FACULTAD DE INGENIERÍA

SEÑALES Y SISTEMAS
Clase 6

Carlos H. Muravchik

26 de Marzo de 2020

Habíamos visto:

1. Variables aleatorias
2. Esperanza. Distribuciones destacadas.
3. Función de VA.
4. Momentos y Función característica

Y se vienen:

- Momentos y Función característica discretos
- Distribución y densidad conjunta.
- Distribución Condicional.
- Procesos Estocásticos. Familia de realizaciones. Ejemplos. Interpretación, clases.
- Distribución, densidad.
- Independencia. Planteo.

Momentos – VA discretas

Definición: momento (no–central) de orden r-simo

$$m_r = \mathrm{E}\{X^r\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k^r \, p_k \qquad r \in \mathbb{Z}$$

Definición: momento central de orden r-simo, con $r \in \mathbb{Z}$

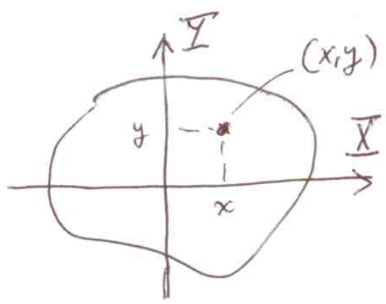
$$\mu_r = \mathrm{E}\{(X - \mathrm{E}\{X\})^r\} = \mathrm{E}\{(X - \mu_X)^r\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x_k - \mu_X)^r \, p_k$$

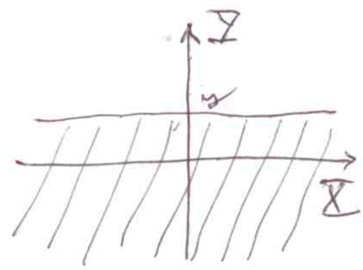
con $p_k = P\{X = x_k\}$ y $\mu_X = m_1$.

- Al ver TFTD comentaremos la relación entre densidades, momentos y funciones características para x_k equiespaciados.
- La media μ_X es m_1, el valor cuadrático medio m_2 y la varianza μ_2.

Distribución conjunta de 2 VA

- Experimento aleatorio que produce salidas que afectan a 2 VA, X e Y. P.ej.: 2 electrodos de EEG registrando actividad de un conjunto activo de neuronas.
- Hay eventos que sólo pueden ser definidos a partir de ambas VA.
- También hay eventos que pueden describirse con 1 sola VA.





Definición: X e Y son VA *independientes* si cualquier evento conjunto A_{xy} puede descomponerse como $A_{xy} = A_x \cap A_y$, donde $P\{A_{xy}\} = P\{A_x\}P\{A_y\}$.

Distribución acumulativa conjunta

Definición:

$$
\begin{aligned}
F_{XY}(x,y) &\triangleq P\{\omega \in \Omega : (X(\omega) \leq x) \cap (Y(\omega) \leq y)\} \\
&= P\{(X \leq x) \cap (Y \leq y)\}
\end{aligned}
$$

- Si X e Y son VA independientes
  $F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y); \; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- $F_X(x)$ y $F_Y(y)$ son las *distribuciones marginales*.

