SEÑALES Y SISTEMAS
Clase 4

Carlos H. Muravchik

16 de Marzo de 2020

Habíamos visto:

1. Ejemplos audibles
2. Transformaciones de la variable independiente
3. Señales de Energía

Y se vienen:

- Repaso señales de energía y potencia
- Valor medio temporal
- Otras distribuciones (“deltas”)
- Representación de SVIC con impulsos
- Inicio Repaso Probabilidades

Próxima

- Repaso Variables aleatorias. Distribuciones. Propiedades.
- Repaso Esperanza. Propiedades.
- Algunas distribuciones y densidades notables continuas.
- Algunas distribuciones y densidades notables discretas.

Energía

Potencia instantánea: $P_i[n] = |x[n]|^2$ para SVID y $P_i(t) = |x(t)|^2$ para SVIC. Asimile a una tensión de valor $x[n]$ (o $x(t)$) aplicada sobre un resistor de $R = 1\Omega$

Cuando existe la suma o la integral,

$$\text{SVID:} \quad \mathcal{E}_x \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

$$\text{SVIC:} \quad \mathcal{E}_x \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau$$

Definición

- $x[n]$ es *SVID de energía* si $0 \leq \mathcal{E}_x < \infty$
- $x(t)$ es *SVIC de energía* si $0 \leq \mathcal{E}_x < \infty$

Ejemplos:

- $\sqcap(t)$, $e^{-t}u(t)$, $(1/2)^n u[n]$ son señales de energía
- $\cos(2\pi f_0 t)$, $e^t u(t)$, $(1/2)^n u[-n]$ *no* lo son

Potencia

Hay señales que no son de energía, pero tienen potencia finita. P.ej.: las señales periódicas. Potencia media de señales periódicas: energía en un ciclo/largo del ciclo.

En general

$$\text{SVID:} \quad \mathcal{P}_x \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

$$\text{SVIC:} \quad \mathcal{P}_x \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(\tau)|^2 d\tau$$

Definición

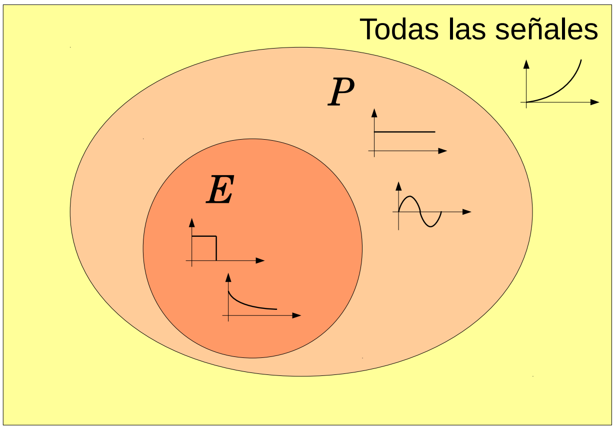
- $x[n]$ es *SVID de potencia* si $0 \leq \mathcal{P}_x < \infty$
- $x(t)$ es *SVIC de potencia* si $0 \leq \mathcal{P}_x < \infty$

Ejemplos:

- Calcular la potencia de $u[n]$
- Calcular la potencia de $A\text{sen}(2\pi f_0 t + \phi)$

Potencia

Las señales de energía, claramente son de potencia; pero **no** viceversa.



- Las señales periódicas pueden tener potencia media finita; pero no siempre
- Muchas señales aleatorias veremos que son de potencia
- El llamado ruido blanco es una señal aleatoria que **no** es de potencia. Ya veremos.

Promedio Temporal

Definición:

$$\text{SVID:} \quad \langle x\rangle_N[n] \triangleq \frac{1}{2N+1}\sum_{k=n-N}^{n+N} x[k]$$

$$\text{SVIC:} \quad \langle x\rangle_T(t) \triangleq \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} x(\tau)d\tau$$

que depende del instante donde se mira el promedio n (t) y de la ventana en que se mide la señal $\pm N$ ($\pm T$)

Las siguientes definiciones son independientes del instante de toma del promedio y de su largo; pero no siempre existen

Definición:

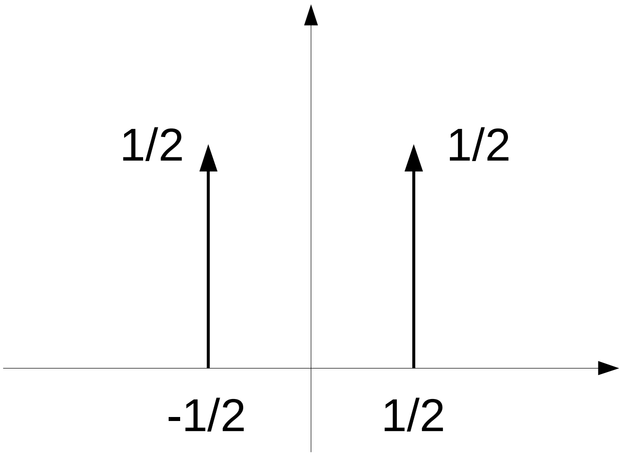
$$\text{SVID:} \quad \langle x\rangle \triangleq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} x[k]$$

$$\text{SVIC:} \quad \langle x\rangle \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(\tau)d\tau$$

Cuernos

Se define como

$$\upuparrows (x) = \frac{1}{2}\{\delta(x+1/2)+\delta(x-1/2)\}$$



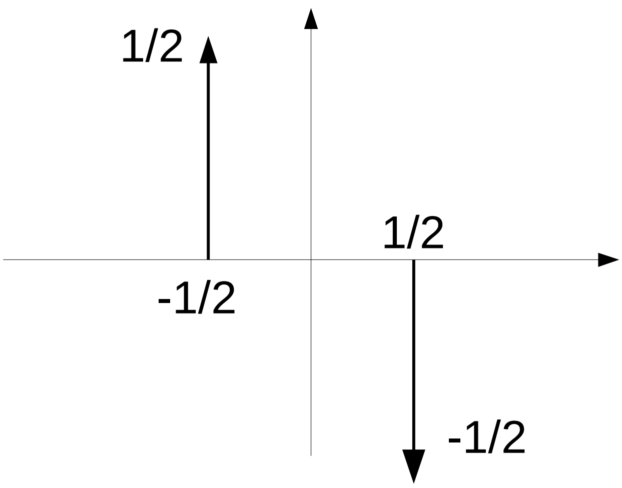
Notar

- No hay modo de definir cuernos VID con estos lineamientos

Doblete

Se define, preste atención a los signos,

$$\uparrow\downarrow (x) = \frac{1}{2}\{\delta(x+1/2)-\delta(x-1/2)\}$$

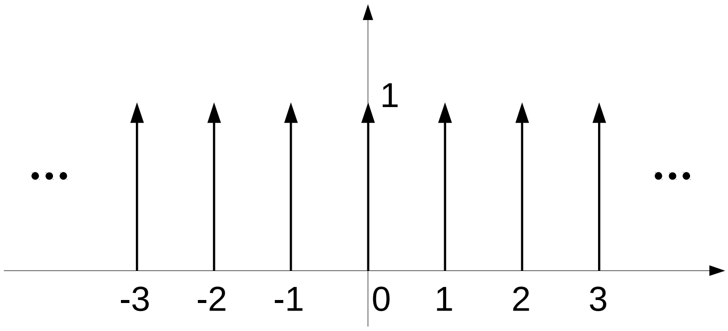


Notar

- No hay modo de definir doblete VID con estos lineamientos

Peine

$$\upuparrows\!\uparrow(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)$$



Notar

- El peine es una función generalizada periódica.
- Se podría definir el peine VID... pero es poco útil: es la secuencia constante e igual a 1

Representación de SVID en términos de impulsos

"Cualquier" secuencia se puede escribir como:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \tag{1}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k]x[n-k] \tag{2}$$

¿Impactante?

Recordar lo que significa la suma de (1):

