FACULTAD DE INGENIERÍA

SEÑALES Y SISTEMAS
Clase 8

Carlos H. Muravchik

02 de Abril de 2020

Habíamos visto:

1. Media estadística.
2. Correlación de señales determinísticas.
3. Correlación de de procesos estocásticos.

Y se vienen:

- Resumen Correlación
- Estacionariedad: ESE, ESA. Ejemplos ESA.
- Propiedades de auto e inter de PA ESA.
- Procesos Gaussianos. Distrib conjunta. Propiedades.
- Brevísima introducción a Ergodicidad.

Correlación Señales determinísticas, de energía, VIC

Función de Intercorrelación:

$$r_{fg}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau+\lambda) g^*(\lambda)\, d\lambda$$

Función de Autocorrelación:

$$r_f(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau+\lambda) f^*(\lambda)\, d\lambda$$

Algunas Propiedades:

- $|r_f(\tau)| \leq \mathcal{E}_f = r_f(0)$, $\forall \tau \in \mathbb{R}$, con $r_f(0)$ real y > 0.
- $r_f(\tau) = r_f^*(-\tau)$ (simetría hermítica)
- $|r_{fg}(\tau)| \leq \sqrt{\mathcal{E}_f \mathcal{E}_g}$. No se confunda: aquí, nada de máximo en cero en general!
- $r_{fg}(\tau) = r_{gf}^*(-\tau)$
- Gráficos

Correlación Señales determinísticas, de energía, VID

Función de Intercorrelación:

$$r_{fg}[m] \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[m+n] g^*[n]$$

Función de Autocorrelación:

$$r_f[m] \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[m+n] f^*[n]$$

Algunas Propiedades:

- $|r_f[m]| \leq \mathcal{E}_f = r_f[0]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, con $r_f(0)$ real y > 0.
- $r_f[m] = r_f^*[-m]$ (simetría hermítica)
- $|r_{fg}[m]| \leq \sqrt{\mathcal{E}_f \mathcal{E}_g}$. No se confunda: aquí, nada de máximo en cero en general!
- $r_{fg}[m] = r_{gf}^*[-m]$
- Gráficos

Funciones de correlación - PA VIC

Autocovarianza:

$$C_{xx}(t_1,t_2) \triangleq \mathrm{E}\{ (X(t_1) - \mu_x(t_1))(X(t_2) - \mu_x(t_2))^*\}$$

Autocorrelación:

$$R_{xx}(t_1,t_2) \triangleq \mathrm{E}\{X(t_1)X^*(t_2)\}$$

$$R_{xx}(t_1,t_2) = C_{xx}(t_1,t_2) + \mu_x(t_1)\mu_x^*(t_2)$$

Intercovarianza:

$$C_{xy}(t_1,t_2) \triangleq \mathrm{E}\{ (X(t_1) - \mu_x(t_1))(Y(t_2) - \mu_y(t_2))^*\}$$

Intercorrelación:

$$R_{xy}(t_1,t_2) \triangleq \mathrm{E}\{X(t_1)Y^*(t_2)\}$$

$$R_{xy}(t_1,t_2) = C_{xy}(t_1,t_2) + \mu_x(t_1)\mu_y^*(t_2)$$

Funciones de correlación - PA VID

Autocovarianza:

$$C_{xx}[n_1,n_2] \triangleq \mathrm{E}\{ (X[n_1] - \mu_x[n_1])(X[n_2] - \mu_x[n_2])^*\}$$

Autocorrelación:

$$R_{xx}(t_1,t_2) \triangleq \mathrm{E}\{X[n_1]X^*[n_2]\}$$

$$R_{xx}[n_1,n_2] = C_{xx}[n_1,n_2] + \mu_x[n_1]\mu_x^*[n_2]$$

Intercovarianza:

$$C_{xy}[n_1,n_2] \triangleq \mathrm{E}\{ (X[n_1] - \mu_x[n_1])(Y[n_2]) - \mu_y[n_2])^*\}$$

Intercorrelación:

$$R_{xy}[n_1,n_2] \triangleq \mathrm{E}\{X[n_1]Y^*[n_2]\}$$

$$R_{xy}[n_1,n_2] = C_{xy}[n_1,n_2] + \mu_x[n_1]\mu_y^*[n_2]$$

Intercovarianza e intercorrelación 1

Dos procesos estocásticos a comparar.

