FACULTAD DE INGENIERÍA

SEÑALES Y SISTEMAS
Clase 9

Carlos Muravchik

06 de Abril de 2020

Habíamos visto:

1. Correlación.
2. Estacionareidad: ESE, ESA. Ejemplos ESA.
3. Funciones de correlación de PAESA: propiedades.
4. Procesos gaussianos. Distrib conjunta.
5. Brevísima introducción a Ergodicidad.

Y se vienen:

- Repaso Procesos Gaussianos
- Repaso Ergodicidad.
- Sistemas. Generalidades.
  - Memoria.
  - Invariancia en el tiempo y al desplazamiento.
  - Linealidad.
  - Causalidad.
  - Estabilidad.
- Sistemas Lineales. Generalidades.

Procesos Gaussianos - complemento opcional

Definición: Un proceso $X(t, \zeta)$ se dice Gaussiano, si cualesquiera k variables aleatorias $X(t_i)$ con $t_i \in \mathcal{I},\ i = 1, \ldots, k$ son *conjuntamente* Gaussianas $\forall k \in \mathbb{N}$.

La densidad conjunta para K VA del proceso, agrupadas en el vector $\mathbf{X}(\boldsymbol{t}) = [X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_K)]^T$ en instantes del vector $\boldsymbol{t} = [t_1, t_2, \ldots, t_K]$

$$f_X(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\mathbf{C}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_x)\mathbf{C}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_x)^{*T}}$$

donde $\boldsymbol{\mu}_X = \mathrm{E}\{\mathbf{X}\}$ vector de $K \times 1$
$\mathbf{C} = \mathrm{E}\{(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_X)(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_X)^{*T}\}$ la matriz de covarianzas de $K \times K$; con $\mathbf{C}_{ij} = C_{xx}[t_i, t_j]$ y
$|\mathbf{C}|$ denota el determinante de $\mathbf{C}$.

Verifique que $K = 1$ y $K = 2$ son los casos que ya conoce.

Ergodicidad 1

Motivación: Se observa una **única** realización del proceso ESA $X(t, \zeta)$ y se quiere **determinar experimentalmente** (estimar) $\mu_x = \mathrm{E}\{X(t)\}$ sin conocer la distribución del proceso.

Se intenta emplear *promedios temporales*

$$\langle X \rangle_N[t] = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=t-N}^{t+N} X[n] = \bar{X}_N[t]$$

Definición informal: Un proceso ESA $X[t, \zeta]$ se llama ergódico en media cuando el *promedio temporal* $\langle X \rangle_N[t]$ tiende a la *media estadística* $\mathrm{E}\{X[t]\} = \mu_X$, a medida que N crece.

Teorema de Slutsky (ergodicidad en media)

Condición suficiente y necesaria: $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T C_{xx}(\tau)\, d\tau = 0$
Condición suficiente: $\lim\limits_{\tau\to\infty} C_{xx}(\tau) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{\tau\to\infty} R_{xx}(\tau) = |\mu_x|^2$

Ergodicidad 2

En un proceso ergódico los promedios temporales son iguales a las medias estadísticas del mismo orden

Definición informal: Un proceso ESA $X[t,\zeta]$ se llama ergódico en correlación cuando el *promedio temporal* $\langle X\rangle_N[t]$ tiende a la *correlación estadística* $\mathrm{E}\left\{X[t+m]X[t]^*\right\}$, para N creciente.

$$\lim_{N\to\infty}\langle X[n+m]X[n]\rangle_N[t] = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=t-N}^{t+N} X[n+m]X[n]^* =$$
$$= \mathrm{E}\left\{X[t+m]X[t]^*\right\} = R_{XX}[m]$$

Aplique ergodicidad en media al “nuevo” proceso
$Y_m[t] = X[n+m]X[n]^*$.