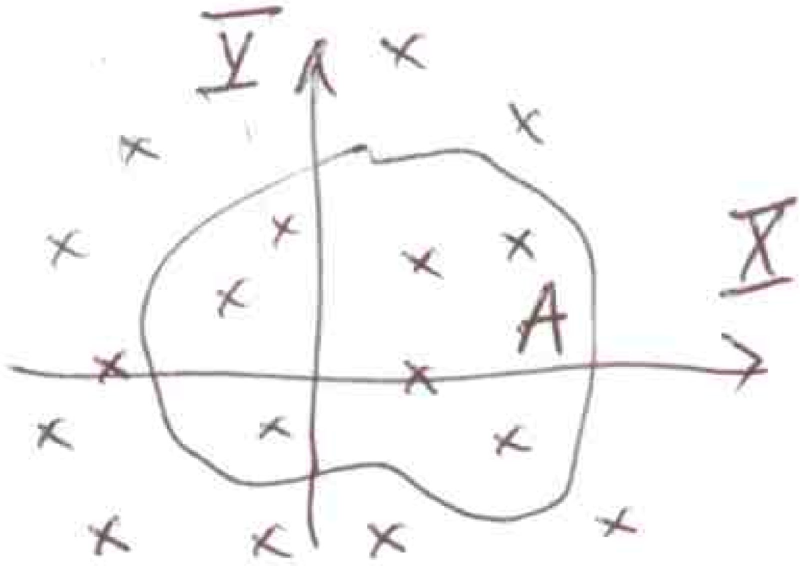
VA discretas 1

La *distribución* podría verse como una tabla, posiblemente de largo infinito

$X \setminus Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_k	$\cdots$	y_s	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1k}	$\cdots$	p_{1s}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2k}	$\cdots$	p_{2s}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mk}	$\cdots$	p_{ms}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$
x_r	p_{r1}	p_{r2}	$\cdots$	p_{rk}	$\cdots$	p_{rs}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$

$$
F_{XY}(x_m, y_k) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{n=1}^{k} p_{ln}
$$

VA discretas 2



$$P\{A\} = \sum_{(x_m, y_k) \in A} p_{mk}$$

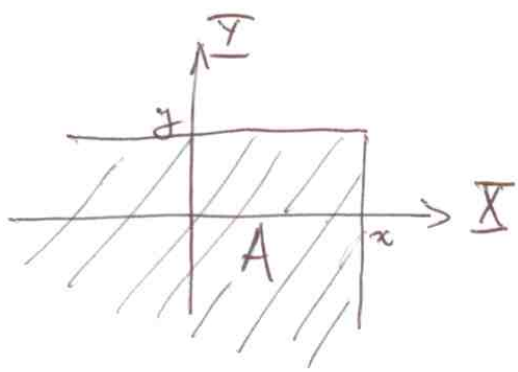
Densidad conjunta de probabilidad

Definición:

$$f_{XY}(x, y) = \left. \frac{\partial^2 F_{XY}(\alpha, \beta)}{\partial\alpha\partial\beta} \right|_{(x,y)}$$

Con esto,

$$P\{A\} = \iint_A f_{XY}(\alpha, \beta) d\alpha\, d\beta$$



En la figura
$A = (X \leq x) \cap (Y \leq y)$ y
$P\{A\} = F_{XY}(x, y)$

$$P\{A\} = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{XY}(\alpha, \beta) d\alpha\, d\beta$$

Propiedades

- $F_{XY}(-\infty, y) = P\{(X \le -\infty) \cap (Y \le y)\} = P\{\emptyset\} = 0$ y $F_{XY}(x, -\infty) = 0$.
- $F_{XY}(\infty, \infty) = P\{(X \le \infty) \cap (Y \le \infty)\} = P\{\Omega\} = 1$.
- $F_{XY}(\infty, y) = P\{(X \le \infty) \cap (Y \le y)\} = P\{\Omega \cap (Y \le y)\} = P\{(Y \le y)\} = F_Y(y)$.
- similarmente, $F_{XY}(x, \infty) = F_X(x)$.

Definición: Esperanza matemática

$$\mathrm{E}\{g(X,Y)\} = \iint g(\alpha,\beta) f_{XY}(\alpha,\beta) d\alpha\, d\beta$$

con propiedades similares al caso univariable.

y en el caso de VA discretas

$$\mathrm{E}\{g(X,Y)\} = \sum_m \sum_k g(x_m, y_k) p_{XY}(x_m, y_k)$$

Momentos bivariados

Definición: Momento bivariado de orden $r \in \mathbb{Z}^+$

$$\mathrm{E}\{X^s Y^t\} = \iint_{-\infty}^{\infty} \alpha^s \beta^t f_{XY}(\alpha,\beta)\, d\alpha\, d\beta \quad \text{con } \{s,t\} \in \mathbb{Z}^+ : s+t = r$$

y en el caso discreto

$$\mathrm{E}\{X^s Y^t\} = \sum_{(m,k)=(-\infty,-\infty)}^{(\infty,\infty)} x_m^s y_k^t p_{mk} \qquad \text{con}\{s,t\} \in \mathbb{Z}^+ : s+t = r$$

Distribuciones multivariadas

- Se generaliza esto para múltiples VA.
- Es la base para los procesos estocásticos.
- Ver, por ejemplo, en Tópicos...

