SEÑALES Y SISTEMAS
Clase 5

Carlos H. Muravchik

19 de Marzo de 2020

Habíamos visto:

- Probabilidades
- Repaso Variables aleatorias

Veremos:

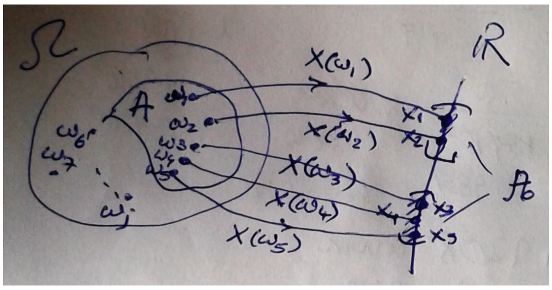
1. Repaso Distribuciones. Propiedades
2. Repaso Esperanza. Propiedades
3. Repaso Algunas distribuciones y densidades continuas y discretas
4. Repaso Función de variable aleatoria
5. Repaso Momentos, función característica

Luego:

- Distribución y densidad conjunta
- Distribución Condicional
- Procesos Estocásticos. Introducción, realizaciones, *Ejemplos*

Probabilidad con VA discretas

- X toma valores $\{x_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
- Uno o varios ω_i originan a través de X la posibilidad de que se dé el valor $X = x_k$. Luego $P\{A_k\} = p_k = P\{X = x_k\}$ con $A_k = \cup_i \omega_i$.
- ¿Cómo calcular $P\{X \leq x\}$? Aprovechar que A_k son disjuntos: $P\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} P\{X = x_i\} = \sum_{x_i \leq x} p_i$.
- Y en general, para cualquier conjunto $\mathcal{A} \in \mathbb{R}$, $P\{\mathcal{A}\}$ se puede calcular: *1)* encontrando todos los ω_k tales que $X(\omega_k) = x_k \in \mathcal{A}$; con esas salidas se forma $A = \cup \omega_k$. *2)* como las salidas son conjuntos elementales disjuntos, la probabilidad de su unión se calcula fácil



$$P\{\mathcal{A}\} = \sum_{x_k \in \mathcal{A}} p_k$$

Distribución Acumulativa 1

- para VA continuas el método anterior, falla: las uniones de salidas son no-numerables.
- La Distribución Acumulativa (DA) se define para manejar las probabilidades de que una VA tome ciertos valores.
- Esencialmente para VA continuas, pero también para discretas.

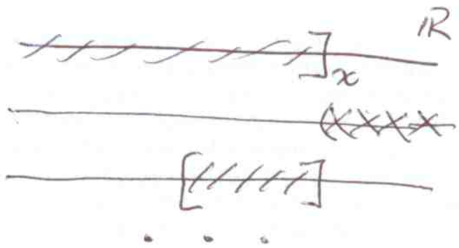
Definición: Distribución Acumulativa

$$F_X(x) \triangleq P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = P\{X \leq x\}.$$

- Para abreviar, hablamos directamente de $P\{X \leq x\}$ y cuando haga falta, escribiremos los ω cuidadosamente.

Distribución Acumulativa 2

- Pero hay otros conjuntos de interés

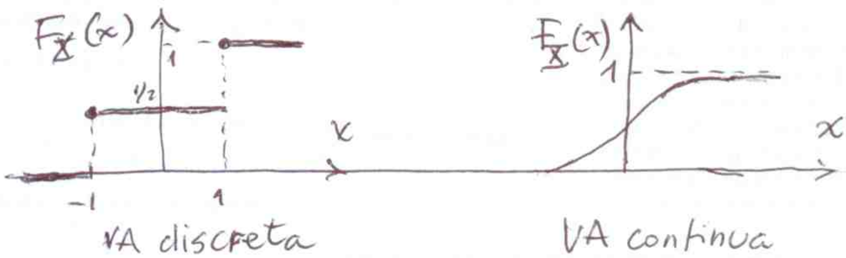


- Se pueden fabricar por uniones, intersecciones y complementos (recordar el Axioma 3). Ejemplo: Si $x_2 < x_1$, considerar: $(-\infty, x_1] \cap \overline{(-\infty, x_2]}$, $\text{lím}_{n\to\infty}(x_2 - 1/n, x_2]$, etc.
- Hay un mínimo conjunto que contiene a todos los conjuntos que resultan por uniones, intersecciones y complementos (denumerables) de conjuntos elementales $(-\infty, x]$: se llama “Boreliano” $\mathcal{B}$.
- Se puede asignar probabilidades a cualquier subconjunto de $\mathcal{B}$.

