FACULTAD DE INGENIERÍA

SEÑALES Y SISTEMAS
Clase 11

Carlos H. Muravchik

16 de Abril de 2020

Habíamos visto:

- Sistemas Lineales.
- Convolución.
- Estabilidad.
- Representacion de SLIT y SLID:
  - Ecns. diferenciales,
  - Ecns. en diferencias
  - Ecns. de estado
  - Diagramas en bloques.

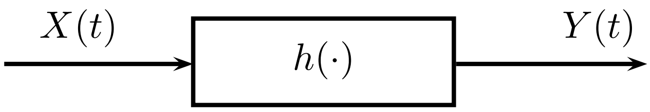
Y se vienen:

- **Sistemas lineales con entradas aleatorias.**

SL y entradas aleatorias

Clave: SL $\Leftrightarrow$ convolución
★ continuo o discreto
★ variante o invariante

Entra un proceso estocástico . . . ¿qué es la salida?



$$Y(t) = \{X * h\}(t)$$

$$\underbrace{Y(t,\zeta)}_{\text{proceso de salida}} = \int \underbrace{X(\tau,\zeta)}_{\text{proceso de entrada}} \bar{h}(t,\tau)\, d\tau$$

Nota: Cada realización del proceso de entrada da una realización del proceso de salida

Media estadística

$$Y(t,\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau,\zeta)\bar{h}(t,\tau)\, d\tau$$

Queremos calcular

$$\mathrm{E}\{Y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \beta \underbrace{f_Y(\beta;t)}_{\text{¿Cuál es? ¿dónde se consigue?}} d\beta = \mu_Y(t)$$

¿Y ahora? No hace falta $f_Y(\beta;t)$ si usamos *linealidad* de la $\mathrm{E}\{\cdot\}$

$$\underbrace{\mathrm{E}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} X(\tau,\zeta)\bar{h}(t,\tau)\, d\tau\right\}}_{\text{bajo ciertas hipótesis: } \mathrm{E}\int = \int \mathrm{E}} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}\{X(\tau)\}\, \bar{h}(t,\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mu_X(\tau)\bar{h}(t,\tau)\, d\tau = \mu_Y(t)$$

$$\boxed{\mathrm{E}\{Y(t)\} = \mu_Y(t) = \{\mu_X * \bar{h}\}(t)}$$

Media estadística – continuación

El mismo razonamiento vale para sistemas discretos

$$\boxed{\mathrm{E}\{Y[n]\} = \mu_Y[n] = \{\mu_X * \bar{h}\}[n]}$$

Media estadística – continuación

- SLID: $\mu_Y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]\mu_X[m]$
- SLID y entrada con media constante $\mu_X[n] = \mu_X$:

  $$\mu_Y[n] = \mu_X \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m] = \mu_X \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]}_{\text{sumabilidad de } h} = \mu_Y \text{ cte}$$
- si el SLID es estable EA/SA, h es sumable

- SLIT: $\mu_Y(t) = \int h(t-\tau)\mu_X(\tau)d\tau$
- SLIT y entrada con media constante $\mu_X(t) = \mu_X$:

  $$\mu_Y(t) = \mu_X \int h(t-\tau)d\tau = \mu_X \underbrace{\int h(\lambda)d\lambda}_{\text{integrabilidad de } h} = \mu_Y \text{ cte}$$
- si el SLIT es estable EA/SA, h es integrable

Media estadística – transitorio

- Los resultados anteriores presuponen aplicación de la entrada desde $t = -\infty$
- Pero si se aplica a un SLIT el proceso de entrada en $t = 0$ es como si $X(t) = 0, \forall t < 0$,

$$\mu_Y(t) = \int_0^{\infty} \mathrm{E}\left\{X(\tau)\right\} h(t-\tau)d\tau = \int_0^{\infty} \mu_X(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

y aún siendo $\mu_X(t) = \mu_X \; t \geq 0$,

$$\mu_Y(t) = \mu_X \int_0^{\infty} h(t-\tau)d\tau \neq \text{constante}$$

porque con el cambio de variables $\rho = t - \tau \; d\rho = -d\tau$

$$\mu_Y(t) = \mu_X \int_{-\infty}^{t} h(\rho)d\rho = \text{¡función de } t\text{!}$$

- Es el efecto de la respuesta "transitoria" del sistema
- Cuando se aplica X en $t = -\infty$, para cualquier t finito, el transitorio ya finalizó

Llegó!!! Intervalo: 5 minutos

Correlaciones

- Queremos calcular R_{XY}, R_{YX}, R_{YY} para SLIT y SLID.
- ¿Cómo podemos calcularlas sin recurrir explícitamente a las densidades conjuntas de los procesos de salida y de entrada?

