Facultad de Ingeniería

SEÑALES Y SISTEMAS
Clase 7

Carlos H. Muravchik

30 de Marzo de 2020

Habíamos visto:

1. Procesos Estocásticos. Realizaciones.
2. Distribución, densidad.
3. Independencia. Secuencias *i.i.d.*, ruido blanco.

Y se vienen:

- Media estadística.
- Correlación de señales *determinísticas*.
- Correlación de señales *aleatorias*: concepto; notación.

Señales Aleatorias – Resumen

Caracterización de procesos estocásticos $X(t, \zeta)$ o $X[n, \zeta]$

- Como una colección de variables aleatorias, se necesita conocer:
  - la distribución de cada VA ($F_X(x; t)$ o $F_X(x; n)$).
  - la distribución conjunta de cada par de VA ($F_X(x_1, x_2; t_1, t_2)$ o $F_X(x_1, x_2; n_1, n_2)$).
  - la distribución conjunta de cualesquiera tres VA del proceso.
  - en general, la distribución conjunta de cualesquiera m VA del proceso:

$$\begin{array}{ll} \text{VIC} & F_X(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_m; t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_m) \\ \text{VID} & F_X(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_m; n_1,\, n_2,\, \ldots,\, n_m) \end{array}$$

- Como una colección de realizaciones (VID o VIC):
  - Las propiedades suelen derivarse de la estructura probabilística ($F_X(\cdots)$).
  - Para ciertos procesos, alcanzan los promedios temporales.

Señales Aleatorias – Caso especial: i.i.d.

Secuencia aleatoria independiente e idénticamente distribuida:
$X[n, \zeta]$ con $n \in \mathbb{Z}$, $\zeta \in \Omega$ se denomina i.i.d. cuando
i) la distribución de cada VA $X_n(\zeta)$ es $\bar{F}_X(x_n)$ $\forall n$ y
ii) las variables aleatorias $X_n(\zeta)$ son mutuamente independientes.

Entonces,

$$F_X(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_m; n_1,\, n_2,\, \ldots,\, n_m) = \\ = \prod_{i=1}^{m} P\{X[n_i] \le x_i\} = \prod_{i=1}^{m} \bar{F}_X(x_i)$$

No existen rigurosamente procesos iid de VIC

En VIC usaremos una idealización matemática: *ruido blanco*.

Caracterización de procesos

Observaciones:

- A veces es posible conjeturar teóricamente las distribuciones conjuntas (modelizar).
- Conocer experimentalmente todas las distribuciones conjuntas es muy difícil (salvo unos pocos casos).
- Experimentalmente se pueden “estimar” algunos momentos.
- La caracterización completa necesita infinitos momentos (salvo casos especiales).
- En SyS veremos los momentos de 1^{ro} y 2^{do} orden (estadística de 2^{do} orden).
- Hay un número de resultados para estadística de orden superior (HOS $\rightarrow$ postgrado?)

Media estadística

Definición: Media estadística del proceso

- VIC, espacio de estados continuo (EEC):

$$\mathrm{E}\{X(t)\} = \mathrm{E}\{X_t(\zeta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x;t)dx = \mu(t).$$

- VIC, espacio de estados discreto (EED) $\mathcal{S} = \{\ldots, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \ldots\}$:

$$\mathrm{E}\{X(t)\} = \mathrm{E}\{X_t(\zeta)\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i P\{X(t) = \alpha_i\} = \mu(t).$$