Distribución Acumulativa 3

Propiedades

1. $F_X(-\infty) = 0$
2. $F_X(\infty) = 1$
3. $0 \leq F_X(x) \leq 1$
4. $F_X(x)$ es una función creciente, continua por derecha



Densidad de probabilidad

Motivación: Para VA continuas, $P\{X = x_k\}$=0... ¿Cómo calcular $P\{\mathcal{A}\}$?

Definición: Densidad de probabilidad

$$f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} F_X(x)$$

Luego

$$\boxed{P\{\mathcal{A}\} = \int_{\mathcal{A}} f_X(x) dx}$$

Notar:

- La fdp $f_X(x)$ NO es una probabilidad
- En todo caso $f_X(x)\, dx \sim P\{x < X \leq x + dx\}$

Densidad de probabilidad 2

$$\boxed{P\{\mathcal{A}\} = \int_{\mathcal{A}} f_X(x) dx}$$

Propiedades:

- $f_X(x) \geq 0; \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\lambda) d\lambda$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(\lambda) d\lambda = F_X(\infty) - F_X(-\infty) = 1$
- $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(\lambda) d\lambda$

Esperanza matemática 1

Motivación: promedio ponderado de la VA

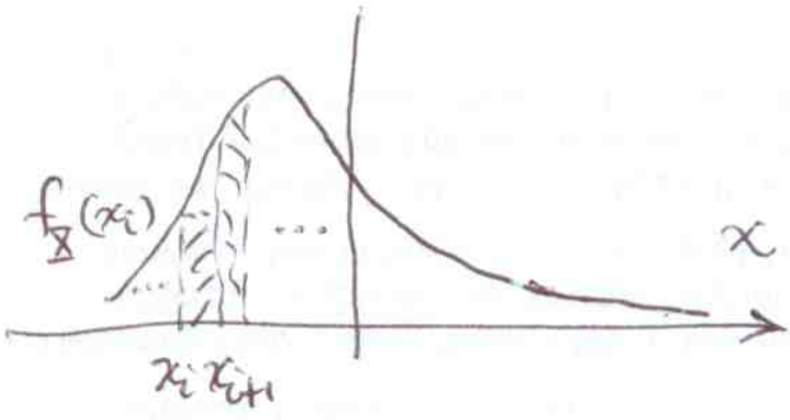
Definición: para VA discretas

$$\mathrm{E}\{X\} \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k P\{X = x_k\}$$

Definición: para VA continuas

$$\mathrm{E}\{X\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \lambda f_X(\lambda) d\lambda$$

Esperanza matemática 2



Sumas de Riemann:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda f_X(\lambda) d\lambda \sim \sum_i x_i f_X(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

ver que la ponderación de cada x_i es
$f_X(x_i)(x_{i+1} - x_i) \sim P\{x_i < X \leq x_{i+1}\}$.

Esperanza matemática 3

Propiedades

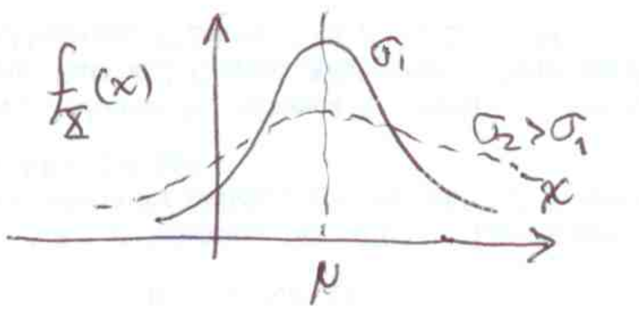
- $\mathrm{E}\{X\} = \mu_X$ se suele llamar *media estadística* o media.
- Si $c \in \mathbb{R}$ es una constante, $\mathrm{E}\{c\} = c$.
- Si $a, b \in \mathbb{R}$ son constantes, $\mathrm{E}\{aX + b\} = a\mathrm{E}\{X\} + b$.
- Si $X > 0$, $\mathrm{E}\{X\} > 0$.
- Valor cuadrático medio: $\mathrm{E}\{X^2\}$; media estadística de la (VA al cuadrado).
- *Varianza:* $\mathrm{Var}\{X\} \triangleq \mathrm{E}\{(X - \mathrm{E}\{X\})^2\} = \mathrm{E}\{X^2\} - (\mathrm{E}\{X\})^2 = \mathrm{E}\{X^2\} - \mu_X^2$.