Teorema de Slutsky (ergodicidad en correlación)

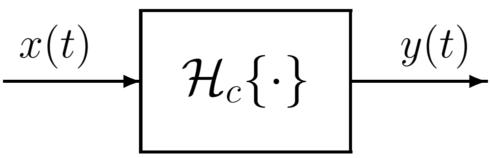
Condición suficiente y necesaria: $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T C_{Y_mY_m}(\tau)\,d\tau = 0$
Condición suficiente:
$\lim_{\tau\to\infty} C_{Y_mY_m}(\tau) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{\tau\to\infty} R_{Y_mY_m}(\tau) = |R_{XX}[m]|^2$

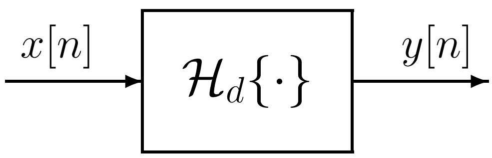
Generalidades

Definición: Es una colección de uno o más *objetos* cuyas magnitudes físicas representativas interactúan entre sí.

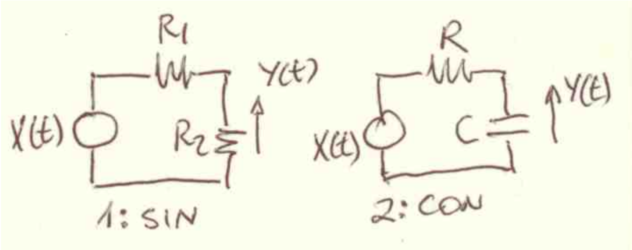
- ★ Evolución (temporal) de las magnitudes físicas $\to$ señales.
- ★ Un estímulo admisible al sistema es la señal de entrada $\in \mathcal{C}_e$.
- ★ La respuesta del sistema al estímulo es la señal de salida $\in \mathcal{C}_s$.
- ★ La acción del sistema se describe por un **operador** $\mathcal{H}$ (toma una señal de entrada y la convierte en otra señal, de salida):

$$\mathcal{H}:\mathcal{C}_e\to\mathcal{C}_s \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} y(t) = \mathcal{H}\{x(\cdot)\}(t) & \text{VIC} \\ y[n] = \mathcal{H}\{x[\cdot])\}[n] & \text{VID}\end{cases}$$





Sin y con memoria



Sistema sin memoria: la salida en cada instante depende de la entrada en ese mismo instante

Sistema con memoria: la salida en cada instante depende de la entrada en ese mismo instante y de las entradas *anteriores*

Ejemplo 1: $y(t) = \frac{R_2 x(t)}{R_1 + R_2} \Rightarrow$ sin memoria

Ejemplo 2: $y(t) = v_C(0) e^{-t/RC} + \frac{1}{RC} \int_0^t e^{-(t-\sigma)/RC} x(\sigma)\, d\sigma \Rightarrow$ con memoria

Ejemplo 3: Amplificador logarítmico (usado en radar)
$y(t) = K \log x(t) + C \Rightarrow$ sin memoria

Número de entradas y salidas

La relación entrada (única) a salida (única) o E/S es:

$$\begin{cases} y(t) = \mathcal{H}\{x(\cdot)\}(t) & \text{VIC} \\ y[n] = \mathcal{H}\{x[\cdot])\}[n] & \text{VID} \end{cases}$$

y es un sistema SISO (por sus siglas en inglés).
Hay sistemas MIMO (por sus siglas en inglés) con *múltiples entradas* y *múltiples salidas*.

Ejemplo MIMO 1 Ducha: *1)* temperatura y *2)* caudal del agua entrando al calefón, *3)* caudal de gas e interesa la *4)* temperatura del agua en la flor de la ducha (3 señales de entrada y 1 de salida).

Ejemplo MIMO 2 Celular 5G: Una estación base con varias antenas se comunica con un celular que tiene un arreglito de 2 antenas. Este “canal de comunicaciones” se puede describir como MIMO.
También Wi-Fi, WiMax, LTE, UWB.