Distribución Condicional I

Para ayudar en los cálculos es útil definir

Definición: Distribución condicionada a un evento A

$$F_{X|A}(x|A) = P\{(X \leq x)|A\} = \frac{P\{(X \leq x) \cap A\}}{P\{A\}}$$

y también

$$f_{X|A}(x|A) = \frac{\partial}{\partial x} F_{X|A}(x)$$

- esto es fácilmente extensible a $F_{X,Y|A}(x, y|A)$ y $f_{X,Y|A}(x, y|A)$.
- Si $A = \{Y = y\}$ para una VA continua, $P\{A\} = 0$ y no se puede usar lo anterior!

Densidad condicional

Para VA continuas, la densidad condicional puede hallarse *informalmente* haciendo $A = \{y < Y \leq y + dy\}$

Luego $P\{A\} \approx f_Y(y)\,dy$

$$P\{x < X \leq x + dx|A\} = f_{X|Y}(x|y)\,dx$$

y como $P\{(x < X \leq x + dx) \cap A\} = f_{XY}(x, y)\,dx\,dy$ se puede ver que

Densidad condicional:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Esperanza condicional

Esperanza condicional:

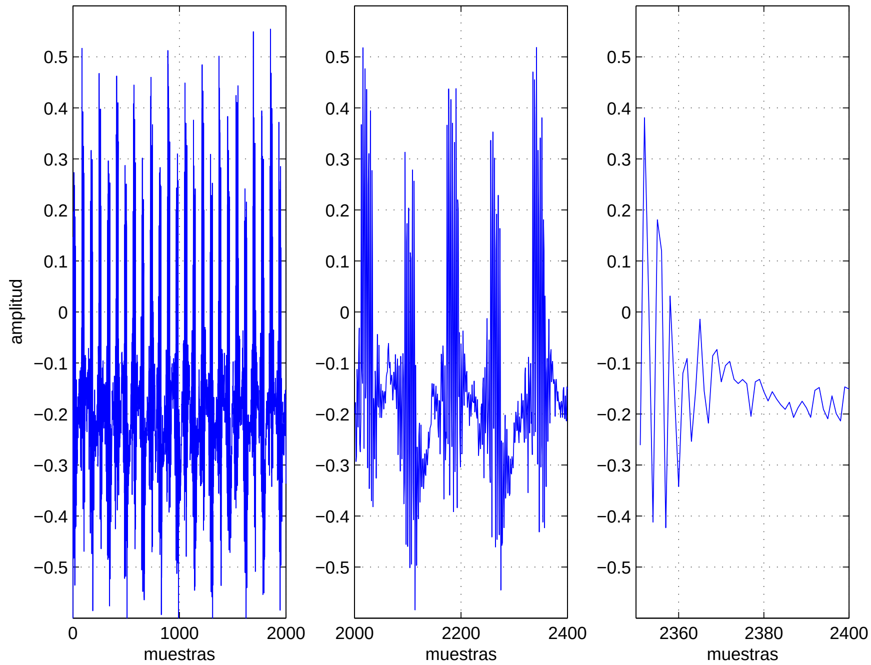
$$\mathrm{E}\{X|Y = y\} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda f_{X|Y}(\lambda|y)\,d\lambda = \mu_{X|Y}(y)$$

Notar: $\mathrm{E}\{X|Y\}$ es una función de $Y = y$

Observe la *utilísima* relación

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\{\mathrm{E}\{X|Y\}\} = \mathrm{E}\{\mu_{X|Y}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu_{X|Y}(\rho) f_Y(\rho)\,d\rho \\ &= \mathrm{E}\{X\}\end{aligned}$$