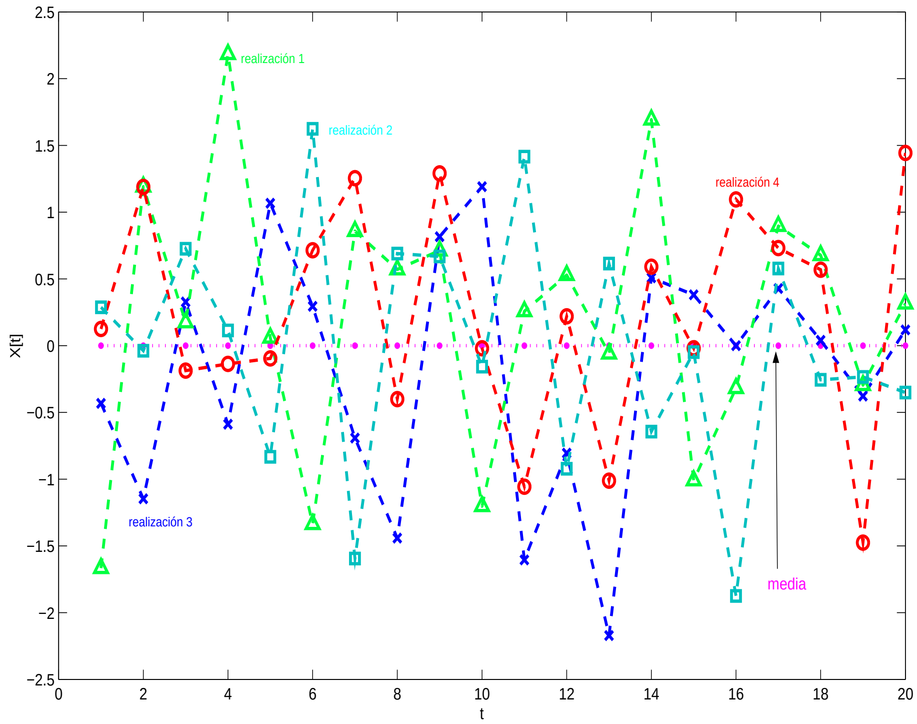
- VID, espacio de estados continuo (EEC):

$$\mathrm{E}\{X[n]\} = \mathrm{E}\{X_n(\zeta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x;n)dx = \mu[n].$$

- VID, espacio de estados discreto (EED):

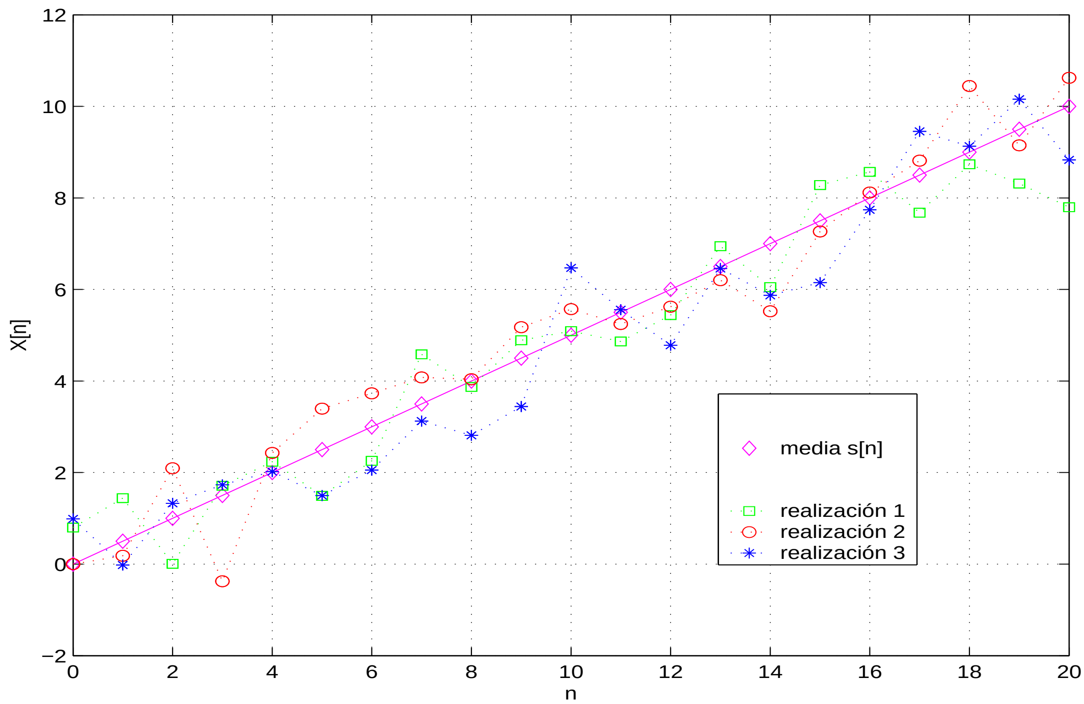
$$\mathrm{E}\{X[n]\} = \mathrm{E}\{X_n(\zeta)\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i P\{X[n] = \alpha_i\} = \mu[n].$$