Lineales, no lineales

Se tratan de distinta manera según los sistemas sean *lineales* (SL) o *no lineales* (SNL).

Condiciones para **linealidad**:

1. Homogeneidad: Si $x_1(t) = cx(t)$ $c \in \mathbb{R}$ e $y_1(t) = \mathcal{H}\{x_1(\cdot)\}(t)$; entonces $y_1(t) = \mathcal{H}\{cx(\cdot)\}(t) = c\mathcal{H}\{x(\cdot)\}(t) = cy(t)$.
2. Aditividad: Para cualesquiera señales de entrada admisibles $x_1(t)$ y $x_2(t)$, las salidas respectivas son $y_1(t)$ e $y_2(t)$. Luego si $y(t) = \mathcal{H}\{x_1(\cdot) + x_2(\cdot)\}(t)$ es la salida a la entrada $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$; resulta $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$.

$\mathcal{H}$ es lineal sii $\mathcal{H}$ es homogéneo **y** aditivo.

Si un sistema no es lineal, entonces es no-lineal.

Ejemplos lineales, no lineales

Ejemplo 1: $y(t) = x^2(t)$ es no lineal.

Ejemplo 2: Un circuito con R, L, C ideales, constantes, *con condiciones iniciales nulas* y que no tengan valores que dependan de la corriente o tensión aplicadas es lineal.

Ejemplo 3: Una L con núcleo de hierro es casi seguro no-lineal (aunque para pequeñas amplitudes pueda considerarse lineal).

Invariancia en el tiempo

Sistema con VIC. Idea:

1. Se aplica $x_1(t)$ en $t = 0$ y se obtiene $y_1(t) = \mathcal{H}\{x_1(\cdot)\}(t)$.
2. Si se aplica la misma señal en el instante t_0, se aplica una $x_2(t) = x_1(t - t_0)$. La salida es $y_2(t) = \mathcal{H}\{x_2(\cdot)\}(t)$.
3. El sistema es invariante en el tiempo si se cumple que $y_2(t) = y_1(t - t_0)$.
4. Interpretación 1: la respuesta que da el sistema a una entrada es la misma, pero desplazada acordemente, no importa en qué instante se la aplica.
5. Interpretación 2: El sistema responde siempre de la 'misma forma', salvo desplazamiento temporal, no importa cuándo se aplique la misma señal de entrada.
6. Un sistema lineal, que es invariante en el tiempo, se denota abreviadamente SLIT.

Ejemplo no SLIT: divisor resistivo con termistor; si cambia la temperatura a medida que transcurre el tiempo, cambia la ganancia del sistema.

Invariancia al desplazamiento

Sistema con VID.

1. Se aplica $x_1[n]$ y se obtiene $y_1[n] = \mathcal{H}\{x_1(\cdot)\}[n]$.
2. Si se aplica la misma señal desplazada en n_0, se aplica una $x_2[n] = x_1[n - n_0]$. La salida de denomina $y_2[n] = \mathcal{H}\{x_2(\cdot)\}[n]$.
3. El sistema es invariante al desplazamiento si se cumple que $y_2[n] = y_1[n - n_0]$.
4. Interpretación 1: la respuesta que da el sistema a una entrada es la misma, pero desplazada acordemente, no importa en qué momento se la aplica.
5. Interpretación 2: El sistema responde siempre de la 'misma forma', salvo desplazamiento, no importa cuándo se aplique la misma señal de entrada.
6. Un sistema lineal discreto, que es invariante al desplazamiento, se denota abreviadamente SLID.

¡5 minutos de Intervalo!

Sistemas variantes

Si no son invariantes, son *variantes*: SVT y SVD.

- El operador de un SVT cambia según el instante en que se aplica la señal.
- Por ejemplo, se debe denotar $y[n] = \mathcal{H}_k\{x(\cdot)\}[n]$ indicando que se aplicó la secuencia $x[\cdot]$ en el instante k y se observa su respuesta $y[\cdot]$ en el instante n.

