SEÑALES Y SISTEMAS
Clase 3

Sebastián Pazos y Carlos H. Muravchik

12 de Marzo de 2020

Habíamos visto:

1. Señales aleatorias
2. Señales y secuencias: SVIC, SVID
3. Deltas: distribuciones para SVIC.
4. SVIC, SVID periódicas (inicio)

Y se vienen (en casi 2 clases):

- Repaso SVIC-SVID periódicas
- Ejemplos Audibles: señal periódica, armónicos
- Transformaciones de la variable independiente
- Ejemplos Audibles
- Parte par e impar de SVIC y SVID
- Otras distribuciones
- Energía, potencia, valor medio temporal
- Representación de SVID y SVID en términos de impulsos

Práctica: Sigue Práctica 1.

Definiciones

1. **SVIC periódica:** $x(t)$ periódica de *período fundamental* T si existe un $T \in \mathbb{R}$ de modo que T es el mínimo $T > 0$ que satisface $x(t) = x(t + T)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

2. **SVID periódica:** $x[n]$ periódica de *período fundamental* N si existe un $N \in \mathbb{N}$ de modo que N es el mínimo que satisface $x[n] = x[n + N]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

SVIC periódicas

Consecuencias

- A mayor $|\omega| = 2\pi/T$ mayor cantidad de oscilaciones por segundo
- $e^{j\omega t}$ es periódica $\forall \omega \in \mathbb{R}$
- Armónicos: dada $e^{j\omega_0 t}$; $\omega_0 \in \mathbb{R}$; $k\omega_0$, $k \in \mathbb{Z}$ son las frecuencias armónicas
- Existe un infinito número de armónicos, que también son SVIC periódicas $e^{jk\omega_0 t}$
- Algunos armónicos pueden serlo de una señal periódica de distinto período fundamental (200Hz es 2do armónico de $f_0 = 100$Hz y 4to de $f_0' = 50$Hz).

SVID periódicas

- Exponencial compleja; si $c = \Omega + j\alpha$
$$e^{jcn} = \underbrace{e^{-\alpha n}}_{\text{amortiguación}} \quad \underbrace{e^{j\Omega n}}_{\text{periódica}}$$
- Exponencial imaginaria; si $e^{j\Omega n}$; $n \in \mathbb{Z}$
- Pulsación: Ω sin unidades o rad (n es adimensional). "Frecuencia" (adimensional): $\Omega = 2\pi f$
$$e^{j\Omega n} = e^{j\Omega(n+N)} \quad \Rightarrow \quad e^{j\Omega N} = 1$$
$$\Rightarrow \Omega N = 2\pi m; \quad \text{con } fN = m \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow f = \frac{m}{N} \in \mathbb{Q}$$
$\boxed{\text{es periódica sólo para } f \in \mathbb{Q}}$
- Las frecuencias se repiten en forma periódica, con período 1: si f_0 con período fundamental N o sea $f_0 N = 1$ entonces, para cualquier $k \in \mathbb{Z}$,
$$e^{j2\pi f_0 n} = e^{j2\pi f_0 n} e^{j2\pi kn} = e^{j2\pi(f_0+k)n}$$
es decir $f_0 = 1/N$ y $f_0 + k$ representan a una exponencial imaginaria con el mismo período fundamental $T_0 = N$.

SVID periódicas

Consecuencias

- Armónicos: son los múltiplos de $1/N$, si N es el período fundamental. Es decir, son de la forma k/N con $k \in \mathbb{Z}$.
- Los armónicos se repiten: los **distintos** son $k = 0, 1, \ldots, N-1$.
- Entonces, hay sólo un número **finito** de armónicos.
- Si $f = m/N$; $m > N$ entonces $m = kN + m'$, $(k, m') \in \mathbb{Z}$ y $m' < N$. Como $f = m/N = k + (m'/N) = k + f'$; luego $e^{j2\pi fn} = e^{j2\pi(m/N)n} = e^{j2\pi f'n}$ (periódica en n con período fundam. N, pero *también* periódica en la variable continua f, con período fundamental 1).
- Algunos armónicos podrían tener distinto período fundamental. P.ej.: el armónico k/N con $N = qN'$ y $k = qk'$ y $q \in \mathbb{N}$ es en realidad la frecuencia k'/N' (fracción coprima) con per. fund. $N' = N/q$.