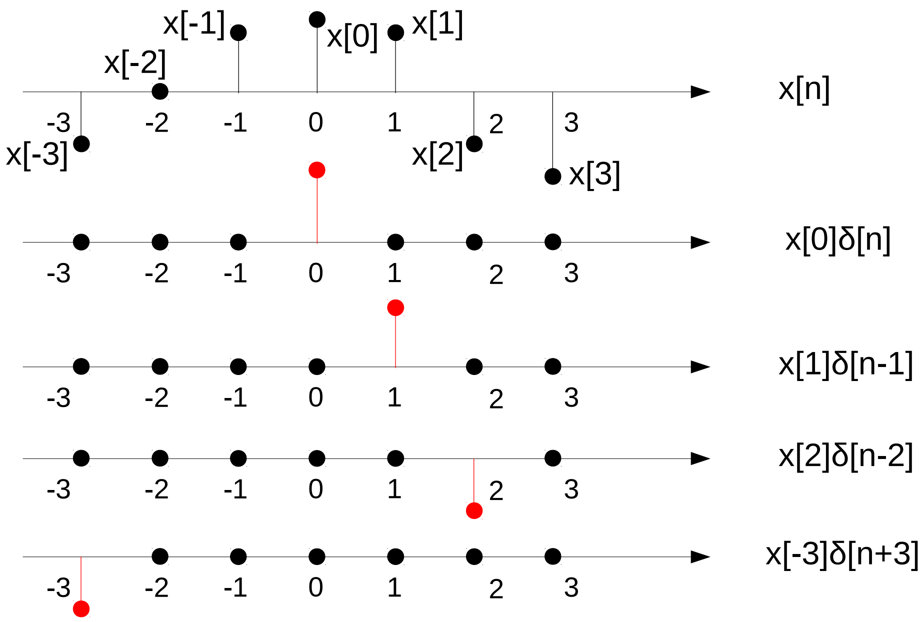
$$x[n] = \ldots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \ldots$$

armado de la secuencia muestra por muestra.

Representación de SVID en términos de impulsos

$$x[n] = \ldots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \ldots$$

o, pictóricamente



Representación de SVID en términos de impulsos

Resumen: podemos “armar” una secuencia punto a punto

- SVID como combinación lineal de secuencias elementales
- Espacio de secuencias: se puede definir un *espacio de secuencias* infinito -contable- dimensional.
- Base: las deltas de Kronecker desplazadas son las secuencias elementales o funciones de base $\{\delta[n-k]\}_{k=-\infty}^{\infty}$
- Coordenadas: son los valores ($x[k]$) que multiplican a cada función de base

Representación de SVIC en términos de impulsos

Un paralelo formal con las SVID. Compare.
"Cualquier" función se puede escribir como:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma)\delta(t-\sigma)d\sigma$$

- La ecuación hermana también es útil

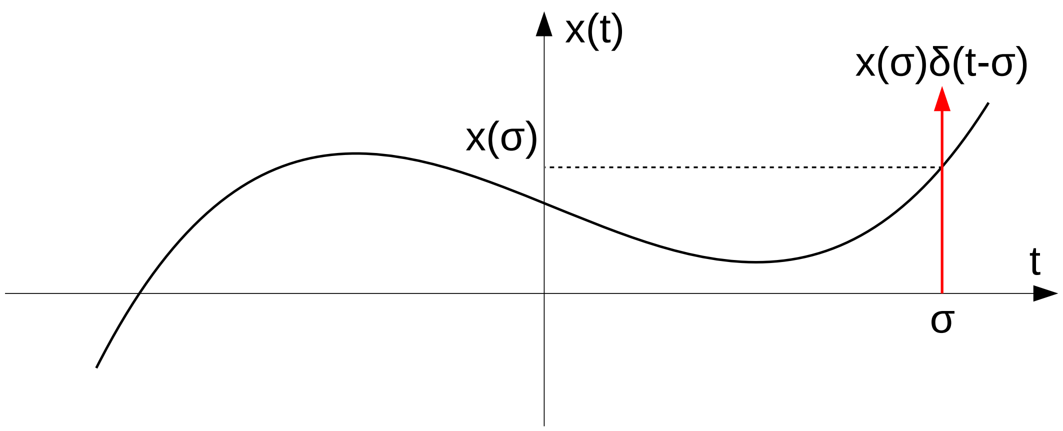
  $$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\sigma)\delta(\sigma)d\sigma$$

  es una identidad trivial.
- Notar que $x(t) = x(t)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\sigma)d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-\sigma)d\sigma$ y lleva a pensar en $x(\sigma)\delta(t-\sigma) = x(t)\delta(t-\sigma)$; pero esta igualdad es sólo cierta en sentido distribucional
- a diferencia de SVID, ¡no es posible interpretar como una suma de un número contable de términos!