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau)\bar{h}(t,\tau)\, d\tau$$

- Por ejemplo, para $R_{XY}(t_1, t_2)$

$$\mathrm{E}\left\{X(t_1)Y(t_2)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \alpha\beta \underbrace{f_{XY}(\alpha,\beta;t_1,t_2)}_{\text{¿Cuál es? ¿dónde se consigue?}} \; d\beta$$

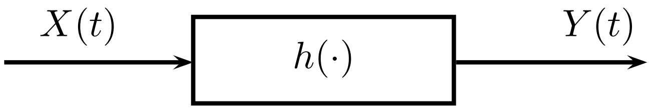
- ¿Qué podemos hacer? Nos haría falta $f_{XY}(\alpha, \beta; t_1, t_2)$
- Para SL se pueden escribir los momentos de orden 1 y 2 para el proceso de salida, en función de iguales momentos de la entrada. Ya vimos orden 1. Veremos orden 2.

Correlaciones

★ La entrada es aplicada en $-\infty$

Intercorrelaciones: entrada–salida

- Debido a la convolución, cada salida es una mezcla "pesada" de VA del proceso de entrada
- Entonces la salida "hereda" algún **parecido** con la entrada
- X e Y son procesos **dependientes**



$$Y(t) = \{X * h\}(t)$$
$$R_{XY}(t_1, t_2) = \mathrm{E}\{X(t_1)Y^*(t_2)\}$$

$$\begin{aligned}
R_{XY}(t_1, t_2) &= \mathrm{E}\left\{X(t_1)\int_{-\infty}^{\infty} X^*(\alpha)\bar{h}^*(t_2, \alpha)d\alpha\right\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}\{X(t_1)X^*(\alpha)\}\bar{h}^*(t_2, \alpha)d\alpha = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(t_1, \alpha)\bar{h}^*(t_2, \alpha)d\alpha
\end{aligned}$$

Intercorrelaciones – SLIT con entrada ESA

La expresión queda aquí; si no se introducen más hipótesis sobre procesos o sistemas.

- Si $X(t)$ es ESA $R_{XX}(t_1, \alpha) = R_X(t_1 - \alpha)$
- Si el sistema es SLIT $\bar{h}(t_2, \alpha) = h(t_2 - \alpha)$

$$\begin{aligned}
R_{XY}(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t_1 - \alpha)h^*(t_2 - \alpha)d\alpha = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t_1 - t_2 - \lambda)h^*(-\lambda)d\lambda = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(t_1 - t_2 - \lambda)\overset{\vee}{h}(\lambda)d\lambda
\end{aligned}$$

donde $\overset{\vee}{h}$ es h reflejada y conjugada; luego

$$\boxed{R_{XY}(t_1, t_2) = \{R_X * \overset{\vee}{h}\}(t_1 - t_2) = R_{XY}(t_1 - t_2)}$$

Intercorrelaciones

- De igual manera, $R_{YX}(t_1,t_2) = \mathrm{E}\,\{Y(t_1)X^*(t_2)\}$ es

$$R_{YX}(t_1,t_2) = \{R_X * h\}(t_1 - t_2) = R_{YX}(t_1 - t_2)$$

- SD variante, X no necesariamente ESA

$$R_{XY}[n_1,n_2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{XX}[n_1,k]\bar{h}^*[n_2,k]$$

- SLID y ESA, con $\overset{\vee}{h}[n] = h^*[-n]$,

$$R_{XY}[n_1,n_2] = \{R_X * \overset{\vee}{h}\}[n_1 - n_2] = R_{XY}[n_1 - n_2]$$
$$R_{YX}[n_1,n_2] = \{R_X * h\}[n_1 - n_2] = R_{YX}[n_1 - n_2]$$