Media estadística – significado 1



Realizaciones y media de un PA iid con $\bar{f}_X(x) = \mathcal{N}(0, 1)$

Media estadística – significado 2



Realizaciones y media de un PA del tipo “señal más ruido”. La señal es una rampa $s[n] = (n/2)u[n]$ y el ruido $W[n]$ un PA iid con $\bar{f}_W(w) = \mathcal{N}(0, 1)$

Media estadística – Ejemplo 1

Secuencia iid: donde una VA tiene una densidad $\bar{f}_X(x)$ con media μ.

Intuición: al ser idénticamente distribuida, la secuencia debería tener media **constante**.

$$\mathrm{E}\{X[n]\} = \mathrm{E}\{X_n(\zeta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\bar{f}_X(x)dx = \mu$$

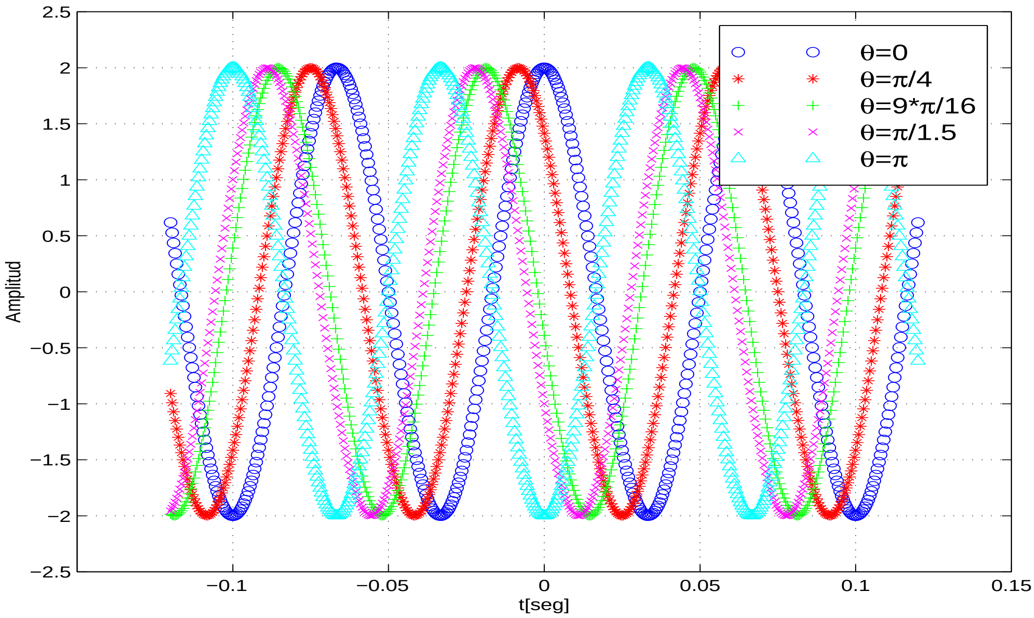
y así es!.

Media estadística – Ejemplo 2, idea

Generador senoidal:

Con $X(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$; y A y ω_0 constantes y $\theta \sim \mathcal{U}[-\pi, \pi)$.

Intuición: mirando cada una de las realizaciones del proceso, la media debería ser nula.



Media estadística – Ejemplo 2, cuentas

Calculamos:

$$\mathrm{E}\left\{X(t)\right\} = \mathrm{E}\left\{A\cos(\omega_0 t + \theta)\right\} = A \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_0 t + \theta)\, \frac{d\theta}{2\pi} =$$
$$= \frac{A}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos(\omega_0 t)\cos(\theta) - \mathrm{sen}(\omega_0 t)\,\mathrm{sen}(\theta)\right)\, d\theta =$$
$$= \frac{A}{2\pi}\cos(\omega_0 t) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta)\, d\theta - \frac{A}{2\pi}\mathrm{sen}(\omega_0 t) \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}(\theta)\, d\theta = 0$$

y así es: media cero!.

También -más fácil- cambiando variables $u = \omega_0 t + \theta,\ du = d\theta$.

Sigue: caracterizaciones de 2do. orden.