Normal o Gaussiana

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ cuando la fdp es

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}((x-\mu)/\sigma)^2}$$

Dos parámetros: media μ y varianza σ^2



Teorema del límite central: (versión simple) La suma de muchas VA independientes, cualquiera sea su distribución pero con media y varianza finitas, tiende a ser una VA Gaussiana.

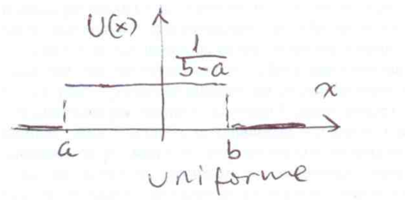
Permite argumentar físicamente para postular una distribución.
Ejemplos: ruido electrónico (térmico), ruido de fondo espacial (expansión del universo).

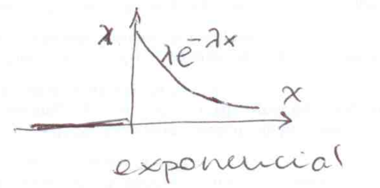
Uniforme, Exponencial

$X \sim \mathcal{U}(a, b)$ cuando la fdp es

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}(u(x-a) - u(x-b))$$

Los parámetros a, b definen la fdp. Ejemplo: fase al origen del oscilador senoidal.





$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ cuando la fdp es

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$$

Un único parámetro: $\lambda > 0$. Describe tiempo entre *arribos* bajo ciertas hipótesis (las de Poisson con parámetro λ). Ejemplo: intervalo entre demandas de servicio a un servidor de WiFi.
Distribución "desmemoriada": si $s, t \in \mathbb{R}^+$,
$P\{X > s + t / X > s\} = \frac{P\{X > s+t\}}{P\{X > s\}} = \quad = e^{-\lambda t}$.

Otras distribuciones de VA continuas:

Doble exponencial (Laplace), Cauchy, Rayleigh, χ^2, Gamma, etc

Bernouilli, Geométrica

Bernouilli: $X \sim \mathcal{B}(p)$

$$X = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } p \\ 0 & \text{con probabilidad } q = 1 - p \end{cases}$$

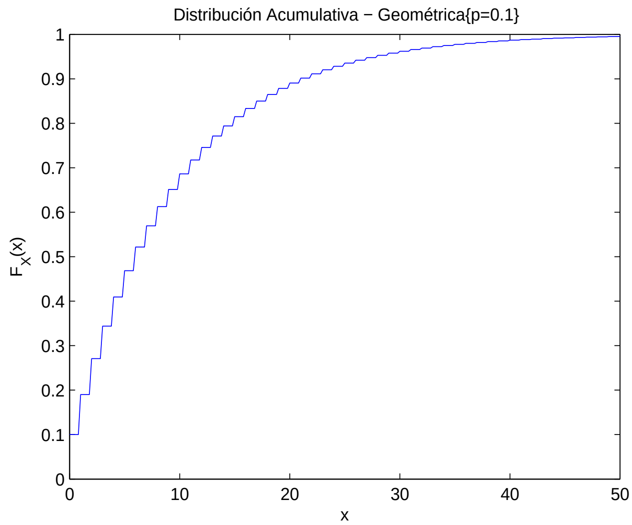
Paradigma: éxitos ocurren con probabilidad p, fallas con q

Geométrica: $X \sim \mathcal{G}(p)$

$$P\{X = x\} = q^x p$$

Paradigma: intentos Bernouilli indep'tes; número de fallos (X) hasta el primer éxito.

