencial compleja; si $c = \Omega + j\alpha$

$$e^{jcn} = \underbrace{e^{-\alpha n}}_{\text{amortiguación}} \quad \underbrace{e^{j\Omega n}}_{\text{periódica}}$$

- Exponencial imaginaria; si $e^{j\Omega n}$; $n \in \mathbb{Z}$
- Pulsación: $\Omega$ sin unidades o rad ($n$ es adimensional). "Frecuencia" (adimensional): $\Omega = 2\pi f$

$$\begin{array}{lcl} e^{j\Omega n} = e^{j\Omega(n+N)} & \Rightarrow & e^{j\Omega N} = 1 \\ \Rightarrow \Omega N = 2\pi m; & \text{con } fN = m \in \mathbb{Z} & \Rightarrow f = \frac{m}{N} \in \mathbb{Q} \end{array}$$

$\boxed{\text{es periódica sólo para } f \in \mathbb{Q}}$

- Armónicos: son los múltiplos de $1/N$, si $N$ es el período fundamental.

# SVID periódicas

## Consecuencias

- Sólo hay $N-1$ armónicos distintos asociados a una fundamental de período $N$. Es un número **finito** de armónicos.
- Si el período fundamental es $N$, los armónicos son $k/N$ con $k = 0, 1, \ldots, N-1$.
- Si $f = m/N$; $m > N$ entonces $m = kN + m'$, $(k, m') \in \mathbb{Z}$ y $m' < N$. Como $f = m/N = k + (m'/N) = k + f'$; luego $e^{j2\pi fn} = e^{j2\pi(m/N)n} = e^{j2\pi f'n}$ (periódica en $n$ con período fundam. $N$, pero *también* periódica en la variable continua $f$, con período fundamental 1).
- Algunos armónicos podrían tener distinto período fundamental. P.ej.: el armónico $k/N$ con $N = qN'$ y $k = qk'$ y $q \in \mathbb{N}$ es en realidad la frecuencia $k'/N'$ (fracción coprima) con per. fund. $N' = N/q$.



# SVID periódicas

## Más consecuencias

- A mayor $\Omega$ las pulsaciones (y frecuencias) se repiten en forma periódica. Sea $\Omega_0$ con período fundamental $N$ o sea $\Omega_0 N = 2\pi$ entonces,

$$(\Omega_0 + 2\pi k)N = 2\pi + 2\pi kN = 2\pi l \qquad l = 1 + kN \in \mathbb{Z}$$

- Se repiten las pulsaciones cada $2\pi$. A medida que se eleva la frecuencia no necesariamente aumentan los ciclos u oscilaciones por segundo

Ejemplo: $\cos(2\pi(1/3)n)$ y su armónico $\cos(2\pi(2/3)n)$.
Considere $\cos(2\pi(3/3)n)$ y $\cos(2\pi(4/3)n)$
Matlab: el ejemplo con otra frecuencia. Ver $\cos(2\pi(1/110)^{1/2}n)$

# Señal discreta periódica - Ejemplo numérico

Sinusoide con $N = 100$. Fundamental y armónicos **2** y **3**.

```
 N=100;
n=0:200;
xf=sin(2*pi*n/N);
x2=sin(2*pi*2*n/N);
x3=sin(2*pi*3*n/N);
h=stem(n',[xf' x2' x3']);
```

Observar el período de **xf**, **x2** y **x3**.

Script: armonicos.m

Ud. mismo pruebe con $N = (9990)^{1/2}$ en el script y vea cómo luce: **parece** periódica, pero no lo es. ¿Lo ve? ¿Por qué ocurre esto?



# Próximas Clases

- Ensayos audibles con Matlab
- Transformaciones de la Variable Independiente.
- Señales par e impar VID-VIC.
- Energía, potencia, valor medio temporal (VID-VIC).

**Y luego,**
Cuernos, Doblete y Peine.
Representación de señales VID con impulsos.
Representación de señales VIC con impulsos.

Inicia revisión de Probabilidades