De manera similar para SLIT.

Ejemplo 1: Celular - enlaces ascendente (móvil a base) y descendente (base a móvil).

Ejemplo 2: Guiado - vehículo con masa variable por consumo de combustible (recordar $F = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$).

Causalidad

Intuición: dado un cambio a la entrada, la respuesta al mismo aparece en la salida de un sistema *causal* solamente después del cambio en la señal de entrada.

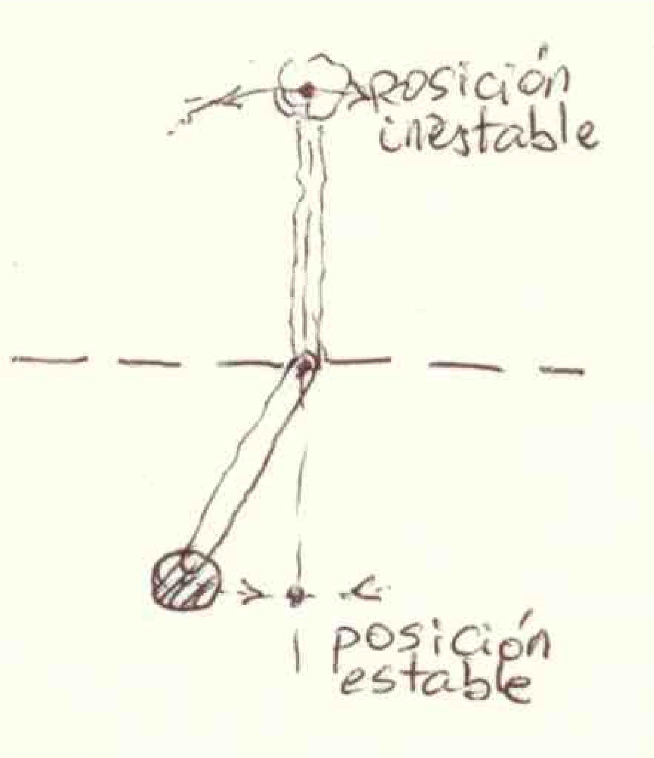
- Sistemas físicos: son causales.
- VIC o VID con señales de VI que no son tiempo $\Rightarrow$ sistemas *anticipativos* o *no-anticipativos*.
- En la computadora es fácil tener sistemas anticipativos. Por ejemplo:

$$y[n] = x[n-1] + x[n] + x[n+1]$$

  o en imágenes.

Estabilidad 1

Intuición: Un sistema es estable si para una perturbación de entrada de pequeña amplitud, no se aparta demasiado del punto donde estaba y/o retorna a él, más o menos lentamente.



Estabilidad 2

- Hay varios tipos de estabilidad (se verá más en Control, Control moderno) asintótica, exponencial, uniforme, etc.
- Usaremos una forma simple: estabilidad en sentido entrada-acotada/salida-acotada, denotada EA/SA.
- Estabilidad EA/SA – intuición: para cualquier entrada acotada la salida también resulta acotada.
- Entrada acotada: significa que existe $0 < K_e < \infty$ tal que $|x[n]| < K_e, \forall n \in \mathbb{Z}$.
- $x[n] = e^n$ no es acotada; $x[n] = \cos(2\pi f_0 n + \phi)$ es acotada pues cualquier $K_e \geq 1$ es una cota.
- Estabilidad EA/SA: Un sistema es estable EA/SA si aplicar cualquier entrada acotada causa que exista un $0 < K_s < \infty$ tal que $|y[n]| < K_s, \forall n \in \mathbb{Z}$; o sea, que la salida sea acotada.
- Igualmente para sistemas continuos.