- Situación que se modeliza: Hay un experimento aleatorio subyacente que produce salidas $\zeta \in \Omega$. ¿Cuánto se parecen?
- Se tienen 2 PA $X(t, \zeta)$ e $Y(t, \zeta)$.
- Cada PA tiene sus propias características; aunque puede haber cierto "comportamiento" común.

Ejemplo:

- Una fuente de actividad neuronal produce una distribución espacial de potencial en el cuero cabelludo.
- Dos electrodos toman registros $X(t, \zeta)$ e $Y(t, \zeta)$ de diferencias de potencial (con respecto a un tercer electrodo o tierra) en dos puntos distintos de la cabeza.
- ¿Qué parecido tienen $X(t, \zeta)$ e $Y(t, \zeta)$?

Intercovarianza e intercorrelación 2

Tomamos una VA del primer proceso y otra del segundo. Con VID:

Función de intercovarianza:

$$\boxed{C_{xy}[n_1, n_2] \triangleq \mathrm{E}\,\{(X[n_1] - \mathrm{E}\{X[n_1]\})(Y[n_2] - \mathrm{E}\{Y[n_2]\})\}}$$

Función de intercorrelación:

$$\boxed{R_{XY}[n_1, n_2] \triangleq \mathrm{E}\{X[n_1]Y[n_2]\}}$$

$$R_{xy}[n_1, n_2] = C_{xy}[n_1, n_2] + \mu_x(n_1)\mu_y^*(n_2)$$

Similarmente para VIC

¿Por qué?

- Distribuciones y densidades condensan toda la información del proceso.
- Son muchas y difíciles de estimar
- Media y correlaciones son sólo momentos de 1ro y 2do orden
- Bajo ciertas condiciones son fáciles de estimar
- Muestran sólo aspectos parciales del proceso; pero que quizás basten para el propósito deseado

Estacionariedad 1

Concepto:

- Un proceso queda caracterizado por la familia de distribuciones conjuntas $\forall K \in \mathbb{N}$

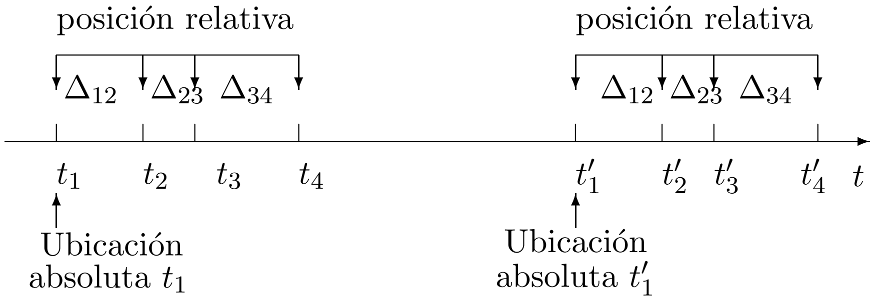
$$F_X(x_1, x_2, \ldots, x_K; n_1, n_2, \ldots, n_K)$$

- Estacionario: las distribuciones del PA dependen de la separación entre las VA involucradas; pero **no** de su ubicación absoluta.

Las propiedades estadísticas no dependen del instante donde se mira al PA (invarianza).

Estacionariedad 2

Consideremos $X(t,\zeta)$, $K = 4$ y $\bar{F}_X(x_1, x_2, x_3, x_4; t_1, t_2, t_3, t_4)$



Cuando $X(t,\zeta)$ es **estacionario** debe ocurrir

$$\bar{F}_X(x_1, x_2, x_3, x_4; t_1, t_2, t_3, t_4) = \bar{F}_X(x_1, x_2, x_3, x_4; t'_1, t'_2, t'_3, t'_4)$$

siempre que se cumplan:

$$t_2 - t_1 = \Delta_{12} = t'_2 - t'_1, \qquad t_3 - t_2 = \Delta_{23} = t'_3 - t'_2$$

y

$$t_4 - t_3 = \Delta_{34} = t'_4 - t'_3$$

Porque no interesa el valor de t_1 ó t'_1.