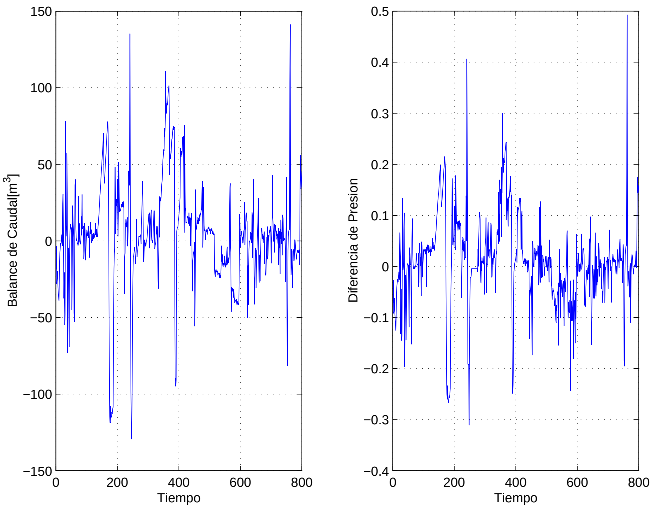
Ejemplo 1



Registros del fonema “a”

Otros registros: distinta oportunidad, momento condición, ...

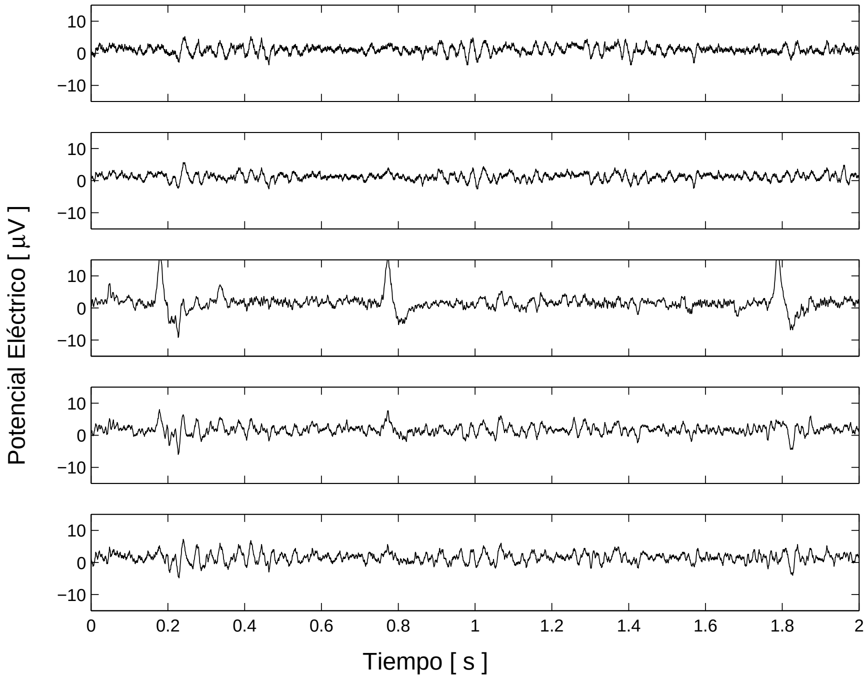
Ejemplo 2



Registros simultáneos de balance (caudal de entrada menos caudal de salida) y diferencia de presión en un tramo de oleoducto. Gentileza Repsol-YPF

Otros registros: distinta oportunidad, momento condición, ...

Ejemplo 3



Registros simultáneos de potencial en lugares vecinos de la cabeza. Gentileza Dra. Silvia Kochen (CONICET y Hospital Ramos Mejía)
Otros registros: distinta oportunidad, momento condición, ...

Intervalo 5 minutos

Señal aleatoria o proceso estocástico

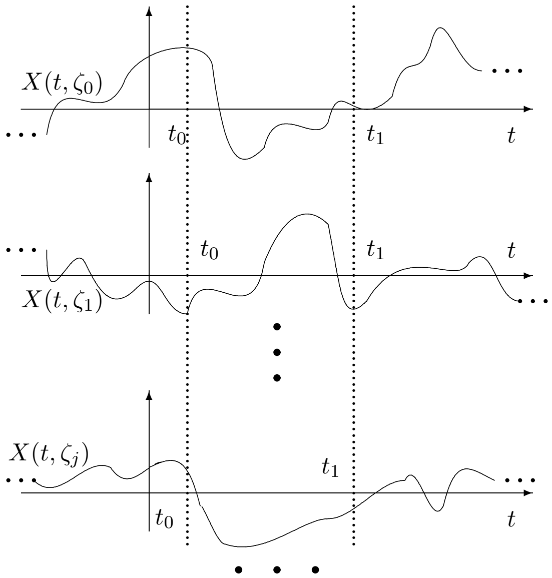
Es una función de dos variables:

$$X(t,\zeta) : \mathcal{I} \times \Omega \to \mathbb{R}$$

donde $\mathcal{I}$ es un intervalo de $\mathbb{R}$, p.ej.: $[0,\infty)$ o $(-\infty,\infty)$