SVID periódicas

Más consecuencias

- A mayor Ω las pulsaciones (y frecuencias) se repiten en forma periódica. Sea Ω_0 con período fundamental N o sea $\Omega_0 N = 2\pi$ entonces,

$$(\Omega_0 + 2\pi k)N = 2\pi + 2\pi kN = 2\pi l \qquad l = 1 + kN \in \mathbb{Z}$$

- Se repiten las pulsaciones cada 2π. A medida que se eleva la frecuencia no necesariamente aumentan los ciclos u oscilaciones por segundo

Ejemplo: $\cos(2\pi(1/3)n)$ y su armónico $\cos(2\pi(2/3)n)$.
Considere $\cos(2\pi(3/3)n)$ y $\cos(2\pi(4/3)n)$
Matlab: el ejemplo con otra frecuencia. Ver $\cos(2\pi(1/110)^{1/2}n)$

SVID periódicas

Consecuencias - Resumen

- Sólo hay $N - 1$ armónicos distintos asociados a una fundamental de período N. Es un número **finito** de armónicos.
- Si el período fundamental es N, los armónicos son k/N con $k = 0, 1, \ldots, N - 1$.
- Un mismo armónico podría corresponder a distinto período fundamental.
- Se repiten las pulsaciones cada 2π. **Las frecuencias se repiten cada** 1.
- A medida que se eleva la frecuencia no necesariamente aumentan los ciclos u oscilaciones por segundo.

Señal discreta periódica - Ejemplo para generarla

Sinusoide con $N = 100$. Fundamental y armónicos **2** y **3**.

```
N=100;
n=0:200;
xf=sin(2*pi*n/N);
x2=sin(2*pi*2*n/N);
x3=sin(2*pi*3*n/N);
h=stem(n',[xf' x2' x3']);
```

Observar el período de **xf**, **x2** y **x3**.

Script: armonicos.m

Ud. mismo pruebe con $N = (9990)^{1/2}$ en el script y vea cómo luce: **parece** periódica, pero no lo es. ¿Lo ve? ¿Por qué ocurre esto?

Sinusoides

$N/2$ da el # de muestras reconstruidas por segundo

Sinusoide 1KHz - Script:
senoide.m

```
salida=sin(2*pi*1000.*(0:1:N)/(N/2));
player = audioplayer(salida, N/2);
play(player);
```

Sinusoide 0.5KHz y sus armónicos 2,3,4; 0.5 segundo cada uno. Total=2seg. Script:
senarmonico.m

Ruido

Ruido - Script: ruido.m

```
salida=randn(1,N);
plot(0:500,salida(1:501))
player = audioplayer(salida, N);
play(player);
```

Ud. mismo pruebe escuchar “senoide + G*ruido” dando a *G* diversos valores.

Serruchos

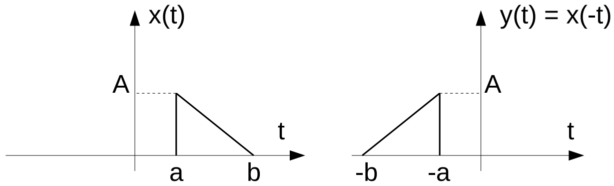
Serrucho 10 Hz - Script: serrucho.m

```
diente=[0:(N-1)/10]/(N-1)*10;
salida=[];
while length(salida)<N
    salida=[salida diente];
end
plot((0:2000)/N,salida(1:2001))
player = audioplayer(salida, N);
play(player);
```

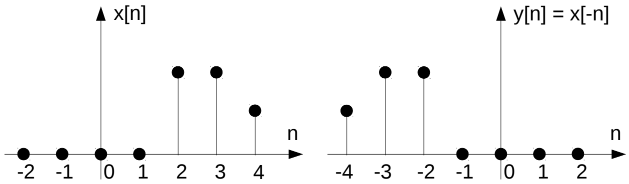
Juegue: haga un serrucho mas rápido, “al revés”; una onda periódica rectangular; una rectificada de 1/2 onda y onda completa; etc.