Correlación de señales de energía

Idea básica:

medida de **parecido** para señales determinísticas de energía $\mathcal{E} = 1$

Para señales complejas (notación: $f(t) = f_R(t) + jf_I(t)$; $g^*(t) = g_R(t) - jg_I(t)$):

Definición: *Función de intercorrelación* entre f y g con energías $\mathcal{E}_f$ y $\mathcal{E}_g$

$$r_{fg}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau + \lambda) g^*(\lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) g^*(\alpha - \tau)\, d\alpha$$

Notación abreviada: $r_{fg}(\tau) = \{f \star g\}(\tau)$.
Observe: en $r_{fg}(\tau)$ la primera función va en la integral desplazada por el argumento de $r_{fg}(\cdot)$ y la segunda va conjugada y sin desplazar.
Concepto:

Función de autocorrelación

Intuición: Parecido de una señal con una versión de sí misma, desplazada en la cantidad τ.

Definición: *Función de autocorrelación* de *f*

$$r_f(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau+\lambda)f^*(\lambda)\,d\lambda$$

- La energía de f es $r_f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2\,d\lambda = \mathcal{E}_f$ (real, positivo).
- Comparando f consigo misma sin desplazar se consigue el *máximo* parecido.
- Haciendo el cambio $\rho = \lambda + \tau$, $d\rho = d\lambda$ y

$$r_f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho)f^*(\rho-\tau)\,d\rho = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\rho-\tau)f^*(\rho)\,d\rho\right)^*$$

Luego $\boxed{r_f(\tau) = r_f^*(-\tau)}$ tiene *simetría Hermítica:*
i) $\Re\{r_f(\tau)\}$ es par ; y *ii)* $\Im\{r_f(\tau)\}$ es impar.

Intercorrelación

Definición: *Función de intercorrelación* de *f*

$$r_{fg}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau+\lambda)g^*(\lambda)\,d\lambda$$

- El argumento de $r_{fg}(\cdot)$ se conoce como *retardo* o *demora*.
- La auténtica *medida de parecido* sería $\frac{r_{fg}(\tau)}{\sqrt{\mathcal{E}_f\mathcal{E}_g}}$ (¿media?).
- Haciendo el cambio $\rho = \lambda + \tau$, $d\rho = d\lambda$ y

$$r_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho)g^*(\rho-\tau)\,d\rho = \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\rho-\tau)f^*(\rho)\,d\rho\right)^*$$

Luego $\boxed{r_{fg}(\tau) = r_{gf}^*(-\tau)}$.
- O sea que el orden de f y g en $r_{fg}(\tau)$ es importante!
- Retardo: argumento de la 1ra función (sin conjugar) menos el de la segunda (que va conjugada).

Otras propiedades

Desigualdad de Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky: *para señales de energía*

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)g^*(\lambda)\,d\lambda\right|^2 \;\le\; \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2\,d\lambda \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2\,d\lambda \;=\; \mathcal{E}_f\mathcal{E}_g$$

con igualdad sii $g(x) = Kf(x),\ K \in \mathbb{C}$.

Recuerde en $\mathbb{R}^3$: $|\vec{a}\cdot\vec{b}|^2 = \left||\vec{a}||\vec{b}|\cos\widehat{(\vec{a},\vec{b})}\right|^2 \le |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$; con igualdad sii $(\vec{a},\,\vec{b})$ colineales.

Consecuencias:

- $|r_f(\tau)| \le \mathcal{E}_f = r_f(0)$, lo que confirma la intuición sobre el máximo parecido. Note: la energía en f es el valor al origen de la auto-correlación!
- $|r_{fg}(\tau)| \le \sqrt{\mathcal{E}_f\mathcal{E}_g}$. No se confunda: en la intercorrelación, nada de máximo en cero en general!

Correlación para Señales determinísticas VID

Todo es similar, cambiando de la manera obvia.