Estacionariedad en Sentido Estricto (ESE)

Definición: Un proceso $X(t,\zeta)$ se dice ESE, cuando para *todos* los órdenes K

$$\bar{F}_X(x_1, \ldots, x_K; t_1, \ldots, t_K) = F_X(x_1, \ldots, x_K; \Delta_{12}, \ldots, \Delta_{1K})$$

$\forall t_1, \ldots, t_K \in \mathbb{R}$ y donde $\Delta_{1j} \triangleq t_j - t_1;\ \forall 2 \leq j \leq K$.

Notar:

- Mientras $\bar{F}_X$ es una función de K variables temporales en el segundo grupo de argumentos, F_X lo es solamente de $K - 1$.
- Todas las distribuciones conjuntas de orden K y separaciones relativas Δ_{1j} tienen la misma distribución conjunta e igual a la $\bar{F}_X(x_1, \ldots, x_K; 0, \Delta_{12}, \ldots, \Delta_{1K})$.
- F_X es la distribución conjunta de K VA aplicable a cualquier t_1, (siempre que $t_2 = t_1 + \Delta_{12}, \ldots, t_K = t_1 + \Delta_{1K}$)
- Verificar esto para todos los $K = 1, 2, \ldots$ es **muy** difícil.

Estacionariedad en Sentido Amplio (ESA)

Menos ambicioso y de mucha mayor aplicabilidad:

Definición: Un proceso $X(t, \zeta)$ se dice ESA, cuando se cumplen simultáneamente las dos condiciones:

1. $\mathrm{E}\{X(t)\} = \mu_x$
2. $\mathrm{E}\{X(t_1)X(t_2)^*\} = R_{xx}(t_1 - t_2) \qquad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

- ESA: media estadística constante y autocorrelación función del *retardo* $\tau \triangleq t_1 - t_2$ entre las VA involucradas o $\mathrm{E}\{X(t+\tau)X(t)^*\} = R_{xx}(\tau) \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- Si un proceso es ESE también es ESA.
- Hay muchos más procesos que son ESA que ESE.

Notar: la definición apta para procesos complejos, por eso el conjugado. En ese caso, es importante el orden de las VA.

Estacionariedad *conjunta* en sentido amplio

Definición: Dos procesos $X(t, \zeta)$ e $Y(t, \zeta)$ son conjuntamente estacionarios en sentido amplio o C-ESA, cuando se cumplen simultáneamente las tres condiciones:

1. $X(t)$ es un PAESA.
2. $Y(t)$ es un PAESA.
3. $\mathrm{E}\{X(t_1)Y(t_2)^*\} = R_{xy}(\tau) \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R} \quad \text{tales que } \tau = t_1 - t_2$

Ejemplos

IID: ¿es ESA?

Generador senoidal ¿es ESA?

Intervalo 5 minutos

Propiedades de la función de autocorrelación de procesos ESA

- *Cota superior*

$$|R_X(\tau)| \leq R_{XX}(t,t) = R_X(0)$$

Se demuestra con una simple aplicación de la desigualdad C-S-B.

- *Simetría*

$$R_X(\tau) = \mathrm{E}\left\{X(t+\tau)X(t)^*\right\} = R_X(-\tau)^*$$

simetría Hermítica. Para el caso real, $R_X(\tau)$ es par.

- *Autocorrelación y valor cuadrático medio*

$$R_X(0) = R_{XX}(t,t) = \mathrm{E}\left\{|X(t)|^2\right\} = \mathrm{Var}\left\{X(t)\right\} + |\mu_X(t)|^2$$

Notemos que $R_X(0)$ es el valor cuadrático medio del proceso en el instante t.