A veces se usa $Y = X + 1$: número de intentos hasta tener el primer éxito.

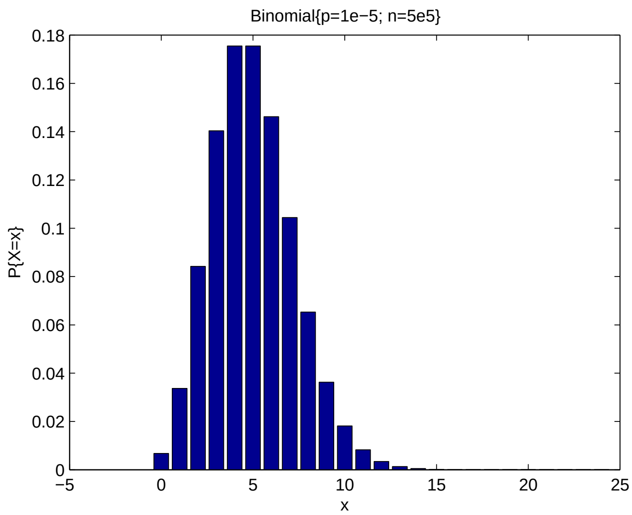


Binomial

Binomial: $X \sim \mathcal{B}i(p, n)$

$$P\{X = x\} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

Paradigma:
número de éxitos (x)
en n intentos independientes



Ejemplos:
número de errores de transmisión en un paquete de n bits

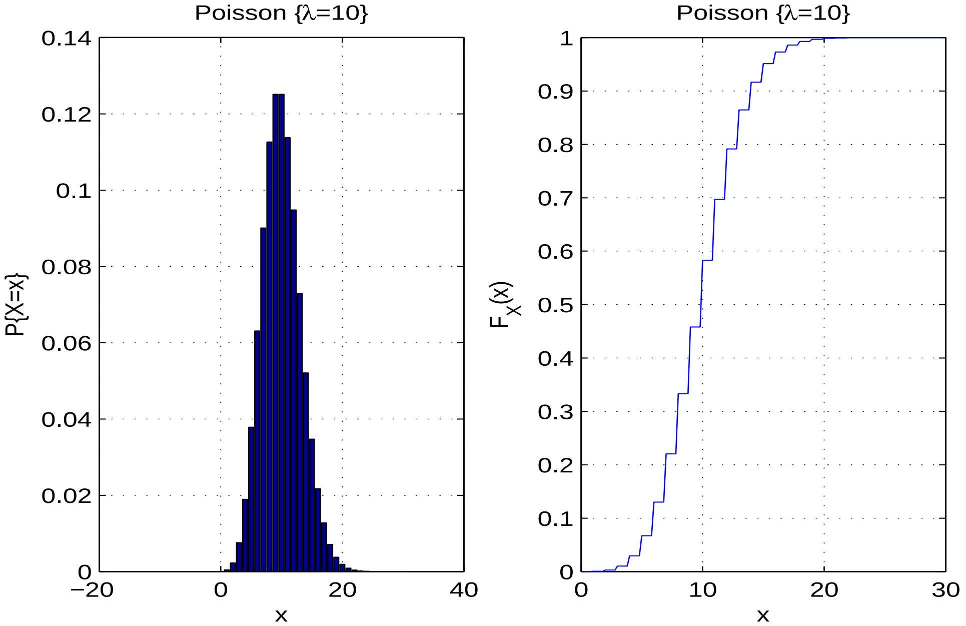
No confundir con Binomial negativa: número de intentos hasta lograr n éxitos

Poisson

Cuenta el número de arribos ó éxitos en un lapso Δt.
$X \sim \mathcal{P}(\lambda \Delta t)$ con $x \in \mathbb{Z}$

$$P\{X = x\} = e^{-\lambda \Delta t} \frac{(\lambda \Delta t)^x}{x!}; \qquad P\{X \leq x\} = e^{-\lambda \Delta t} \sum_{k=1}^{x} \frac{(\lambda \Delta t)^k}{k!}$$

Notar: frecuentemente se supone $\Delta t = 1$ y el parámetro es λ.