Función de Autocorrelación:

$$r_f[m] \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[m+n]f^*[n]$$

Función de Intercorrelación:

$$r_{fg}[m] \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[m+n]g^*[n]$$

Incluso la desigualdad de C-S-B:

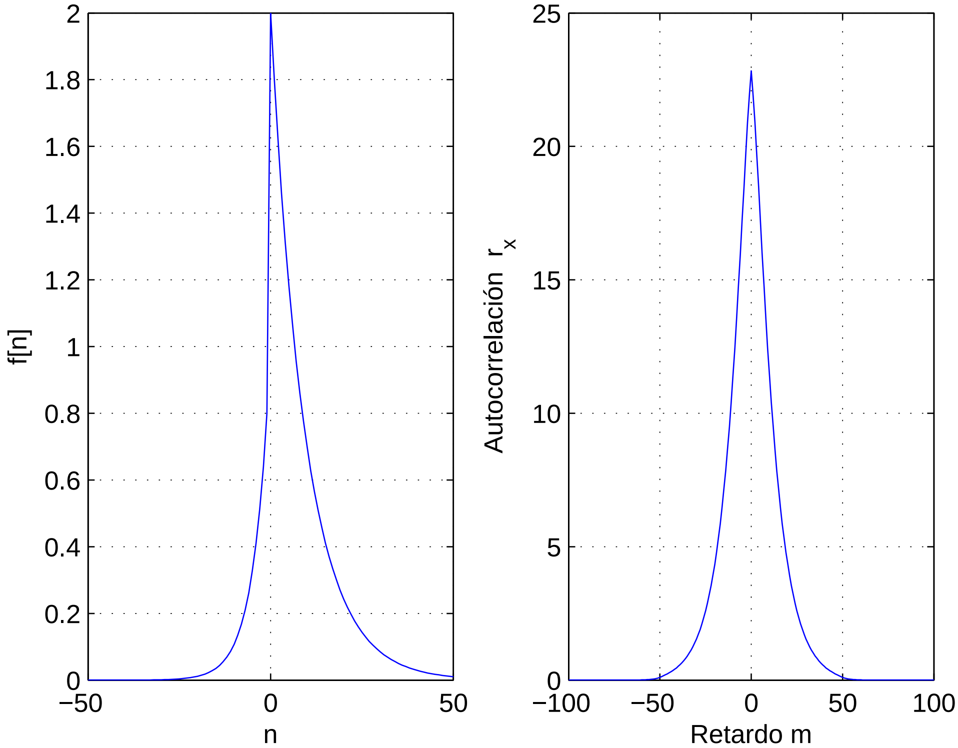
$$\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[m+n]g^*[n]\right|^2 \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f[n]|^2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g[n]|^2 = \mathcal{E}_f\mathcal{E}_g$$

y sus consecuencias.

Intervalo 5 minutos

Ejemplo

$$f[n] = Aa^n u[n] + Bb^{-n} u[-n-1] \quad |a|, |b| < 1$$
$$A = 2,\ B = 1,\ a = 0{,}9,\ b = 0{,}8$$



Señales de Potencia

Reemplazando sumas por promedios temporales:

Función de Intercorrelación:

$$r_{fg}[m] \triangleq \langle f, g\rangle[m] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} f[m+n]g^*[n]$$

$$r_{fg}(x) \triangleq \langle f, g\rangle(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x+\lambda)g^*(\lambda)\, d\lambda$$

Función de Autocorrelación:

$$r_f[m] \triangleq \langle f, f\rangle[m] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} f[m+n]f^*[n]$$

$$r_f(x) \triangleq \langle f, g\rangle(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x+\lambda)f^*(\lambda)\, d\lambda$$

Correlación de procesos estocásticos: Planteo

- Con señales determinísticas hay una sola realización por señal.
- Pretender aplicar r_{fg} a dos realizaciones desplazadas de un proceso estocástico $f(t) = X(t, \zeta_1)$ y $g(t) = X(t, \zeta_2)$ hace que el resultado no sea único y dependa de las realizaciones elegidas; o de ζ_1 y ζ_2. Graficar.
- Ese camino no da nada fácil de calcular, ni característico de *todo* el proceso, en general.
- Otro 'problema' es que las realizaciones de los procesos suelen ser señales de potencia.
- Una idea practicable es comparar en términos estadísticos las *VA desplazadas* del proceso.
- Es decir, tomar dos VA del proceso $X(t, \zeta)$ separadas por τ, $Z = X_t(\zeta)$ e $Y = X_{t+\tau}(\zeta)$ y compararlas usando algo como el coeficiente de correlación ρ_{ZY}.