Estabilidad – ejemplos

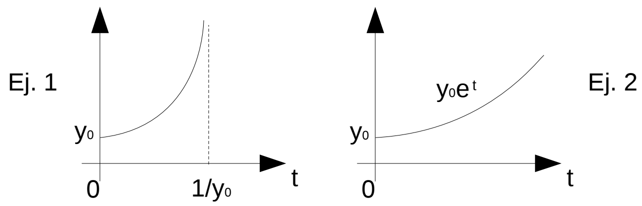
Ejemplo 1: $\dot{y}(t) = y^2(t) + x(t)$, con condición inicial $y(0) = y_0 > 0$ y entrada nula $x(t) = 0$

$$\frac{\dot{y}}{y^2} = 1 \Rightarrow \int_{y_0}^{y(t)} \frac{dy}{y^2} = \int_0^t d\tau \Rightarrow -\frac{1}{y}\Big]_{y_0}^{y(t)} = t$$

Luego $t = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y(t)}$ y finalmente $y(t) = \frac{y_0}{1-y_0 t}$ que vale para $0 \leq t < 1/y_0$ y **explota** para $t \to 1/y_0$. ¿Y si $y_0 < 0$?

Ejemplo 2: $\dot{y}(t) - ay(t) = x(t)$ con condición inicial $y(0) = y_0$, $a > 0$ y entrada nula $x(t) = 0$.

$$\frac{\dot{y}}{y} = a \Rightarrow \log\frac{y(t)}{y_0} = at \Rightarrow y(t) = y_0 e^{at}$$



Estabilidad – ejemplo discreto

Ejemplo 3: $y[n]$: balance de una cuenta bancaria; α: tasa diaria de interés; $x[n]$: depósitos diarios.
Entonces

$$y[n+1] = (1+\alpha)y[n] + x[n]$$

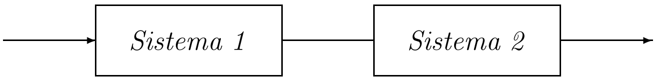
Si comienzo el día cero con $y[0] = y_0$ y nunca deposito nada,

$$y[1] = (1+\alpha)y_0 + 0$$
$$y[2] = (1+\alpha)y[1] = (1+\alpha)^2 y_0$$
$$y[n] = (1+\alpha)^n y_0$$

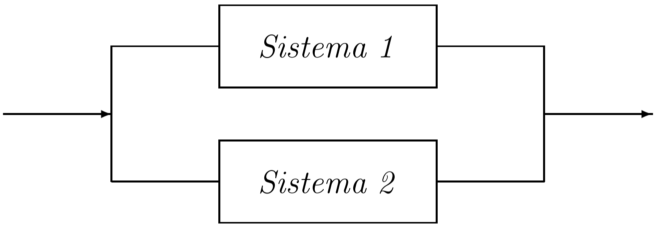
... como α es positivo, seré rico si vivo lo suficiente!

Combinación de sistemas en general

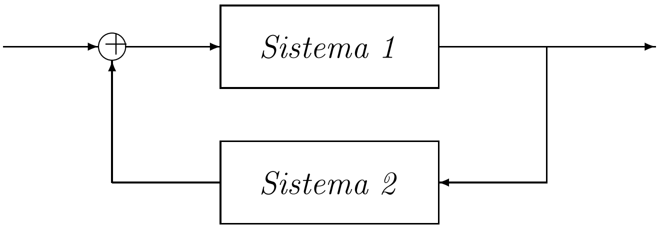
- Serie o cascada



- Paralelo



- Realimentación



Sistemas Lineales

Recordamos al operador que representa a un sistema:

$$\begin{cases} y(t) = \mathcal{H}\{x(\cdot)\}(t) & \text{VIC} \\ y[n] = \mathcal{H}\{x[\cdot])\}[n] & \text{VID} \end{cases}$$

Sistema Lineal: es

- homogéneo y
- aditivo.