Poisson

Paradigma:
Las hipótesis para que $X \sim \mathcal{P}(\lambda \Delta t)$ son:

1. $P\{X = 1\} \to \lambda \Delta t$ cuando $\Delta t \to 0$.
2. los arribos son independientes entre sí.
3. no ocurren 2 arribos en forma simultánea.

Ejemplos: número de paquetes de información que llegan a un servidor; número de fotones que arriban a un fotodiodo, etc

Función de una VA - Intro

Motivación: A menudo interesa una función de la VA cuya distribución se conoce.
Ejemplo: se conoce que una amplitud $X \sim F_X(x)$, pero interesa la distribución $F_Y(y)$ de la potencia instantánea $Y = X^2$.

- Supongamos que $Y = g(X)$ con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Técnica básica: (en la serie de problemas)

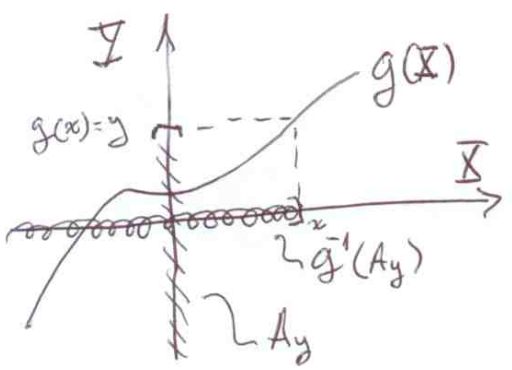
$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\} = \\
&= P\{\omega \in \Omega : g(X(\omega)) \le y\} = P\{g(X) \le y\} = \\
&= P\{X \in g^{-1}(A_y)\} \\
&\text{donde } A_{y^*} = \{y \in \mathbb{R} : y \le y^*\}
\end{aligned}
$$

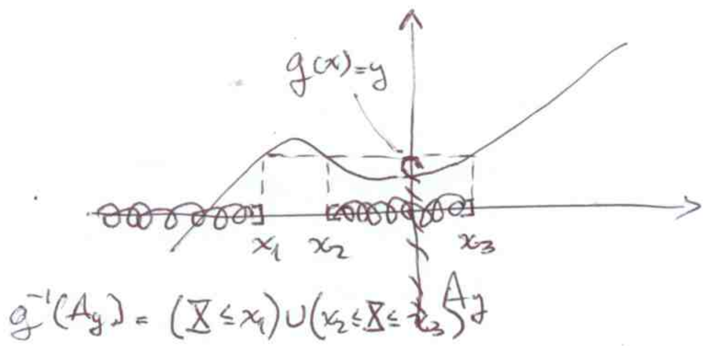
- $P\{X \in g^{-1}(A_y)\}$ se puede calcular usando sólo $F_X(x)$
- $g^{-1}(A_y)$ denota la "imagen inversa" por g del conjunto A_y: el conjunto de valores de X que satisfacen $g(x) \le y$
- Nota: $g^{-1}(y)$ *no* es la función inversa de $g(\cdot)$, que podría no existir.

Función de una VA - 2

La técnica anterior es válida para VA discretas o continuas

$$F_Y(y) = P\{X \in g^{-1}(A_y)\}$$

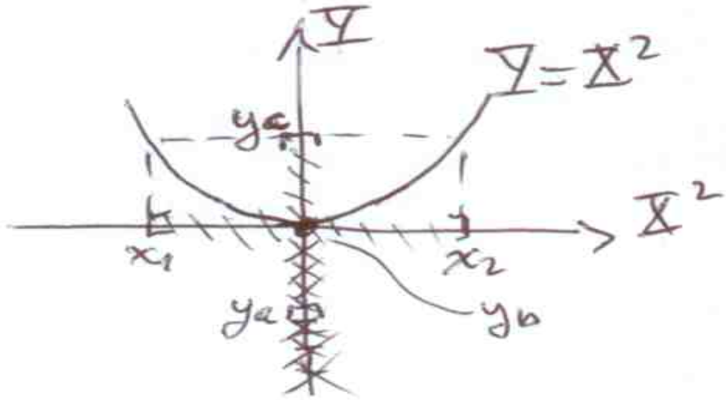




- Si la VA es continua se puede calcular $f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y}$. Note que A_y es función de y