Correlación

- Para dos VA Z e Y el coeficiente de correlación era

$$\rho_{ZY} = \frac{\mathrm{E}\left\{(Z - \mu_z)(Y - \mu_y)\right\}}{\sigma_z \sigma_y}.$$

- Cuando $\rho_{ZY} \approx \pm 1$ hay *mucho* parecido.
- Cuando $\rho_{ZY} \approx 0$ hay *poco* parecido.
- Las medias se sustraen para no perturbar la medida de parecido con "parecido trivial" como es la media.
- Para no complicar, con procesos evitaremos la normalización por $\sigma_z \sigma_y$.
- Eso deja a la medida de parecido *sensible a la* **escala** *del proceso*.

Auto-semejanza 1

- $X(t, \zeta)$ es un PA.
- t_1 y t_2 son dos instantes en $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$.
- Consideramos las VA $Z = X(t_1, \zeta)$ y $Y = X(t_2, \zeta)$.
- Z e Y tienen medias $\mu_X(t_1) = \mathrm{E}\{X(t_1, \zeta)\}$ y $\mu_X(t_2) = \mathrm{E}\{X(t_2, \zeta)\}$.

Definición: *Función de autocovarianza*

$$C_{XX}(t_1, t_2) \triangleq \mathrm{E}\{(X(t_1) - \mu_X(t_1))(X(t_2) - \mu_X(t_2))\}$$

Notar: $C_{xx}(t_1, t_2)$ es una función determinística de las variables t_1 y t_2.

Auto-semejanza 2

Para calcular $C_{xx}(t_1, t_2)$:

- si $X(t, \zeta)$ tiene EEC

$$C_{xx}(t_1, t_2) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha - \mu_X(t_1))(\beta - \mu_X(t_2)) f_X(\alpha, \beta; t_1, t_2)\, d\alpha\, d\beta$$

- si $X(t, \zeta)$ tiene EED

$$C_{xx}(t_1, t_2) = \sum_{i_1=-\infty}^{\infty} \sum_{i_2=-\infty}^{\infty} (x_{i_1} - \mu_X(t_1))(x_{i_2} - \mu_X(t_2)) p_X(i_1, i_2)$$

donde $p_X(i_1, i_2) = P\{(X(t_1) = x_{i_1}) \cap (X(t_2) = x_{i_2})\}$

Más auto-semejanza

Definición: *Función de autocorrelación*

$$R_{xx}(t_1, t_2) \triangleq \mathrm{E}\{X(t_1)X(t_2)\}$$

Relación con la autocovarianza

$$\begin{aligned} C_{xx}(t_1, t_2) &= \mathrm{E}\{(X(t_1) - \mu_x(t_1))(X(t_2) - \mu_x(t_2))\} = \\ &= \mathrm{E}\{X(t_1)X(t_2)\} - \mu_x(t_1)\mu_x(t_2) = \\ &= R_{xx}(t_1, t_2) - \mu_x(t_1)\mu_x(t_2) \end{aligned}$$

o

$$R_{xx}(t_1, t_2) = C_{xx}(t_1, t_2) + \mu_x(t_1)\mu_x(t_2)$$

Para procesos de media nula ($\mu_x(t) = 0, \forall t$), resulta $C_{xx}(t_1, t_2) \equiv R_{xx}(t_1, t_2)$.

Funciones de correlación para procesos VID

Definición: Función de Autocovarianza

$$C_{xx}[n_1, n_2] \triangleq \mathrm{E}\{(X[n_1] - \mu_x[n_1])(X[n_2] - \mu_x[n_2])\}$$

Definición: Función de Autocorrelación

$$R_{xx}[n_1, n_2] \triangleq \mathrm{E}\{X[n_1]X[n_2]\}$$

$$R_{xx}[n_1, n_2] = C_{xx}[n_1, n_2] + \mu_x(n_1)\mu_x(n_2)$$

Ejemplo: secuencia iid

$W[n]$ es una secuencia iid con $f_w(\cdot)$,
con media μ_w y varianza σ_w^2.