Propiedades de la función de autocorrelación de procesos ESA 2

- *Media constante* Si la media del proceso $\mu_X = \mathrm{E}\{X(t)\}$ es constante entonces $R_X(\tau)$ tiene un término constante $|\mu_X|^2$.
- *Componente periódica* Si $X(t)$ tiene una componente períodica, entonces $R_X(\tau)$ tiene una componente periódica con el *mismo* período.
- *Positividad definida* La función de autocorrelación de un proceso no tiene forma arbitraria sino que debe ser *positiva definida*. Es equivalente a decir que la transformada de Fourier es siempre positiva -o nula- para todo f. Lo vamos a ver más adelante pero es importante recordarlo.

Propiedades de la intercorrelación de procesos ESA

Con $\tau = t_1 - t_2$

- *Cota superior*

$$|R_{XY}(t_1 - t_2)|^2 = |R_{XY}(t_1, t_2)|^2 \leq R_{XX}(t_1, t_1)R_{YY}(t_2, t_2) = R_X(0)R_Y(0)$$

  Se demuestra aplicando la desigualdad C-S-B. El 'parecido' entre los dos procesos es siempre menor que la media geométrica de sus valores cuadráticos medios. La igualdad ocurre cuando $Y(t) = \lambda X(t)$ con $\lambda \in \mathbb{C}$.

- *Simetría*

$$R_{XY}(\tau) = \mathrm{E}\{X(t_1)Y(t_2)^*\} = R_{YX}(-\tau)^*$$

- *Una cota superior más débil* Aprovechando que la media geométrica nunca supera la media aritmética,

$$|R_{XY}(\tau)| = |R_{XY}(t_1, t_2)| \leq \frac{R_{XX}(t_1, t_1) + R_{YY}(t_2, t_2)}{2} = \frac{R_X(0) + R_Y(0)}{2}$$

Procesos Gaussianos

Definición: Un proceso $X(t, \zeta)$ se dice Gaussiano, si cualesquiera k variables aleatorias $X(t_i, \xi)$ con $t_i \in \mathcal{I},\ i = 1, \ldots, k$ son *conjuntamente* Gaussianas $\forall k \in \mathbb{N}$.

Definición alternativa: Un proceso $X(t, \zeta)$ se dice Gaussiano, si cualquier combinación lineal de sus muestras tiene distribución Gaussiana (o normal).

De manera similar para un proceso VID $X[n, \zeta]$

Distribución de primer orden del proceso Gaussiano

Corresponde a tomar una VA del proceso, en el instante $t \in \mathcal{I}$ ($\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$) si el proceso es VIC o $n \in \mathcal{I}$ ($\mathcal{I} \subseteq \mathbb{Z}$) si es VID

La función de densidad de probabilidad resulta:

$$f_X(x; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X(t)} \exp\left(-\frac{(x - \mu_X(t))^2}{2\sigma_X(t)^2}\right)$$

Repaso distribución Gaussiana conjunta

Recordemos la distribución de dos VA X e Y conjuntamente Gaussianas (o normales):

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y(1-\rho^2)^{1/2}} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}+\frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}-\frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right)\right)}$$

donde,

- μ_x y μ_y son las medias de las VA X e Y,
- σ_x y σ_y sus desviaciones estándar
- ρ es el coeficiente de correlación entre ellas:

$$\rho = \frac{\mathrm{E}\left\{(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\right\}}{\sigma_x\sigma_y}$$

Distribución conjunta para 2 instantes

Si $X_1 = X(t_1,\xi)$ y $X_2 = X(t_2,\xi)$, La distribución conjunta del proceso para los instantes t_1 y t_2 resulta:

$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2;t_1,t_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho_{12}^2)^{1/2}} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2(1-\rho_{12}^2)}\left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-\frac{2\rho_{12}(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right)\right)}$$

donde,

- $\mu_1 = \mathrm{E}\left\{X(t_1)\right\}$ y $\mu_2 = \mathrm{E}\left\{X(t_2)\right\}$.
- $\sigma_1^2 = \mathrm{Var}\left\{X(t_1)\right\} = C_{xx}(t_1,t_1)$ y
  $\sigma_2^2 = \mathrm{Var}\left\{X(t_2)\right\} = C_{xx}(t_2,t_2)$.
- el coeficiente de correlación es:

$$\rho_{12} = \frac{\mathrm{E}\left\{(X(t_1)-\mu_1)(X(t_2)-\mu_2)\right\}}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{C_{xx}(t_1,t_2)}{\sigma_1\sigma_2}.$$

Procesos conjuntamente Gaussianos

Definición: Dos procesos $X(t,\zeta)$ e $Y(t,\zeta)$ se dicen *conjuntamente Gaussianos*, si cualesquiera k variables aleatorias $X(t_i,\xi)$ e $Y(t_j,\xi)$ con $t_i, t_j \in \mathcal{I},\ i = 1,\ldots,k_x\ j = 1,\ldots,k_y$ son conjuntamente Gaussianas $\forall k_x, k_y, k \in \mathbb{N}$ tales que $k_x + k_y = k$.

De manera similar para procesos VID $X[n,\zeta],\ Y[l,\zeta]$.

Se puede extender esta idea para más procesos conjuntamente Gaussianos.

Propiedades de los procesos Gaussianos

Notar: La distribución conjunta, aún para cualquier número de VA k, queda totalmente determinada sólo con momentos de 1^{ero} y 2^{do} orden.

En consecuencia

1. Si un proceso Gaussiano es ESA, entonces es ESE.
2. Si en un proceso Gaussiano las VA distintas son no correlacionadas ($C_{xx}(t_1,t_2) = 0,\ \forall t_1 \neq t_2$), entonces también son independientes.
3. Si dos procesos conjuntamente Gaussianos son no correlacionados ($C_{xy}(t_1,t_2) = 0,\ \forall t_1 \neq t_2$), entonces también son independientes.
4. Cualquier combinación u operación lineal de uno o más procesos Gaussianos da como resultado un proceso Gaussiano.

La propiedad *2)* se ve fácilmente. No demostraremos *3) ni 4)*

Ergodicidad - Motivación 1

Motivación: Ud. observa una **única** realización del proceso $X(t,\zeta)$ y quiere conocer $\mu_X(t) = \mathrm{E}\{X(t)\}$ sin conocer la distribución del proceso. Es decir, quiere **determinar experimentalmente** (estimar) $\mathrm{E}\{X(t)\}$.

Probablemente intente argumentar que la idea intuitiva de emplear el *promedio temporal*

$$\langle X \rangle_T(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} X(\lambda,\zeta)\,d\lambda = \bar{X}_T(t,\zeta)$$

podría funcionar.

Pero note que $\langle X \rangle_T(t)$:

- es una función del largo de registro T y del instante de medición t.
- y también es una función de la realización ζ. Otra realización mostraría en general un valor distinto.

es que $\langle X \rangle_T(t)$ es un nuevo proceso estocástico $\bar{X}_T(t,\zeta)$.

Ergodicidad - Motivación 2

Observe que hacer $T \to \infty$, hace a t “irrelevante” pero aún cuando los límites puedan existir, no soluciona las cosas.

$$\langle X \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} X(\lambda,\zeta)\,d\lambda = \bar{X}(\zeta)$$

en el mejor de los casos, deja una VA!

Definición (informal): Un proceso ESA $X(t,\zeta)$ se llama ergódico en media cuando el *promedio temporal* coincide con la *media estadística*.

La **ergodicidad en media** requeriría que la variable aleatoria $\langle X \rangle = \bar{X}(\zeta)$ iguale a la función del tiempo $\mathrm{E}\{X(t,\zeta)\} = \mu_X(t)$.

Y aún dentro de la hipotética clase de procesos donde para $T \to \infty$ $\langle X \rangle_T(t) = C$ constante (no una VA), nada garantiza que $C = \mu_X$.