Función de una VA - 3

Ejemplo: $Y = X^2$



a) Si $y < 0$, $F_Y(y) = P\{X \in \emptyset\}$

b) Si $y = 0$, $F_Y(y) = P\{X = 0\}$

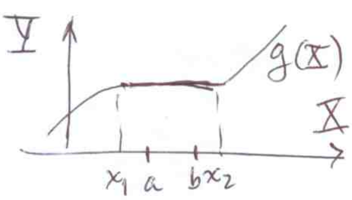
c) Si $y > 0$, $F_Y(y) = P\{(x_1 \leq X \leq x_2)\}$
$= F_X(x_2) - F_X(x_1) + P\{X = x_1\}$ con $x_1 = -\sqrt{y}$; $x_2 = \sqrt{y}$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = f_X(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(-\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

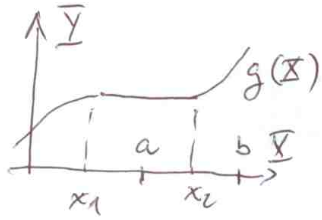
Función de una VA - 4

Observación:
Aún si g es continua y X una VA continua, $Y = g(X)$ puede resultar una VA discreta, mixta o continua.

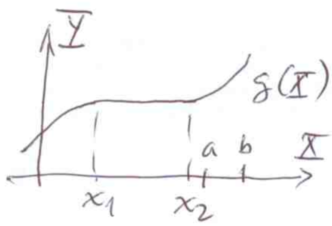
Ejemplo: Considere los 3 casos siguientes con $X \sim \mathcal{U}(a, b)$



Y discreta



Y mixta



Y continua

Resultado

Una de las consecuencias más importantes para $Y = g(X)$ es que:

$$\mu_Y = \mathrm{E}\{Y\} = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy$$

con $f_Y(y)$ obtenida como antes, y

$$\mu_g = \mathrm{E}\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx$$

son iguales, o sea $\mu_Y = \mu_g$.

$$\boxed{\mu_Y = \mathrm{E}\{Y\} = \mu_g = \mathrm{E}\{g(X)\}}$$

Esto no es trivial como parece, es un profundo resultado de la teoría de la medida en análisis

Escriba el equivalente para *VA discretas*

Función característica

Definición:

$$\Phi_X(u) = \mathrm{E}\{e^{juX}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux}\, f_X(x)\, dx$$

- Como veremos $\Phi_X(u) = \mathcal{F}\{f_X(x)\}(-u/2\pi)$
- Entre sus usos, es otro método para obtener densidades de funciones de VA:
  Si $Y = g(X)$ y podemos calcular

  $$\Phi_g(u) = \mathrm{E}\{e^{j\,u\,g(X)}\}$$

  entonces, la antitransformada de Fourier de $\Phi_g(u)$ define $f_Y(y)$ (bajo ciertas hipótesis técnicas).

Función característica – VA discreta

Definición:

$$\Phi_X(u) = \mathrm{E}\{e^{juX}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jux_k}\, p_k$$

con $p_k = P\{X = x_k\}$

- Similar a VA continua, pero cambiando lo obvio.
- Como veremos $\Phi_X(u)$ es la transformada de Fourier de tiempo discreto (TFTD) de la secuencia de los p_k, cuando $x_k = k\Delta x$ (x_k equiespaciados).
- Entre sus usos: otro método para obtener distribuciones de funciones de VA.

Momentos

Definición: momento (no–central) de orden r-simo

$$m_r = \mathrm{E}\{X^r\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^r\, f_X(x)\, dx \qquad r \in \mathbb{Z}$$

Definición: momento central de orden r-simo, con $r \in \mathbb{Z}$

$$\mu_r = \mathrm{E}\{(X - \mathrm{E}\{X\})^r\} = \mathrm{E}\{(X - \mu_X)^r\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^r\, f_X(x)\, dx \qquad \text{con } \mu_X = m_1$$

- Al ver Transformada de Fourier veremos la relación entre densidades, momentos y funciones características.
- Anticipo: $\{$conocer la densidad$\}$ $\Leftrightarrow$ $\{$conocer la función característica$\}$ $\Leftrightarrow$ $\{$conocer **todos** los momentos y que converja la serie de McLaurin de la $\Phi(u)\}$.
- La media μ_X es m_1, el valor cuadrático medio m_2 y la varianza μ_2.