Si $n_1 \neq n_2 \Rightarrow W[n_1]$ y $W[n_2]$ son indep'tes:

$$R_{WW}[n_1,n_2] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \alpha\beta f_W(\alpha,\beta;n_1,n_2)\,d\alpha\,d\beta =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \alpha\beta f_W(\alpha)\,f_W(\beta)\,d\alpha\,d\beta =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f_W(\alpha)d\alpha \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \beta f_W(\beta)d\beta = \mu_w^2$$

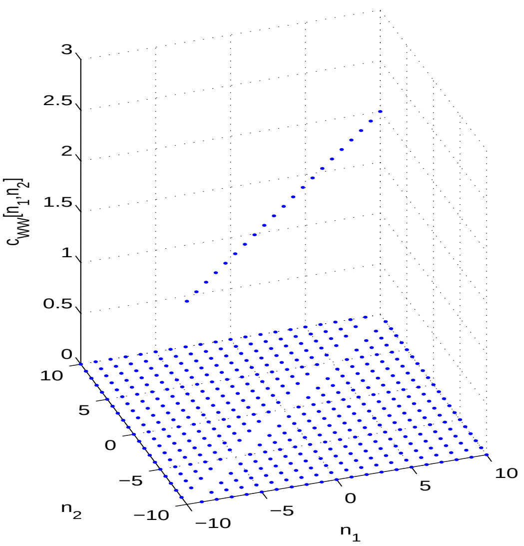
Si $n_1 = n_2 \Rightarrow W[n_1] = W[n_2]$ y **no** son indep'tes

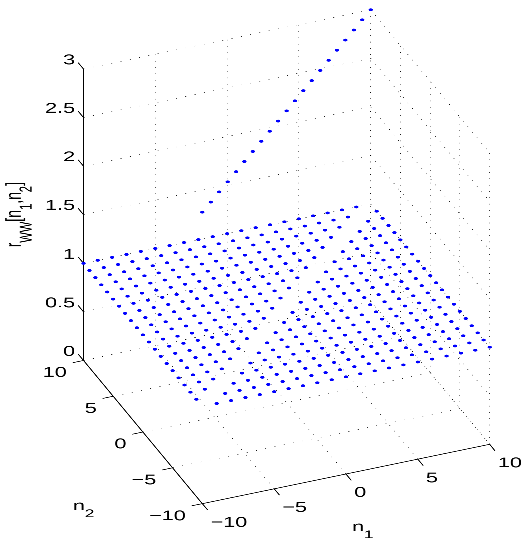
$$R_{WW}[n,n] = \mathrm{E}\{W[n]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 f_W(\alpha)\,d\alpha = \sigma_w^2 + \mu_w^2$$

Ejemplo: secuencia iid

$$C_{WW}[n_1,n_2] = \sigma_W^2\,\delta[n_1-n_2] \quad \text{y}$$
$$R_{WW}[n_1,n_2] = \mu_W^2 + \sigma_W^2\,\delta[n_1-n_2]$$

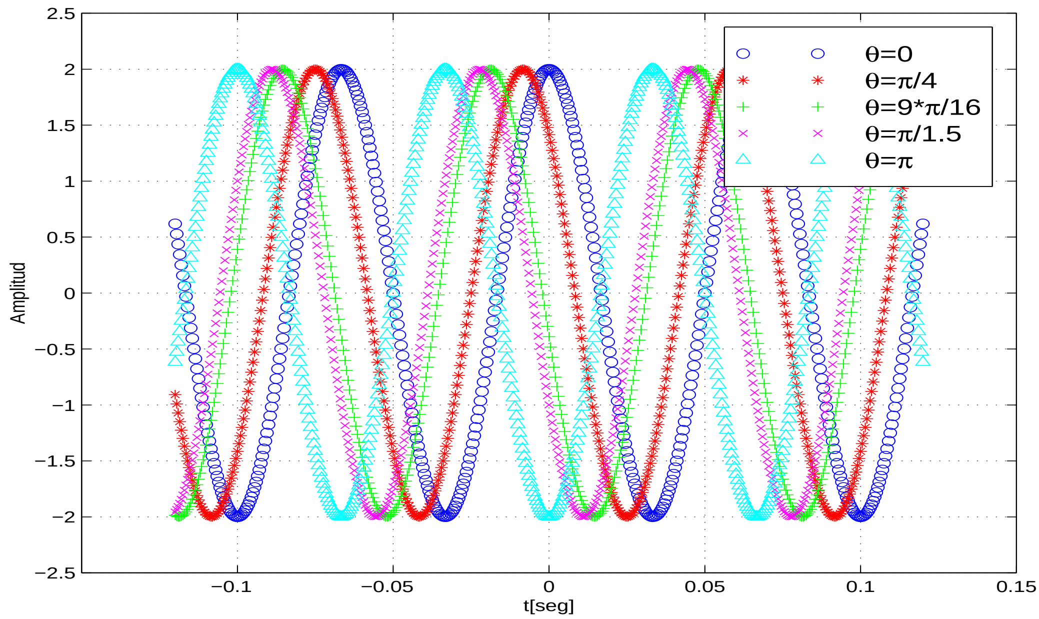
Autocovarianza (izquierda) y autocorrelación (derecha) de una secuencia iid con media 1 y varianza 2