O de manera equivalente, satisface el

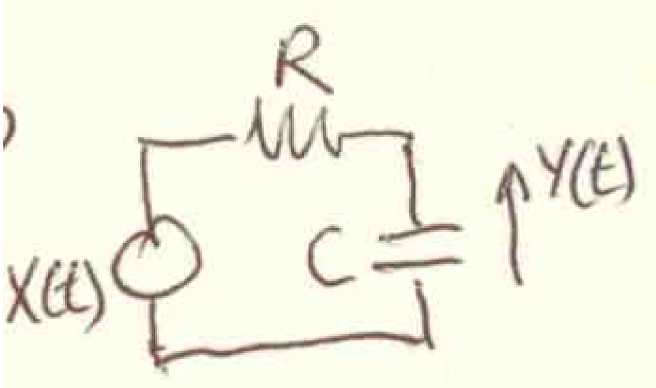
Principio de Superposición: para 2 constantes cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ y dos entradas arbitrarias $x_1(t), x_2(t) \in \mathcal{C}_e$, se forma $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$. Sean $y_1(t) = \mathcal{H}\{x_1(\cdot)\}(t)$ e $y_2(t) = \mathcal{H}\{x_2(\cdot)\}(t)$, entonces $\mathcal{H}$ satisface el principio de superposición si cumple

$$y(t) = \mathcal{H}\{x(\cdot)\}(t) = ay_1(t) + by_2(t)$$

- Similar para sistemas discretos.

Incrementalmente lineales

Recordar el Ejemplo 2 de Sistemas con Memoria.



$$y(t) = v_C(0)e^{-t/RC} + \frac{1}{RC}\int_0^t e^{-(t-\sigma)/RC}x(\sigma)\,d\sigma$$

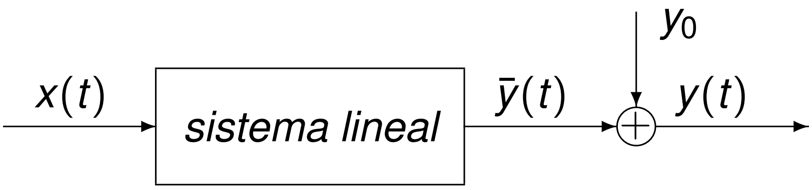
El sistema **no** es homogéneo **ni** aditivo; no es lineal!!

Incrementalmente lineales

¿A qué se debe? Al término con las condiciones iniciales. Eso motiva

Definición: sistemas en los que la diferencia de las salidas para cualesquiera dos funciones de entrada es una función lineal.

Forma general de sistemas incrementalmente lineales



Invarianca en el tiempo

Sistema VIC.

1. Se aplica $x_1(t)$ y se obtiene $y_1(t) = \mathcal{H}\{x_1(\cdot)\}(t)$
2. Si se aplica la misma señal en el instante t_0, se aplica una $x_2(t) = x_1(t - t_0)$. La salida es $y_2(t) = \mathcal{H}\{x_2(\cdot)\}(t)$.
3. El sistema es invariante en el tiempo si se cumple que $y_2(t) = y_1(t - t_0)$
4. Interpretación: la respuesta que da el sistema a una entrada es la misma, pero desplazada acordemente, no importa en qué instante se la aplica
5. Un sistema lineal, que es invariante en el tiempo, se denota abreviadamente SLIT

Invariancia al desplazamiento

Sistema VID.

1. Se aplica $x_1[n]$ y se obtiene $y_1[n] = \mathcal{H}\{x_1(\cdot)\}[n]$
2. Si se aplica la misma señal desplazada en n_0, se aplica una $x_2[n] = x_1[n - n_0]$. La salida de denomina $y_2[n] = \mathcal{H}\{x_2(\cdot)\}[n]$.
3. El sistema es invariante al desplazamiento si se cumple que $y_2[n] = y_1[n - n_0]$
4. Interpretación: la respuesta que da el sistema a una entrada es la misma, pero desplazada acordemente, no importa en qué momento se la aplica
5. Un sistema lineal discreto, que es invariante al desplazamiento, se denota abreviadamente SLID

Próxima Clase

- Sistemas Lineales.
- Convolución Discreta.
- Convolución para SLIT.