- $t = t_0$, ζ la salida de un experimento aleatorio $\Rightarrow$ $X(t_0,\zeta) = X_{t_0}(\zeta)$ es VA.
- $\zeta = \zeta_0$ una salida fija, $\Rightarrow$ $X_{\zeta_0}(t)$ es una función del tiempo o realización.
- Si $t = t_0$, $\zeta = \zeta_0 \Rightarrow$; $X(t_0,\zeta_0) =$ es un número real.

Interpretación



- Colección de realizaciones indexadas por la $\zeta \in \Omega$.
- Colección de VAs indexadas por $t \in \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$.

Procesos estocásticos: ¿para qué?

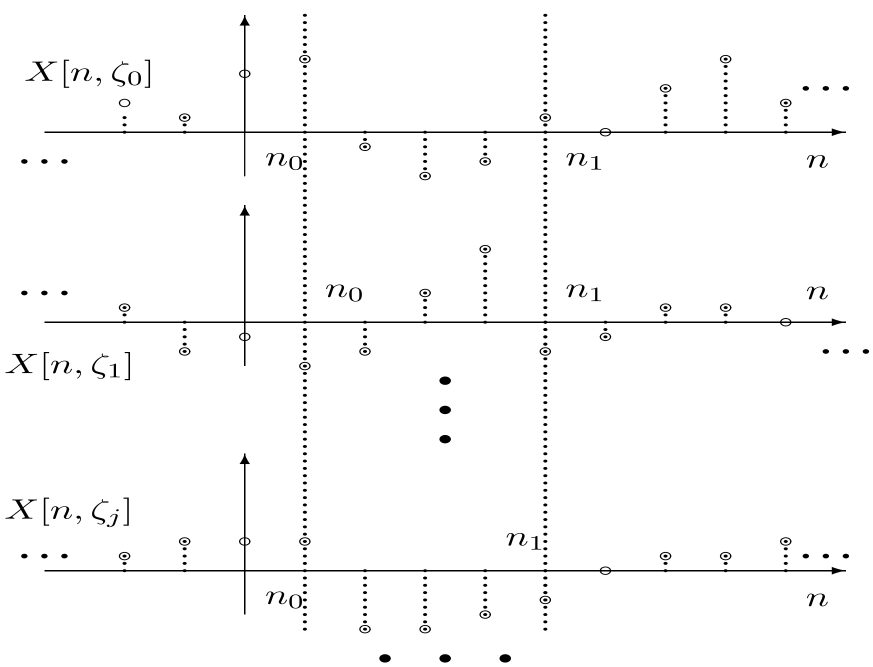
- Modelización y análisis.
- ¿qué modelizan? situaciones que si uno tratara de repetir en iguales condiciones, no lograría que la señal se repita exactamente. Se producen una cantidad señales posibles, cada una con “cierta probabilidad” de ocurrir.
- ¿qué se analiza? se trata de obtener información *del* proceso; es decir “común” a todas (ó a muchas) realizaciones. En cada realización individual la misma información podría diferir significativamente de la del conjunto.

Clases de procesos I

- Colección de realizaciones indexadas por la $\zeta \in \Omega$, por su variable independiente:
  1. VIC: procesos (propiamente dichos).
  2. VID: secuencias aleatorias, denotamos $X[n, \zeta]$.
- Colección de VAs indexadas por $t \in \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, por su rango de amplitudes:
  1. Espacio de estados discreto: todas las VA (sean de $X(t, \zeta)$ o sean de $X[n, \zeta]$) son discretas (número de llamadas telefónicas, señal telegráfica).
  2. Espacio de estados continuo (ruido térmico, modelo del oscilador).