Reflexión

- SVIC: $x(t)$ reflejada es una nueva señal $y(t) = x(-t)$



- SVID: $x[n]$ reflejada es una nueva señal $y[n] = x[-n]$



Aplicaciones: recordar la música "satánica" al reproducir cintas y discos (!) al revés. Y en $\boxed{\text{Correlación}}$, ya veremos.

Matlab: construya su propio ejemplo. Genere x con `n=1:1:201;` y `nr=201:-1:1`. Luego `plot((n-101),x(nr))`

Reflexión - Ejemplo

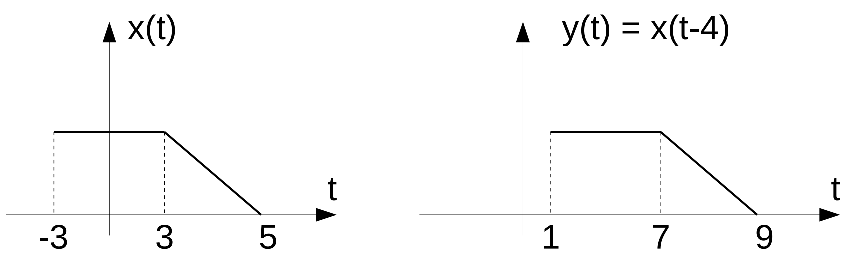
```
%Crear el objeto de grabación
recObj = audiorecorder get(recObj)

% Grabar por 5 segundos
disp('Grabando.')
recordblocking(recObj, 5);
disp('Fin de Grabación.');

% Escuchar la grabacion
play(recObj);

% Guardar los datos en una matriz
myRecording = getaudiodata(recObj);
```

Reflexión - Ejemplo - I

```
% reflejar
entinv=myRecording(end:-1:1);
% Graficar las ondas
subplot(2,1,1);plot(myRecording);
subplot(2,1,2); plot(entinv)
% Escuchar la reflexion
player = audioplayer(entinv,8000,8);
play(player);
```


Traslación o Desplazamiento

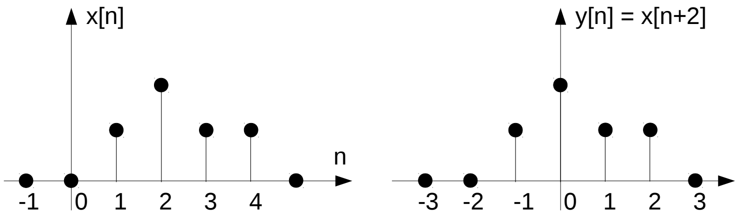
- SVIC: $x(t)$ es trasladada en la cantidad $t_0 \in \mathbb{R}$: aparece una nueva señal $y(t) = x(t - t_0)$.



- ¿A derecha o a izquierda? depende del signo de t_0

Traslación o Desplazamiento

- SVID: $x[n]$ es desplazadada en la cantidad $n_0 \in \mathbb{Z}$: aparece una nueva señal $y[n] = x[n - n_0]$.



- ¿A derecha o a izquierda? depende del signo de n_0.
  Notar: no cualquier translación es posible, sólo las que corresponden a números enteros.

Ejemplo:
Aplicación: acción de control a través de una red.

Matlab: genere $x[n]$ y vea $y[n] = x[n - n_0]$ con stem(n,x,n,y)

Traslación - Ejemplo - I

```
n=-1:5;
x=[0 0 1 2 1 1 0];
stem(n,x);
n2=n+3;
stem(n2,x);
n3=n-3;
stem(n3,x);
```

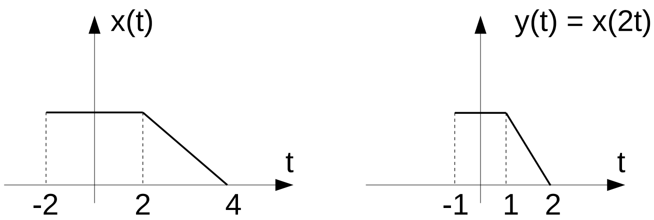
Traslación - Ejemplo - II

```
n=-1:5;
x=[0 0 1 2 1 1 0];
stem(n,x);
k=2;
y=circshift(x,k);y([1:k end+k:end])=0;
stem(n,y);
```