Representación de SVIC en términos de impulsos

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma)\delta(t-\sigma)d\sigma$$

Pictóricamente,



Representación de SVIC en términos de impulsos

Resumen: podemos "armar" una función punto a punto (pero de forma "no-numerable" y teniendo que recurrir a distribuciones: convénzase por qué)

- SVIC como combinación lineal de funciones elementales
- Espacio de funciones: se puede definir un *espacio de funciones* infinito dimensional.
- Base: no hay expectativas de que las deltas de Dirac desplazadas sean funciones de base (convencionales). P.ej.: no se pueden multiplicar como para intentar alguna definición de ortogonalidad.

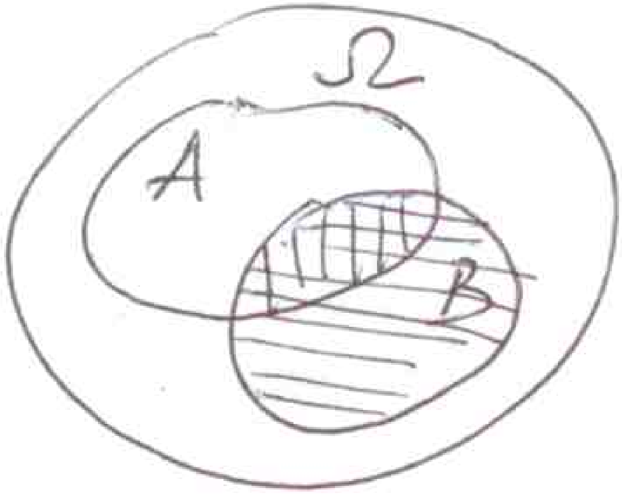
Intervalo: 5 minutos!

Repaso de probabilidades 1

- Ω: conjunto universal o colección de los resultados del experimento aleatorio (salidas $\omega_i \in \Omega$).
- A, B o A_k, $k = 0, 1, 2 \ldots$: eventos o colecciones de salidas de interés.
- $\mathcal{A}$: colección de "todos los posibles eventos" $A_k \subseteq \mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ es una sigma-álgebra: mínimo conjunto que contiene "todos los posibles eventos" formables por unión, intersección o complemento una cantidad denumerable de veces.
- Axiomas:
  1. $0 \leq P\{A\} \leq 1$
  2. $P\{\Omega\} = 1$ (y $P\{\varnothing\} = 0$)
  3. A, B disjuntos ($A \cap B = \varnothing$) entonces $P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\}$. Se extiende a un número infinito (contable) de eventos (versión 3b del axioma).

Repaso de probabilidades 2

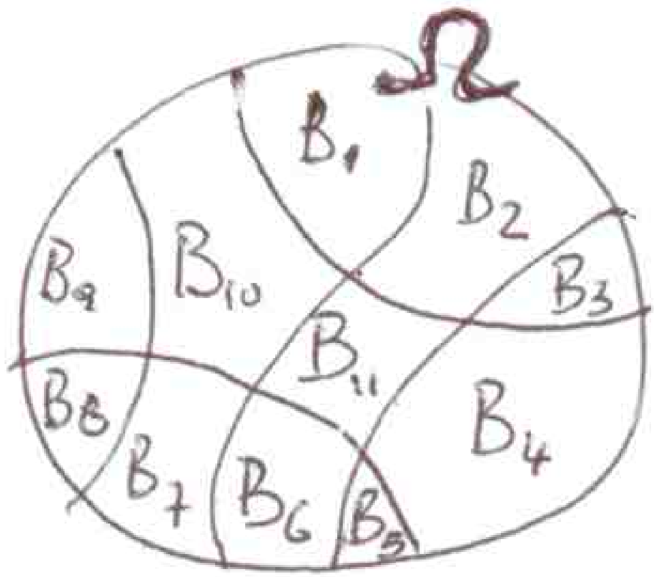
- Probabilidad condicional: $P\{A/B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}}$, cuando $P\{B\} \neq 0$. Interpretación de frecuencia.



- Independencia: A, B independientes cuando $P\{A \cap B\} = P\{A\}P\{B\}$ ó $P\{A/B\} = P\{A\}$

Repaso de probabilidades 3

- Teorema de Bayes: $P\{B_i/A\} = \frac{P\{A/B_i\}P\{B_i\}}{P\{A\}}$
- conjuntos mutuamente excluyentes: $\Omega = \cup_{i=1}^{n} B_i$ y $B_i \cap B_j$; $\forall i \neq j$, $1 \leq (i,j) \leq n$
- Probabilidad Total: $P\{A\} = \sum_{k=1}^{n} P\{A/B_k\}P\{B_k\}$



Un caso de uso: Coronavirus

Ud. -**Genio!**- acaba de inventar un test para el coronavirus. ANMAT acaba de certificar que el "invento argentino" tiene Probabilidad de falsos negativos (el test dice si T, pero la persona no está enferma $\bar{E}$)=0.01= Probabilidad de falsos positivos (el test dice no $\bar{T}$ y la persona está enferma E. Espectacular!