Procesos discretos

$$X[n, \zeta] \qquad \zeta \in \Omega; \quad n \in \mathcal{I} \subseteq \mathbb{Z}$$



Clases de procesos II

- Proceso paramétrico finito : tienen un número finito de parámetros aleatorios. P.ej.: generador senoidal.

$$s(t, \phi) = A\text{sen}(2\pi f_0 t + \phi) \quad \text{con } A, f_0 \in \mathbb{R}; \quad \phi \sim \mathcal{U}[-\pi, \pi)$$

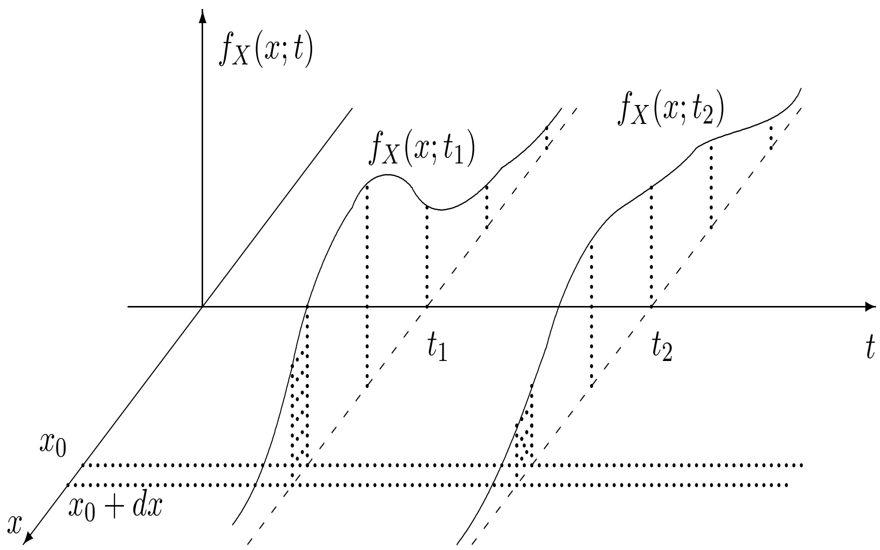
  Notar la predictibilidad.
- Regulares: o genuinamente aleatorios. Tienen un número infinito de VA y son “completamente impredecibles”. P.ej.: ruido térmico.

Los procesos que usamos, en general, combinan las dos variantes anterior. P.ej.: en forma aditiva.

Distribuciones asociadas – VIC

PROCESOS ESTOCÁSTICOS como conjunto de infinitas VA.

Caso VIC



Realizaciones: en el plano $x - t$.

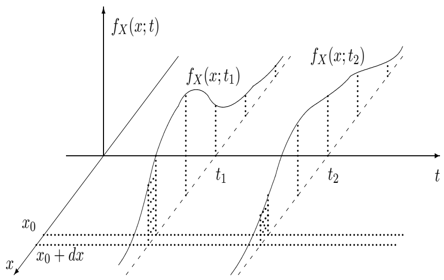
Distribuciones asociadas – VIC – 1VA

Para 1 VA

$$F_X(x;t) = P\{X_t \leq x\} = \mathcal{P}\{\zeta \in \Omega : X(t,\zeta) \leq x\}$$

$$f_X(x;t) = \frac{\partial F_X(x;t)}{\partial x}$$

$$f_X(x;t)dx = P\{x \leq X_t \leq x + dx\} = \mathcal{P}\{\zeta \in \Omega : x \leq X(t,\zeta) \leq x + dx\}$$



Distribuciones asociadas – VIC – 2VA

Para 2 VA

$$F_X(x_1,\, x_2; t_1,\, t_2) = P\{(X(t_1) \leq x_1) \cap (X(t_2) \leq x_2)\}$$

$$f_X(x_1,\, x_2; t_1,\, t_2)\, dx_1\, dx_2 = \frac{\partial^2 F_X(x_1,\, x_2; t_1,\, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = P\{(x_1 \leq X(t_1) \leq x_1 + dx_1) \cap (x_2 \leq X(t_2) \leq x_2 + dx_2)\}$$

y lógicamente

$$f_X(x_1; t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1,\, x_2; t_1,\, t_2)\, dx_2 = \frac{\partial F_X(x_1,\, \infty; t_1,\, t_2)}{\partial x_1}$$

$$f_X(x_2; t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1,\, x_2; t_1,\, t_2)\, dx_1 = \frac{\partial F_X(\infty,\, x_2; t_1,\, t_2)}{\partial x_2}$$