Cambio de escala

Contracción o Expansión

- SVIC: $x(t)$, se cambia su escala por $a \in \mathbb{R}$, se tiene $y(t) = x(at)$



- o también se podría $z(t) = x(t/a)$
- ¿Cómo "recordar" si es contracción o expansión? ver 1 ó 2 puntos notables

Cambio de escala

Contracción o Expansión

- SVID: $x[n]$, se pretende cambiar su escala por $M \in \mathbb{N}$, se tiene $y[n] = x[nM]$. Poder, se puede; pero hay algunos inconvenientes.
- Sea $x[n]$, ahora si $y[n] = x[n/M] \ldots$ la secuencia queda **indefinida** salvo en los n múltiplos de M
- Se puede hacer algo perdiendo información (contracción)

$$x[n]; \qquad y[n] = x[nM] \qquad M \in \mathbb{N}$$

- Se puede hacer algo agregando información (expansión)

$$x[n]; \qquad y[m] = \begin{cases} x[n] & \text{si } m = nM \\ 0 & \text{si } m \neq nM \end{cases}$$

- En todo caso, las últimas 2 variantes son una alteración de la señal original

Matlab: compruebe lo de más arriba

Contracción - Ejemplo

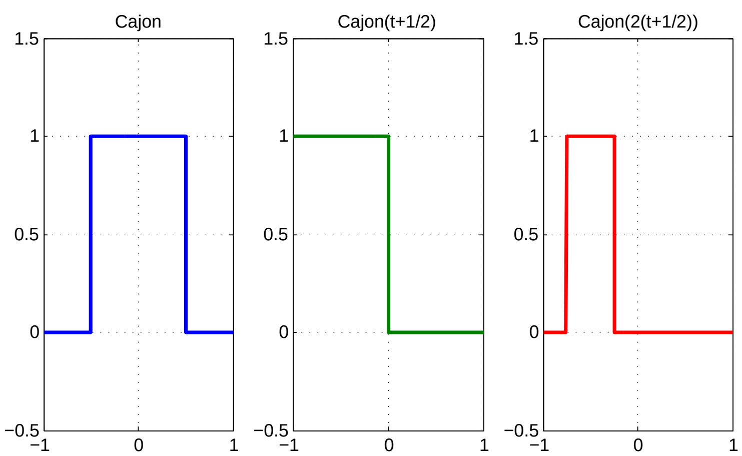
```
n=0:20;
x=n;
M=2;
y=x(1:M:end);
y=[y zeros(1,length(n)-length(y))];
subplot(2,1,1) stem(n,x)
subplot(2,1,2) stem(n,y)
```

Expansión - Ejemplo

```
 n=0:20;
x=n;
M=3;
y=zeros(1,length(n)*M);
y(1:M:end)=x;
subplot(2,1,1) stem(n,x);
xlim([0 20*M])
subplot(2,1,2) stem(0:length(y)-1,y)
```


Traslación y cambio de escala conjuntos

- SVIC: $x(t)$, si $a \in \mathbb{R}$, se tiene $y(t) = x(at + b)$
- esto NO es una cambio de escala por a y una traslación por b
- Lo correcto es ver como $y(t) = x(a(t + b/a))$, es decir cambio de escala por a y traslación por b/a

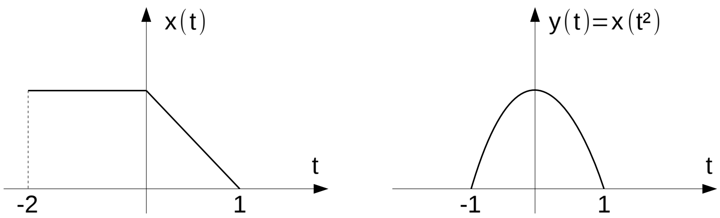


Aplicación: rayo reflejado y multicamino (celulares, radar, GPS, sonar)

Otras transformaciones

Cambio de escala no-lineal.