Autocorrelación de la salida – Sistemas continuos

- En el caso general : sistema posiblemente variante en el tiempo, proceso de entrada con autocorrelación R_{XX}

$$R_{YY}(t_1,t_2) = \mathrm{E}\,\{Y(t_1)Y^*(t_2)\} =$$
$$= \mathrm{E}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \bar{h}(t_1,\alpha)X(\alpha)\,d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \bar{h}^*(t_2,\beta)X(\beta)^*\,d\beta\right\}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{h}(t_1,\alpha)\bar{h}^*(t_2,\beta)R_{XX}(\alpha,\beta)\,d\alpha d\beta$$

- Especializando para SLIT y con aplicación de la entrada ESA X en $t = -\infty$

$$R_{YY}(t_1,t_2) = \mathrm{E}\,\{Y(t_1)Y^*(t_2)\} = \{h * \overset{\vee}{h} * R_X\}(t_1 - t_2)$$
$$= R_Y(t_1 - t_2)$$

- Sólo en este caso la salida es ESA: con SLIT y entrada ESA aplicada en $t = -\infty$.
- Vea cómo se modifica si $X(t)$ está aplicada desde $t = 0$.

Autocorrelación de la salida – Sistemas discretos

- En el caso general

$$R_{YY}[n_1, n_2] = \mathrm{E}\{Y[n_1]Y^*[n_2]\} =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{h}[n_1, m]\bar{h}^*[n_2, k]R_{XX}[m, k]$$

- Especializando para SLID y X ESA,

$$R_{YY}[n_1, n_2] = \mathrm{E}\{Y[n_1]Y^*[n_2]\} = \{h * \overset{\vee}{h} * R_X\}[n_1 - n_2]$$
$$= R_Y[n_1 - n_2]$$

- recordar la hipótesis de aplicación de la entrada en $n = -\infty$
- Sólo en este caso la salida es ESA: con SLID y entrada ESA aplicada en $n = -\infty$.

Valor cuadrático medio

- Las autocovarianzas se obtienen fácilmente $C_{YY}(t_1, t_2) = R_{YY}(t_1, t_2) - \mu_Y(t_1)\mu_Y^*(t_2)$ o $C_{YY}[n_1, n_2] = R_{YY}[n_1, n_2] - \mu_Y[n_1]\mu_Y^*[n_2]$
- El valor cuadrático medio de la salida se obtiene cuando $t_1 = t_2$, entonces

$$\mathrm{E}\{|Y(t)|^2\} = R_{YY}(t, t) = \sigma_Y^2(t) + |\mu_Y|^2(t)$$

- y cuando se aplica la entrada en $t = -\infty$, el sistema es SLIT y el proceso de entrada ESA

$$\mathrm{E}\{|Y(t)|^2\} = R_Y(0) \text{ y } \mathrm{Var}\{Y(t)\} = C_Y(0) = R_Y(0) - |\mu_Y|^2$$

- Similar para el caso discreto

Proceso iid real como entrada

- Sea $X[n]$ iid con $\mu_X[n] = 0$ y $R_X[m] = \sigma_X^2 \delta[m]$
- Las correlaciones se especializan de manera interesante
- Para un SLID, la intercorrelación $R_{YX}[n_1, n_2]$, con $n_1 = n + m$ y $n_2 = n$

$$R_{YX}[n_1 - n_2] = \{h * R_X\}[m] = \sigma_X^2 h[m]$$

- Se podría observar la respuesta impulsional excitando al sistema con una secuencia iid y estimando la función de intercorrelación R_{YX} para los distintos retardos m

Ruido blanco de entrada

Ruido Blanco: $R_X(\tau) = N_0 \delta(\tau)$.

- Media nula.
- No importa cuan cerca están, todas sus variables están no correlacionadas.
- Potencia: infinita (garantía de que físicamente no existe!)

Como entrada en un SLIT:

- Similar al caso de secuencia iid; pero ahora con SL de tiempo continuo
- Con $t_1 = t_2 + \tau$ ó $\tau = t_1 - t_2$

$$R_{YX}(\tau) = \{h * R_X\}(\tau) = N_0 h(\tau)$$

y similarmente con las otras correlaciones.