Distribuciones asociadas – VIC – múltiples VA

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \\ P\{(X(t_1) \le x_1) \cap (X(t_2) \le x_2) \cap \dots \cap (X(t_n) \le x_n)\}$$

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \\ \frac{\partial^n F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$$

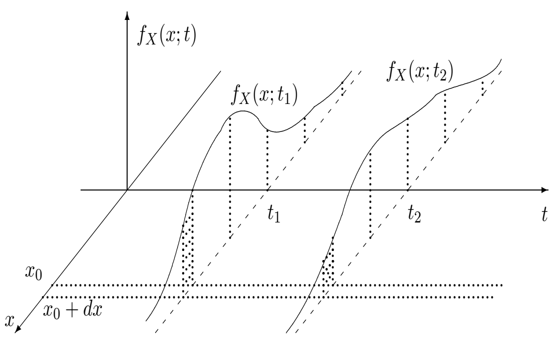
$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) dx_1\, dx_2 \dots dx_n = \\ P\left\{\bigcap_{i=1}^{n}(x_i \le X(t_i) < x_i + dx_i)\right\}$$

Distribuciones asociadas – VID

$$F_X(x; t_1) = P\{X_{t_1} \le x\} = P\{X[t_1] \le x\}$$

y

$$f_X(x; t_1)\, dx = \frac{\partial F_X(x; t_1)}{\partial x}\, dx = P\{x \le X_{t_1} \le x + dx\} = \\ = P\{x \le X[t_1] \le x + dx\}$$



Distribuciones asociadas – VID – múltiples VA

Distribución y densidad conjuntas de orden n

$$F_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = P\left\{\bigcap_{i=1}^{n}(X[t_i] \leq x_i)\right\}$$

y en caso de que exista (espacio de estado continuo), la densidad de probabilidad conjunta,

$$f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{\partial^n F_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}$$

Operaciones aritméticas

- Detalle: $\omega \in \Omega$, con $\omega = (\xi, \zeta)$ y 2 procesos $X(t, \xi)$ e $Y(t, \zeta)$.
- De la manera previsible: el proceso suma es $Z(t, \omega) = X(t, \xi) + Y(t, \zeta)$ y de modo similar las otras operaciones.

Señales Aleatorias – Resumen

Caracterización de procesos estocásticos $X(t,\zeta)$ o $X[n,\zeta]$

- Como una colección de variables aleatorias, se necesita conocer:
  - la distribución de cada VA ($F_X(x;t)$ o $F_X(x;n)$).
  - la distribución conjunta de cada par de VA ($F_X(x_1,x_2;t_1,t_2)$ o $F_X(x_1,x_2;n_1,n_2)$).
  - la distribución conjunta de cualesquiera tres VA del proceso.
  - en general, la distribución conjunta de cualesquiera m VA del proceso:

$$\begin{array}{rl} \text{VIC} & F_X(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_m;t_1,\,t_2,\,\ldots,\,t_m) \\ \text{VID} & F_X(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_m;n_1,\,n_2,\,\ldots,\,n_m) \end{array}$$

- Como una colección de realizaciones (VID o VIC):
  - Las propiedades suelen derivarse de la estructura probabilística ($F_X(\cdots)$).
  - Para ciertos procesos, alcanzan los promedios temporales.

Procesos independendientes

Definición VIC: Dos procesos $X(t,\xi)$ e $Y(t,\zeta)$ son independientes cuando cualquier evento generado por cualquier número de variables aleatorias de $X(t,\xi)$ es independiente de cualquier evento generado por cualquier número de variables aleatorias de $Y(t,\zeta)$.

Definición VID: Dos procesos $X[n,\xi]$ e $Y[n,\zeta]$ son independientes cuando cualquier evento generado por cualquier número de variables aleatorias de $X[n,\xi]$ es independiente de cualquier evento generado por cualquier número de variables aleatorias de $Y[n,\zeta]$.

Atención: no basta con la independencia de a pares de VA...