Ergodicidad 2

De manera similar, uno podría estar interesado en “medir” experimentalmente la correlación con la función de correlación determinística $r_{xx}(t+\tau, t)$ de la única realización que vemos.

Definición (informal): Un proceso ESA $X(t, \zeta)$ se llama ergódico en correlación cuando el *promedio temporal de* $r_{xx}(t+\tau, t)$ coincide con la *correlación estadística* $R_X(\tau)$.

Ergodicidad - condiciones 1

En un proceso ergódico los promedios temporales son iguales a las medias estadísticas del mismo orden

Notar:

- Un proceso con media estadística $\mathrm{E}\{X(t)\} = \mu_x(t)$, no tiene ninguna posibilidad (salvo quizás cuando $\mu_x(t) = \textit{constante}$) de poder igualar al promedio temporal, sea éste una VA o un número. Por eso se pide al menos que $X(t)$ sea ESA.
- **Condición (suficiente y necesaria)** para **asegurar** que un proceso ESA es ergódico en media (teorema de Slutsky y variantes):

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T C_{xx}(\tau)\, d\tau = 0$$

- Observación: difícil de comprobar si antes no conocemos $C_{xx}(\tau)$!.

Ergodicidad - condiciones 2

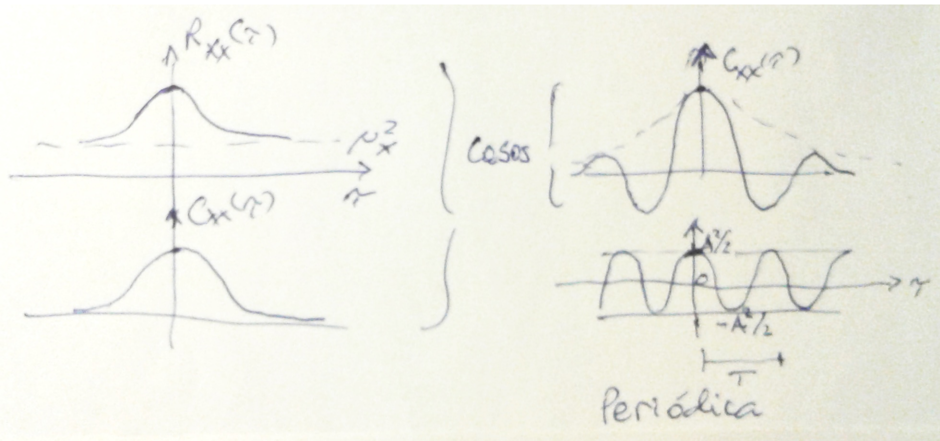
- Una condición **suficiente** fácilmente argumentable sin necesidad de conocer *completamente* $C_{xx}(\tau)$ es

$$\lim_{\tau\to\infty} C_{xx}(\tau) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\tau\to\infty} R_{xx}(\tau) = \mu_x^2$$

  Mostrar gráficamente

- La condición es también necesaria cuando sabemos que existe $\lim_{\tau\to\infty} C_{xx}(\tau)$. O sea, si $X(t)$ es ergódico en media, y sabemos que existe $\lim_{\tau\to\infty} C_{xx}(\tau)$; éste debe ser 0.
- La posibilidad para que un PAESA no sea ergódico en media es que no exista $\lim_{\tau\to\infty} C_{xx}(\tau)$ (o que si existe ese límite, sea $\neq 0$)

Discusión



Ejemplo: **proceso no-ergódico** $X(t) = A$, $\forall t$. Con A una VA con $\mathrm{E}\{A\} = \mu_A \neq 0$ y $\mathrm{Var}\{A\} = \sigma_A^2$.

$$\mathrm{E}\{X(t)\} = \mu_A \qquad R_{xx}(t_1, t_2) = \mathrm{E}\{A^2\} = \mu_A^2 + \sigma_A^2$$

No cumple Slutsky.
Cualquier realización tiene un valor constante a y $\langle a\rangle = a \neq \mu_A$ en general.

Próxima Clase

- Sistemas