Momentos – VA discretas

Definición: momento (no–central) de orden r-simo

$$m_r = \mathrm{E}\{X^r\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k^r \, p_k \qquad r \in \mathbb{Z}$$

Definición: momento central de orden r-simo, con $r \in \mathbb{Z}$

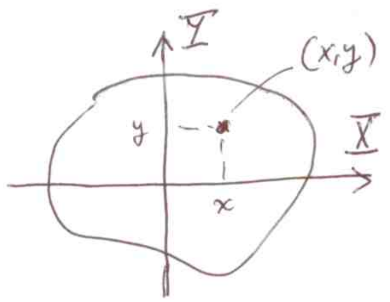
$$\mu_r = \mathrm{E}\{(X - \mathrm{E}\{X\})^r\} = \mathrm{E}\{(X - \mu_X)^r\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x_k - \mu_X)^r \, p_k$$

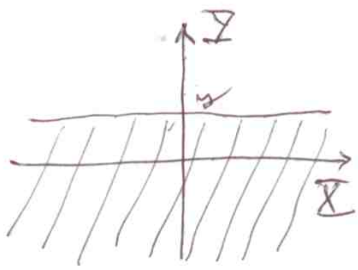
con $p_k = P\{X = x_k\}$ y $\mu_X = m_1$.

- Al ver TFTD comentaremos la relación entre densidades, momentos y funciones características para x_k equiespaciados.
- La media μ_X es m_1, el valor cuadrático medio m_2 y la varianza μ_2.

Distribución conjunta de 2 VA

- Experimento aleatorio que produce salidas que afectan a 2 VA, X e Y. P.ej.: 2 electrodos de EEG registrando actividad de un conjunto activo de neuronas.
- Hay eventos que sólo pueden ser definidos a partir de ambas VA.
- También hay eventos que pueden describirse con 1 sola VA.





Definición: X e Y son VA *independientes* si cualquier evento conjunto A_{xy} puede descomponerse como $A_{xy} = A_x \cap A_y$, donde $P\{A_{xy}\} = P\{A_x\}P\{A_y\}$.

Distribución acumulativa conjunta

Definición:

$$
\begin{aligned}
F_{XY}(x,y) &\triangleq P\{\omega \in \Omega : (X(\omega) \leq x) \cap (Y(\omega) \leq y)\} \\
&= P\{(X \leq x) \cap (Y \leq y)\}
\end{aligned}
$$

- Si X e Y son VA independientes
  $F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$; $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- $F_X(x)$ y $F_Y(y)$ son las *distribuciones marginales*.

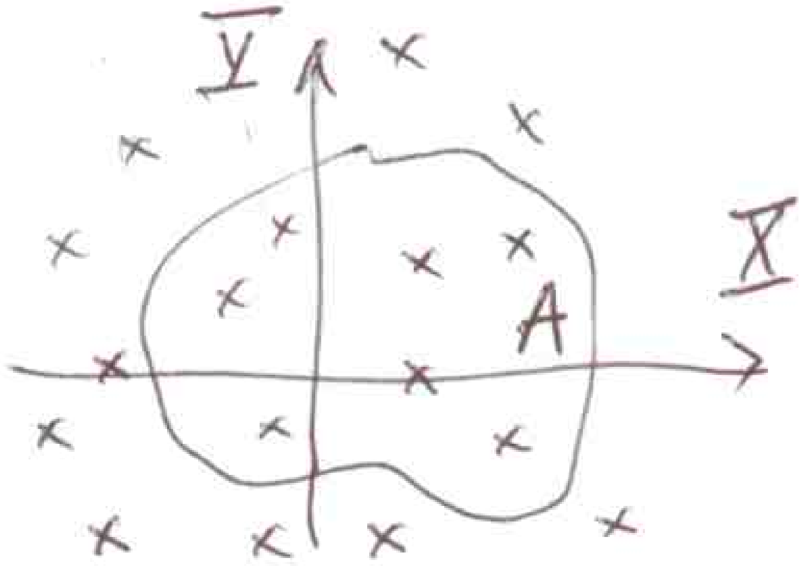
VA discretas 1

La *distribución* podría verse como una tabla, posiblemente de largo infinito

$X \setminus Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_k	$\cdots$	y_s	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1k}	$\cdots$	p_{1s}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2k}	$\cdots$	p_{2s}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mk}	$\cdots$	p_{ms}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$
x_r	p_{r1}	p_{r2}	$\cdots$	p_{rk}	$\cdots$	p_{rs}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$

$$
F_{XY}(x_m, y_k) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{n=1}^{k} p_{ln}
$$