Ejemplo - continúa

Autocorrelación de la salida:

$$\mathrm{E}\{Y[n]Y[n-k]\} = \mathrm{E}\,\{(b_0X[n] + b_1X[n-1]) \\ (b_0X[n-k] + b_1X[n-k-1])\}$$

$$R_{YY}[k] = b_0^2R_X[k] + b_1^2R_X[k] + b_0b_1R_X[k+1] + b_1b_0R_X[k-1] = \\ = \sigma^2\left((b_0^2+b_1^2)\delta[k] + b_0b_1(\delta[k-1]+\delta[k+1])\right)$$

Dibujo: ver

Ejemplo

Considere el SLID (RIF)

$$Y[n] = b_0X[n] + b_1X[n-1]$$

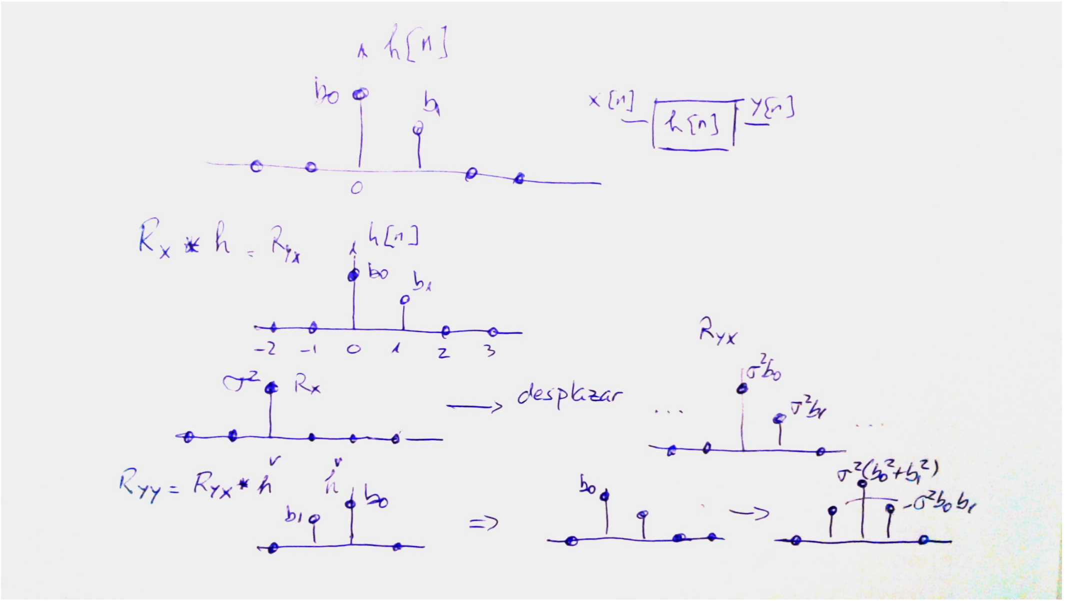
con entrada $X[n]$ una secuencia iid con $R_X[k] = \sigma^2\delta[k]$.

Intercorrelación entrada-salida: Queremos calcular $R_{YX}[k] = \mathrm{E}\{Y[n]X[n-k]\}$

$$\mathrm{E}\{Y[n]X[n-k]\} = b_0\mathrm{E}\{X[n]X[n-k]\} + b_1\mathrm{E}\{X[n-1]X[n-k]\} \\ R_{YX}[k] = b_0R_X[k] + b_1R_X[k-1] = \\ = \sigma^2(b_0\delta[k] + b_1\delta[k-1])$$

Dibujo: ver que coincide con $h[n]$
Comparar con $\{R_x * h\}$:
Autocorrelación de la salida: ¿?

Ejemplo - continúa



Ejemplo - continúa

Autocorrelación de la salida:

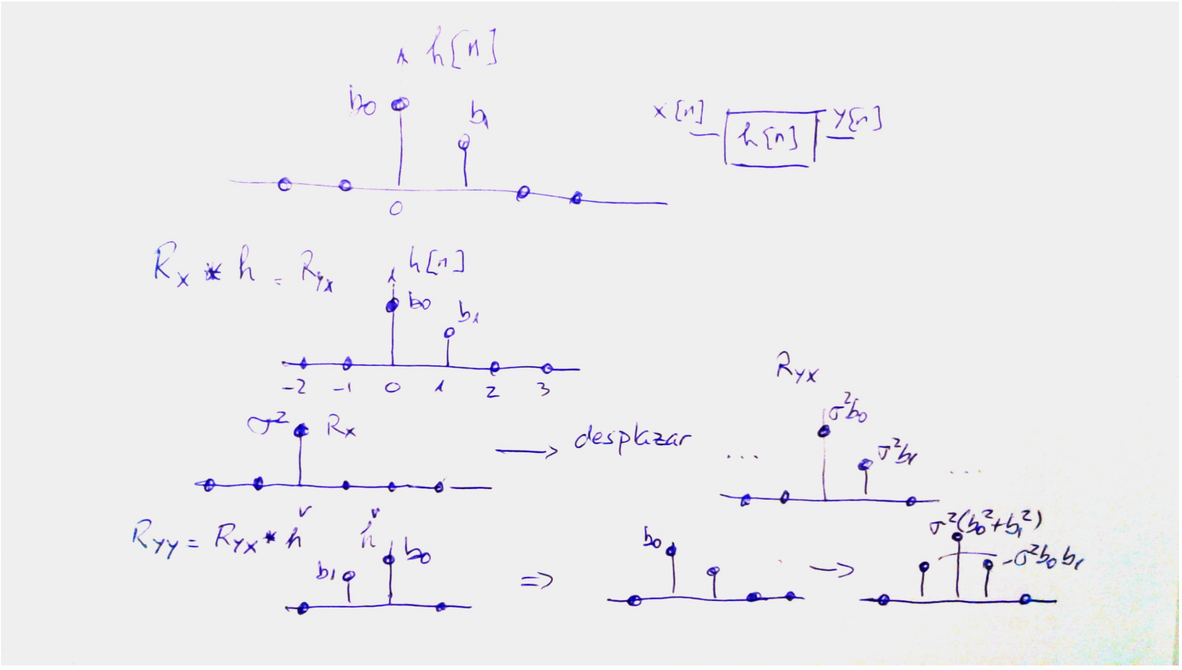
$$\mathrm{E}\{Y[n]Y[n-k]\} = \mathrm{E}\ \{(b_0X[n] + b_1X[n-1])\\ (b_0X[n-k] + b_1X[n-k-1])\}$$

$$R_{YY}[k] = b_0^2R_X[k] + b_1^2R_X[k] + b_0b_1R_X[k+1] + b_1b_0R_X[k-1] =\\ = \sigma^2\left((b_0^2+b_1^2)\delta[k] + b_0b_1(\delta[k-1]+\delta[k+1])\right)$$

Dibujo: ver

Comparar con $\{R_x * h * \check{h}\}$:

Ejemplo - continúa



Otro Ejemplo - continúa

Considere el SLID (RII), $|a| < 1$

$$Y[n] = b_0 X[n] + aY[n-1]$$

con entrada $X[n]$ una secuencia iid con $R_X[k] = \sigma^2 \delta[k]$.

Intercorrelación entrada-salida: Queremos calcular $R_{YX}[k] = \mathrm{E}\{Y[n]X[n-k]\}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\{Y[n]X[n-k]\} &= b\mathrm{E}\{X[n]X[n-k]\} + a\mathrm{E}\{Y[n-1]X[n-k]\} \\
R_{YX}[k] &= bR_X[k] + aR_{YX}[k-1] = \sigma^2(b\delta[k] + aR_{YX}[k-1]) \\
&= \sigma^2(b\delta[k] + a(b\delta[k-1] + aR_{YX}[k-2])) = \ldots = \\
&= b\sigma^2 \sum_{m=0}^{k} a^m \delta[k-m]
\end{aligned}$$

Dibujo: ver que coincide con $\sigma^2 h[k]$. Comparar con $\{R_x * h\}$:
Autocorrelación de la salida: ¿?

Próximas Clases

- Transformada de Fourier. Introducción y Propiedades.
- TF de funciones generalizadas, simetrías: par-impar, real-imaginaria, funciones hermíticas, dualidad, algunos pares transformados (cajón, exponencial, signo-escalón, delta-constante, pulso gaussiano), linealidad, translación, similaridad.
- Translación y similaridad. Más pares: seno, coseno, peine.
- Derivación. Convolución. Area bajo la señal y bajo la convolución. Integración.
- Correlación determinística: Propiedades auto e inter. Energía. Interpretación como densidad de energía.