Ejemplo: $y(t) = x(t^2) = \{x \circ \phi\}(t)$



Descomposición de SVIC

Como se vio en Análisis,

$$x_P(t) = \text{Parte par de } x(t) \triangleq \frac{x(t)+x(-t)}{2}$$

$$x_N(t) = \text{Parte non de } x(t) \triangleq \frac{x(t)-x(-t)}{2}$$

Propiedades

$$x_P(t) = x_P(-t) \qquad x_N(t) = -x_N(-t)$$

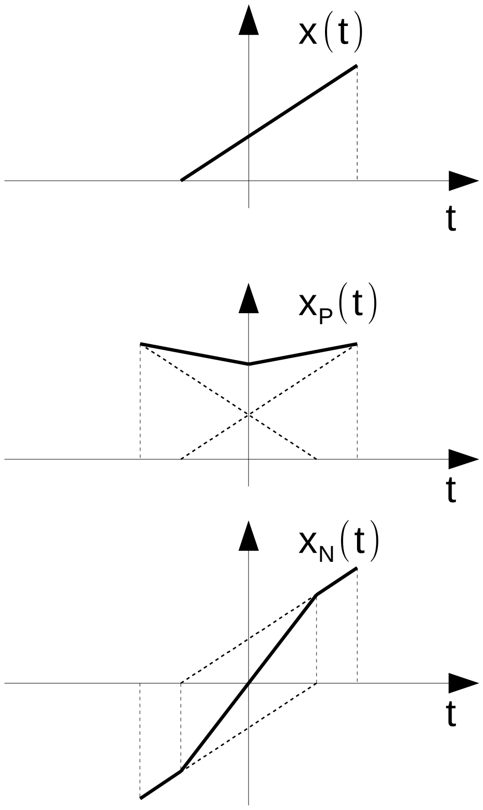
Notar

- Cualquier SVIC se descompone en parte par e impar. Incluye señales periódicas y aperiódicas
- Las SVIC pueden ser pares, impares o ninguna de las dos
- Se puede reconstruir una SVIC a partir de sus partes par e impar,

$$x(t) = x_P(t) + x_N(t)$$

Descomposición de SVIC

De manera gráfica



Notar

- Una función impar tiene $x(0) = 0$
- La función signo, $\text{sgn}(t)$ se define impar, o sea $\text{sgn}(0) = 0$

Descomposición de SVID

En forma paralela,

$$x_P[n] = \text{Parte par de } x[n] \triangleq \frac{x[n] + x[-n]}{2}$$

$$x_N[n] = \text{Parte non de } x[n] \triangleq \frac{x[n] - x[-n]}{2}$$

Propiedades

$$x_P[n] = x_P[-n] \qquad x_N[n] = -x_N[-n]$$

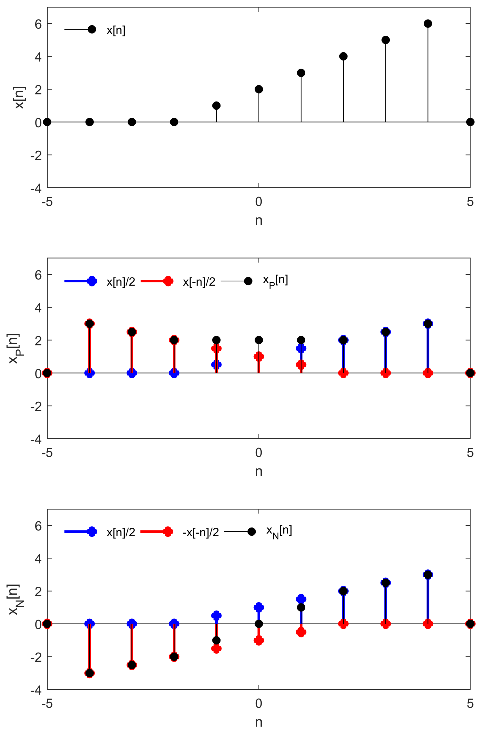
Notar

- Cualquier SVID se descompone en parte par e impar. Incluye señales periódicas y aperiódicas
- Las SVID pueden ser pares, impares o ninguna de las dos
- Se puede reconstruir una SVID a partir de sus partes par e impar,

$$x[n] = x_P[n] + x_N[n]$$

Descomposición de SVID

De manera gráfica



Notar

- La función signo, sgn[n] se define impar, o sea sgn[0] $= 0$

Energía

Potencia instantánea: $P_i[n] = |x[n]|^2$ para SVID y $P_i(t) = |x(t)|^2$ para SVIC. Asimile a una tensión de valor $x[n]$ (o $x(t)$) aplicada sobre un resistor de $R = 1\Omega$
Cuando existe la suma o la integral,

$$\text{SVID:} \quad \mathcal{E}_x \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

$$\text{SVIC:} \quad \mathcal{E}_x \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau$$