Si la probabilidad a-priori de contraer la enfermedad (prevalencia) es de $P\{E\} = 0{,}005\,\%$, cual es la probabilidad de que a alguien a quien su test le da positivo esté enfermo?

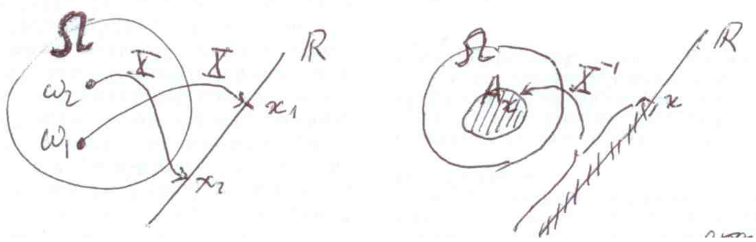
$$P\{E/T\} = \frac{P\{T/E\}P\{E\}}{P\{T\}} = \frac{P\{T/E\}(1 - P\{\bar{E}\})}{P\{T/E\}P\{E\} + P\{T/\bar{E}\}P\{\bar{E}\}} =$$

$$= \frac{0{,}99\,5 10^{-3}}{0{,}99\,5 10^{-3} + 10^{-2}\,0{,}995} = \frac{4{,}95\,10^{-3}}{14{,}90\,10^{-3}} = 0{,}33$$

Sorprendente, no?

Variable Aleatoria 1

- Conexión directa de Ω con el mundo físico: dar valores cuantitativos a las salidas de un experimento aleatorio y a los eventos.
- Una *variable aleatoria* X es una función (!) $X : \Omega \to \mathbb{R}$.



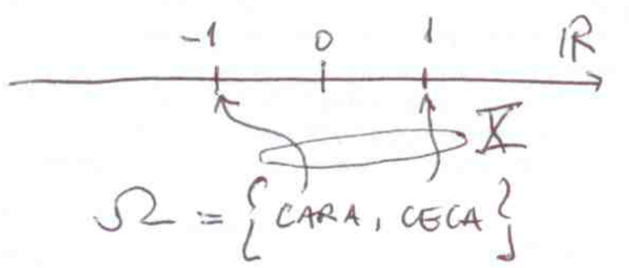
- Requisito importante: una función X puede ser una VA (real) si los puntos del intervalo $(-\infty, x]$ corresponden a un evento de Ω, para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Variable Aleatoria 2

- Notar que X denota una variable aleatoria; pero x denota un número real.
- Definiendo $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$ permite hablar de la Probab$\{X \leq x\}$ asignándole el valor $P\{A\}$.
- Para abreviar, hablamos directamente de $P\{X \leq x\}$ y cuando haga falta, escribiremos los ω cuidadosamente.

Variable Aleatoria 3

- VA discreta: el rango de X es denumerable (toma un número finito o infinito contable de posibles valores). Ejemplos: moneda, ruleta, existencia de errores de transmisión en una comunicación, número de errores de transmisión en un paquete de datos.



- VA continua: el rango de X es infinito no denumerable. Ejemplos: ruleta continua o rueda de la fortuna, altura de una población, valor de resistencia de resistores, duración de una llamada telefónica.
- VA mixta: mezcla continua-discreta. Ejemplo: tiempo de espera de un auto en una esquina.