Ejemplo: oscilador

Un generador senoidal puede modelarse como un proceso aleatorio $X(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$, donde A, θ y/o ω_0 pueden ser VAs.
Algunas realizaciones de $X(t)$ son:



Ejemplo: oscilador 2

¿Cuanto valen $E\{X(t)\}$, $R_{XX}(t+\tau, t)$ y $E\{X^2(t)\}$ si ω_0 y A son constantes y θ es una variable aleatoria uniformemente distribuida en $[-\pi, \pi]$?.

$E\{X(t)\} = 0$; ya lo calculamos.

¿$R_{XX}(t+\tau, t)$? Intuición: periódica con igual período que las realizaciones, positiva y negativa...

Ejemplo: oscilador 3

En la práctica analizan qué es lo que pasa cuando:

- ω_0 y A constantes; θ es una variable uniformemente distribuida en $[-\pi/2, \pi/2]$.
- ω_0 y θ constantes; A: V.A. uniformemente distribuida en $[-A_0, A_0]$.
- $\theta = 0$ y A constante; ω_0: V.A. uniformemente distribuida en $[-B\pi, B\pi]$.
- A constante; θ es una variable uniformemente distribuida en $[-\pi, \pi]$; ω_0: V.A. uniformemente distribuida en $[-B\pi, B\pi]$, independiente de θ.

Intercovarianza e intercorrelación 1

Dos procesos estocásticos a comparar.

- Situación que se modeliza: Hay un experimento aleatorio subyacente que produce salidas $\zeta \in \Omega$. ¿Cuánto se parecen?
- Se tienen 2 PA $X(t, \zeta)$ e $Y(t, \zeta)$.
- Cada PA tiene sus propias características; aunque puede haber cierto “comportamiento” común.

Ejemplo:

- Una fuente de actividad neuronal produce una distribución espacial de potencial en el cuero cabelludo.
- Dos electrodos toman registros $X(t, \zeta)$ e $Y(t, \zeta)$ de diferencias de potencial (con respecto a un tercer electrodo o tierra) en dos puntos distintos de la cabeza.
- ¿Qué parecido tienen $X(t, \zeta)$ e $Y(t, \zeta)$?

Intercovarianza e intercorrelación 2

Tomamos una VA del primer proceso y otra del segundo. Con VID (complejos, para mayor generalidad):

Función de intercovarianza

$$C_{xy}[n_1, n_2] \triangleq \mathrm{E}\left\{(X[n_1] - \mathrm{E}\{X[n_1]\})(Y[n_2] - \mathrm{E}\{Y[n_2]\})^*\right\}$$

Función de intercorrelación

$$R_{XY}[n_1, n_2] \triangleq \mathrm{E}\{X[n_1]Y[n_2]^*\}$$

$$R_{xy}[n_1, n_2] = C_{xy}[n_1, n_2] + \mu_x(n_1)\mu_y^*(n_2)$$

Similarmente para VIC

Próximas Clases

- Resumen Correlaciones.
- Estacionariedad.
- **P**rocesos **A**leatorios **E**stacionarios en **S**entido **A**mplio
- Propiedades de PAESA.
- Procesos Gaussianos.
- Ergodicidad.
- Sistemas.