Definición

- $x[n]$ es *SVID de energía* si $0 \leq \mathcal{E}_x < \infty$
- $x(t)$ es *SVIC de energía* si $0 \leq \mathcal{E}_x < \infty$

Ejemplos:

- $\sqcap(t)$, $e^{-t}u(t)$, $(1/2)^n u[n]$ son señales de energía
- $\cos(2\pi f_0 t)$, $e^t u(t)$, $(1/2)^n u[-n]$ *no* lo son

Potencia

Hay señales que no son de energía, pero tienen potencia finita. P.ej.: las señales periódicas. Potencia media de señales periódicas: energía en un ciclo/largo del ciclo.
En general

$$\text{SVID:} \quad \mathcal{P}_x \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

$$\text{SVIC:} \quad \mathcal{P}_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(\tau)|^2 d\tau$$

Definición

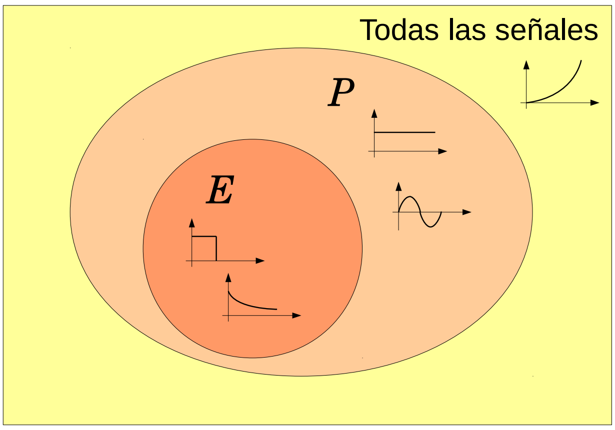
- $x[n]$ es *SVID de potencia* si $0 \leq \mathcal{P}_x < \infty$
- $x(t)$ es *SVIC de potencia* si $0 \leq \mathcal{P}_x < \infty$

Ejemplos:

- Calcular la potencia de $u[n]$
- Calcular la potencia de $A\text{sen}(2\pi f_0 t + \phi)$

Potencia

Las señales de energía, claramente son de potencia; pero **no** viceversa.



- Las señales periódicas pueden tener potencia media finita; pero no siempre
- Muchas señales aleatorias veremos que son de potencia
- El llamado ruido blanco es una señal aleatoria que **no** es de potencia. Ya veremos.

Promedio Temporal

Definición:

$$\text{SVID:} \quad \langle x \rangle_N[n] \triangleq \frac{1}{2N+1} \sum_{k=n-N}^{n+N} x[k]$$

$$\text{SVIC:} \quad \langle x \rangle_T(t) \triangleq \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} x(\tau) d\tau$$

que depende del instante donde se mira el promedio n (t) y de la ventana en que se mide la señal $\pm N$ ($\pm T$)

Las siguientes definiciones son independientes del instante de toma del promedio y de su largo; pero no siempre existen

Definición:

$$\text{SVID:} \quad \langle x \rangle \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} x[k]$$

$$\text{SVIC:} \quad \langle x \rangle \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(\tau) d\tau$$

Próxima Clase

- Otras distribuciones
- Representación de SVID y SVIC por impulsos
- Inicia paseo veloz por Probabilidades.

Variables aleatorias. Distribuciones. Propiedades. Esperanza. Propiedades. Algunas distribuciones y densidades notables continuas: Normal (TLC), Uniforme, Exponencial, doble exponencial. Algunas distribuciones y densidades notables discretas: Bernouilli, geométrica, binomial, binomial negativa, Poisson.