VA discretas 2



$$P\{A\} = \sum_{(x_m, y_k) \in A} p_{mk}$$

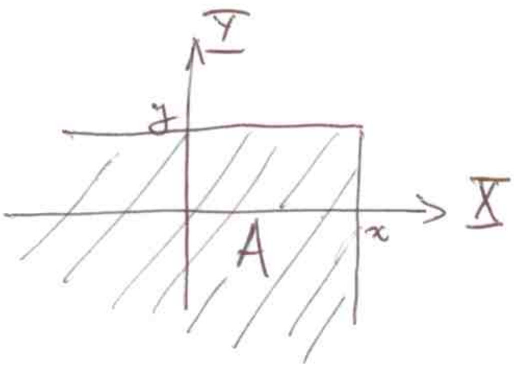
Densidad conjunta de probabilidad

Definición:

$$f_{XY}(x,y) = \left. \frac{\partial^2 F_{XY}(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\partial\beta} \right|_{(x,y)}$$

Con esto,

$$P\{A\} = \iint_A f_{XY}(\alpha,\beta) d\alpha\, d\beta$$



En la figura
$A = (X \leq x) \cap (Y \leq y)$ y
$P\{A\} = F_{XY}(x,y)$

$$P\{A\} = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{XY}(\alpha,\beta) d\alpha\, d\beta$$

Propiedades

- $F_{XY}(-\infty, y) = P\{(X \leq -\infty) \cap (Y \leq y)\} = P\{\emptyset\} = 0$ y $F_{XY}(x, -\infty) = 0$.
- $F_{XY}(\infty, \infty) = P\{(X \leq \infty) \cap (Y \leq \infty)\} = P\{\Omega\} = 1$.
- $F_{XY}(\infty, y) = P\{(X \leq \infty) \cap (Y \leq y)\} = P\{\Omega \cap (Y \leq y)\} = P\{(Y \leq y)\} = F_Y(y)$.
- similarmente, $F_{XY}(x, \infty) = F_X(x)$.

Definición: Esperanza matemática

$$\mathrm{E}\{g(X, Y)\} = \iint g(\alpha, \beta) f_{XY}(\alpha, \beta) d\alpha \, d\beta$$

con propiedades similares al caso univariable.

y en el caso de VA discretas

$$\mathrm{E}\{g(X, Y)\} = \sum_m \sum_k g(x_m, y_k) p_{XY}(x_m, y_k)$$

Momentos bivariados

Definición: Momento bivariado de orden $r \in \mathbb{Z}^+$

$$\mathrm{E}\{X^s Y^t\} = \iint_{-\infty}^{\infty} \alpha^s \beta^t f_{XY}(\alpha, \beta) \, d\alpha \, d\beta \quad \text{con } \{s, t\} \in \mathbb{Z}^+ : s+t = r$$

y en el caso discreto

$$\mathrm{E}\{X^s Y^t\} = \sum_{(m,k)=(-\infty,-\infty)}^{(\infty,\infty)} x_m^s y_k^t p_{mk} \qquad \text{con}\{s, t\} \in \mathbb{Z}^+ : s+t = r$$

Próxima Clase

- Distribuciones conjuntas y condicionales
- Procesos estocásticos
- Clases de procesos.
- Distribución, densidad.
- Independencia. Secuencias iid, ruido blanco.
- Media estadística.

Y después,

- Funciones de correlación y covarianza. Otros momentos.
- Correlación de señales determinísticas (de energía y potencia).
- Correlación: concepto; notación: orden, conjugada y desplazamiento de las variables, propiedades autocorrelación e intercorrelación.