Secuencias idénticamente distribuidas

Uno de los procesos discretos más simples y útiles es

Secuencia aleatoria idénticamente distribuida:
$X[n, \zeta]$, $n \in \mathbb{Z}$, $\zeta \in \Omega$ es idénticamente distribuído cuando la distribución de cada variable aleatoria $X_n(\zeta)$ es la misma para todo n.

$$F_X(x; n) = P\{X[n] \leq x\} = \bar{F}_X(x) \quad \forall n$$

y (pensando en espacio de estados continuo)

$$f_X(x; n) = \frac{\partial \bar{F}_X(x)}{\partial x} = \bar{f}_X(x) \quad \forall n$$

Observar que “no se dice nada” sobre las distribuciones de mayor orden.

Secuencias i.i.d.

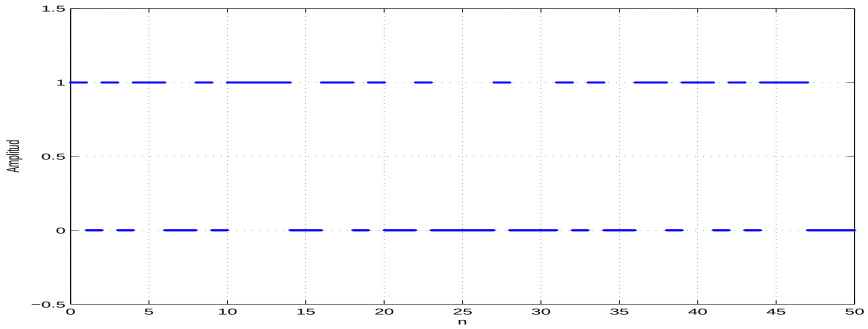
Secuencia aleatoria independiente e idénticamente distribuida:
$X[n, \zeta]$ con $n \in \mathbb{Z}$, $\zeta \in \Omega$ se denomina independiente e idénticamente distribuida cuando
i) las variables aleatorias $X_n(\zeta)$ son independientes entre sí y
ii) la distribución de cada variable aleatoria $X_n(\zeta)$ es la misma para todo n.

Ahora si,

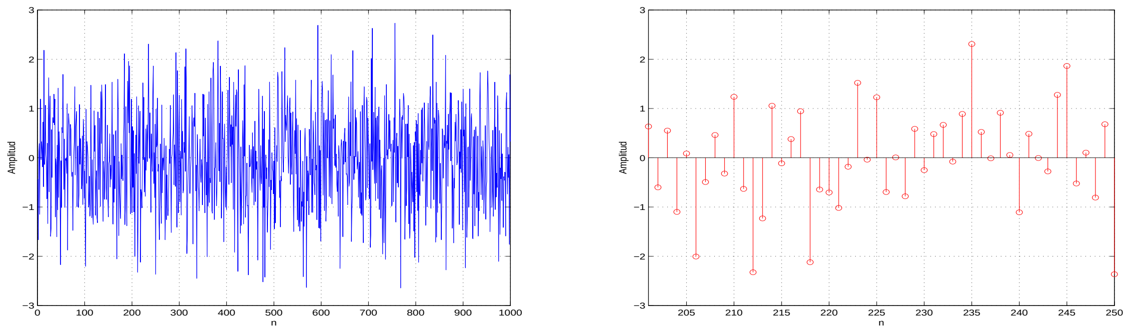
$$F_X(x_1, x_2, \ldots, x_m; n_1, n_2, \ldots, n_m) = \\ = \prod_{i=1}^{m} P\{X[n_i] \leq x_i\} = \prod_{i=1}^{m} \bar{F}_X(x_i)$$

Secuencias i.i.d.

Ejemplo 1: secuencia binaria semi-aleatoria



Ejemplo 2: secuencia de amplitudes normales $\mathcal{N}(0, 1)$.



Izquierda: 1000 muestras. *Derecha:* muestras 201 a 250 de la realización de la izquierda. Generación en Matlab: `randn()`

(Llevada a audio ya escuchamos como “suena”)

Y en VIC?

No existen rigurosamente procesos iid de VIC

Algo parecido matemáticamente es el *ruido blanco*: ya lo veremos.

Próxima Clase

- Media estadística.
- Correlación de señales determinísticas (de energía y potencia).
- Funciones de correlación y covarianza estadísticas. Otros momentos.
- Correlación: concepto; notación: orden, conjugada y desplazamiento de las variables, propiedades autocorrelación e intercorrelación.