Probabilidad con VA discretas

- X toma valores $\{x_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
- Uno o varios ω_i originan a través de X la posibilidad de que se dé el valor $X = x_k$. Luego $P\{A_k\} = p_k = P\{X = x_k\}$ con $A_k = \cup_i \omega_i$.
- ¿Cómo calcular $P\{X \leq x\}$? Aprovechar que A_k son disjuntos: $P\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} P\{X = x_i\} = \sum_{x_i \leq x} p_i$.
- Y en general, para cualquier conjunto $\mathcal{A} \in \mathbb{R}$, $P\{\mathcal{A}\}$ se puede calcular: *1)* encontrando todos los ω_k tales que $X(\omega_k) = x_k \in \mathcal{A}$; con esas salidas se forma $A = \cup \omega_k$. *2)* como las salidas son conjuntos elementales disjuntos, la probabilidad de su unión se calcula fácil

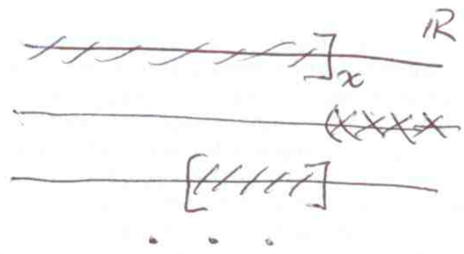
$$\boxed{P\{\mathcal{A}\} = \sum_{x_k \in \mathcal{A}} p_k}$$

Distribución Acumulativa 1

- para VA continuas el método anterior, falla: las uniones de salidas para describir eventos son, en general, no-numerables.
- La DA se define para manejar las probabilidades de que una VA tome ciertos valores.
- Esencialmente para VA continuas, pero también para discretas.
- $F_X(x) \triangleq P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = P\{X \leq x\}$.
- Para abreviar, hablamos directamente de $P\{X \leq x\}$ y cuando haga falta, escribiremos los ω cuidadosamente.

Distribución Acumulativa 2

- Pero hay otros conjuntos de interés

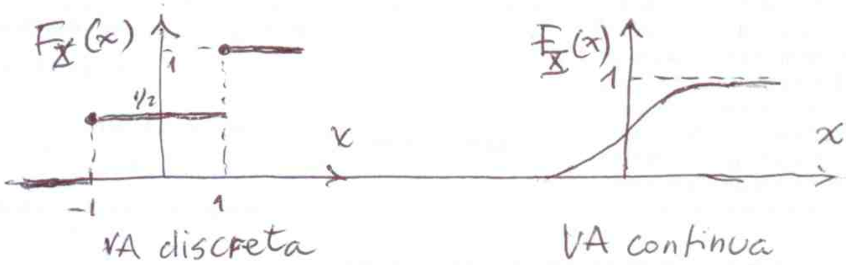


- Se pueden fabricar por uniones, intersecciones y complementos (recordar el Axioma 3). Ejemplo: Si $x_2 < x_1$, considerar: $(-\infty, x_1] \cap \overline{(-\infty, x_2]}$, $\lim_{n\to\infty}(x_2 - 1/n, x_2]$, etc.
- Hay un mínimo conjunto que contiene a todos los conjuntos que resultan por uniones, intersecciones y complementos (denumerables) de conjuntos elementales $(-\infty, x]$: se llama “Boreliano” $\mathcal{B}$.
- Se puede asignar probabilidades a cualquier subconjunto de $\mathcal{B}$.

Distribución Acumulativa 3

Propiedades

1. $F_X(-\infty) = 0$
2. $F_X(\infty) = 1$
3. $0 \leq F_X(x) \leq 1$
4. $F_X(x)$ es una función creciente, continua por derecha. Es decir, si $x_1 \leq x_2$ entonces $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$.



Densidad de probabilidad

Motivación: Para VA continuas, $P\{X = x_k\}$=0... ¿Cómo calcular $P\{\mathcal{A}\}$?

Definición: Densidad de probabilidad

$$f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} F_X(x)$$

Luego

$$\boxed{P\{\mathcal{A}\} = \int_{\mathcal{A}} f_X(x) dx}$$

Notar:

- La fdp $f_X(x)$ NO es una probabilidad
- En todo caso $f_X(x)\, dx \sim P\{x < X \leq x + dx\}$

Densidad de probabilidad 2

$$\boxed{P\{\mathcal{A}\} = \int_{\mathcal{A}} f_X(x) dx}$$

Propiedades:

- $f_X(x) \geq 0; \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\lambda) d\lambda$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(\lambda) d\lambda = F_X(\infty) - F_X(-\infty) = 1$
- $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(\lambda) d\lambda$

Próxima Clase

- Repaso Esperanza
- Algunas distribuciones de VA continuas
- Algunas distribuciones de VA discretas
- Funciones de VA.
- Momentos, función característica.
- Distrib y densidad conjunta.
- Distrib Condicional.