FACULTAD DE INGENIERÍA

SEÑALES Y SISTEMAS
Clase 12

Carlos H. Muravchik

21 de Abril de 2020

Habíamos visto:

- SLIT/SLID con entradas aleatorias

Y se vienen:

- Sistemas lineales con entradas aleatorias: final
- Análisis frecuencial: parte 1

Otro Ejemplo - revisión/corrección

Considere el SLID (RII), $|a| < 1$ (con $X[n]$ aplicada desde $n = -\infty$)

$$Y[n] = b_0 X[n] + aY[n-1]$$

con entrada $X[n]$ una secuencia iid con $R_X[k] = \sigma^2 \delta[k]$.

Intercorrelación entrada-salida: Queremos calcular
$R_{YX}[k] = \mathrm{E}\{Y[n]X[n-k]\}$

$$\mathrm{E}\{Y[n]X[n-k]\} = b\mathrm{E}\{X[n]X[n-k]\} + a\mathrm{E}\{Y[n-1]X[n-k]\}$$

$$\begin{aligned} R_{YX}[k] &= bR_X[k] + aR_{YX}[k-1] = \sigma^2(b\delta[k]) + aR_{YX}[k-1] \\ &= \sigma^2(b\delta[k] + ab\delta[k-1]) + aR_{YX}[k-2] = \ldots = \\ &= b\sigma^2 \sum_{m=0}^{\infty} a^m \delta[k-m] \end{aligned}$$

Dibujo: ver que coincide con $\sigma^2 h[k]$.
Comparar con $\{R_x * h\}$:
Autocorrelación de la salida: ¿?
Si $X[n]$ se aplica en $n = 0$: es como si $X[n] = 0$, $n < 0$ y condiciones iniciales nulas $Y[-1] = 0$, resulta $R_{YX}[k] = b\sigma^2 \sum_{m=0}^{k} a^m \delta[k-m]$

Análisis frecuencial

Motivación

- Aprovecha intuición sobre funciones periódicas
- Convierte convolución en multiplicación punto a punto
- Describe cómo se reparte la energía de una señal
- Relación (casi) biunívoca entre 2 dominios ("puntos de vista")
- "Diagonaliza" el operador convolución (postgrado). Para SyS: en SLIT, entra un coseno y sale un coseno de la misma frecuencia.

"One can FT anything-often meaningfully"

"It is important to understand what you CAN DO before you learn to measure how WELL you seem to have DONE it"

. John Tukey

Fourier (21/03/1768 - 16/05/1839)

Dibujo de la Biblioteca Municipal de Grénoble

Transformada de Fourier

Definición:

Transformada de Fourier directa (o integral de Fourier o ecuación de análisis):

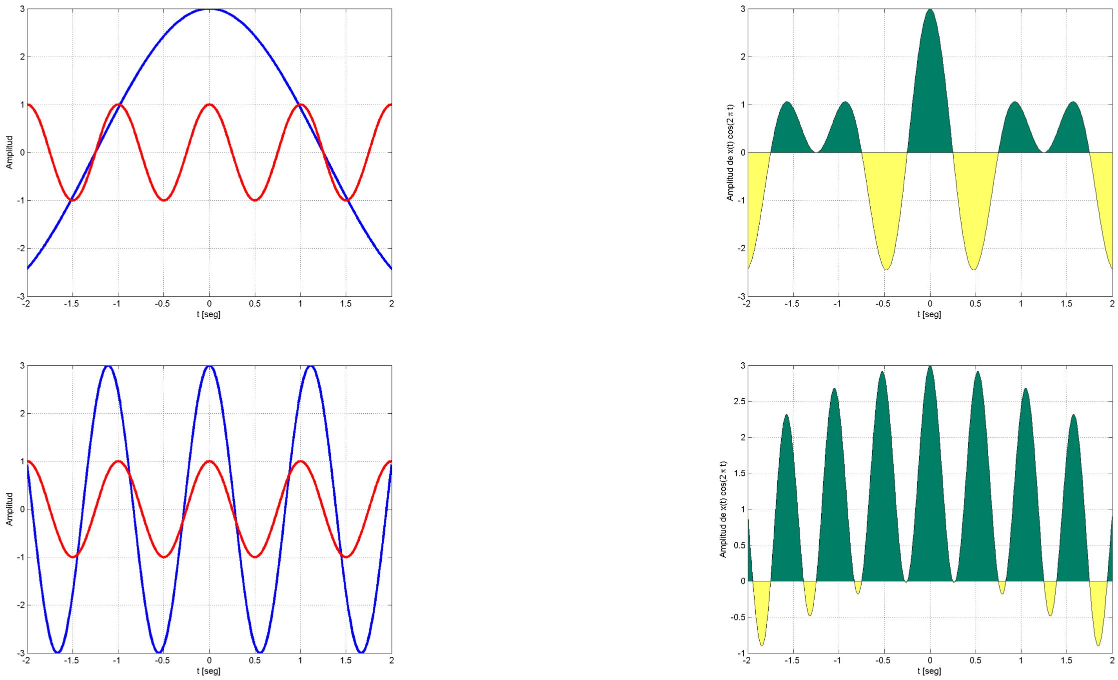
$$\boxed{X(f) = \mathcal{F}\{x(\cdot)\}(f) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt}$$

Transformada de Fourier inversa (o ecuación de síntesis):

$$\boxed{x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\cdot)\}(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df}$$

Transformada de Fourier

Interpretación:
Medida de parecido con exponenciales complejas de frecuencia fija:



Transformada de Fourier - Existencia

Condiciones de Dirichlet:
Si queremos que:

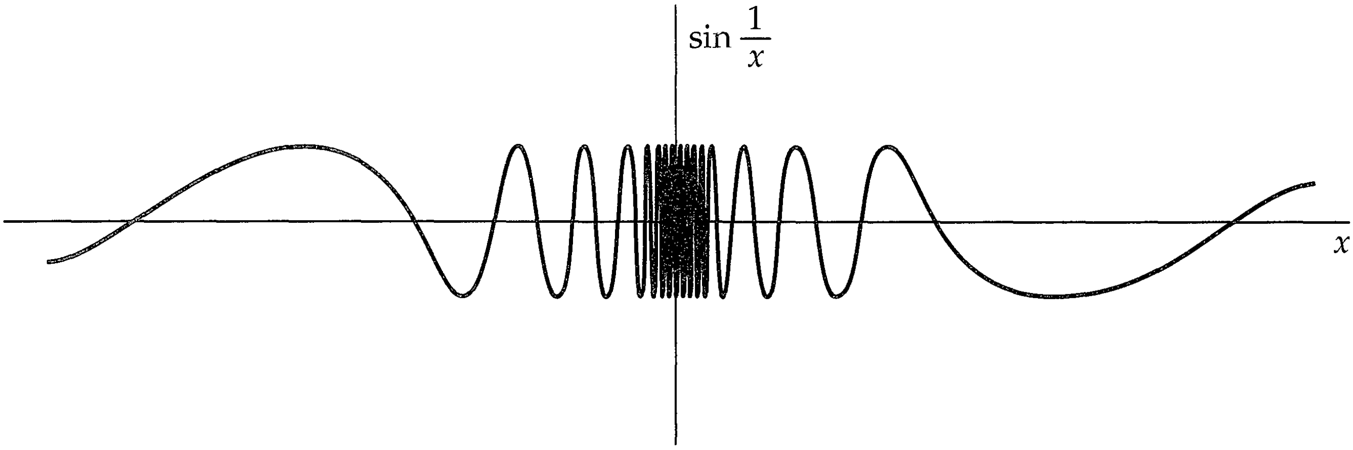
$$X(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}\{X(\cdot)\}(t)\}(f)$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{x(\cdot)\}(f)\}(t)$$

Es suficiente que se cumplan simultáneamente:

- x es absolutamente integrable $\int |x| < \infty$.
- x tiene un número finito de máximos y mínimos dentro de cualquier intervalo finito.
- x tiene un número finito de discontinuidades finitas dentro de cualquier intervalo finito.

Transformada de Fourier - Existencia 1'



Ejemplo de una función con infinitos máximos en $x = 0$. Es $\text{sen}(1/x)$.
Dibujo prestado de Bracewell, *The Fourier Transform and its applications*

Transformada de Fourier - Existencia 2

Si $x(t)$ es discontinua en t_0 se obtiene:

$$\hat{x}(t_0) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{x(\cdot)\}(f)\}(t_0) = \frac{x(t_0^+) + x(t_0^-)}{2}$$

- Hay señales de uso frecuente (constantes, escalón, senoidales) que **no** cumplen con las condiciones de Dirichlet (CD).
- Para que esas señales tengan transformada se recurre al uso de *distribuciones* (delta de Dirac).

Transformada de Fourier - Simetrías

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \qquad \text{ó} \qquad x \supset X$$

Como:

$$e^{-j2\pi ft} = \underbrace{\cos(2\pi ft)}_{par} - j\underbrace{\operatorname{sen}(2\pi ft)}_{impar}$$

y usando que $\int_{-\infty}^{+\infty} x_{impar} = 0$, descomponiendo

$$x = p + n = p_R + jp_I + n_R + jn_I;$$
$$X = P + N = P_R + jP_I + N_R + jN_I$$

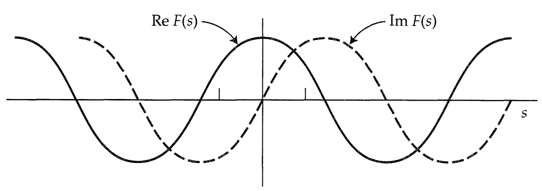
se tiene

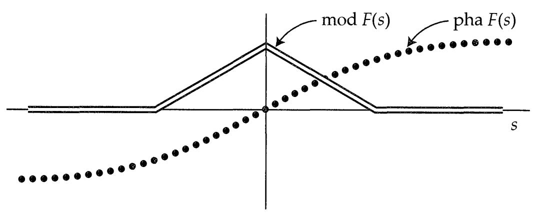
$$\begin{array}{ccccccccc}
x = & p_R & + & jp_I & + & n_R & + & jn_I \\
 & \mathcal{F} \downarrow\uparrow \mathcal{F}^{-1} & & \mathcal{F} \downarrow\uparrow \mathcal{F}^{-1} & & \mathcal{F} \downarrow\uparrow \mathcal{F}^{-1} & & \mathcal{F} \downarrow\uparrow \mathcal{F}^{-1} \\
X = & P_R & + & jP_I & + & jN_I & + & N_R
\end{array}$$

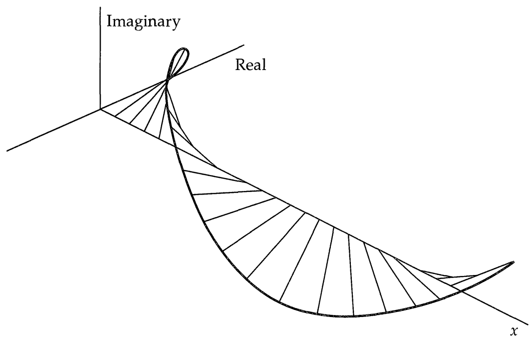
Si x es real $\Leftrightarrow$ X es Hermítica, es decir $X(f) = X^*(-f)$

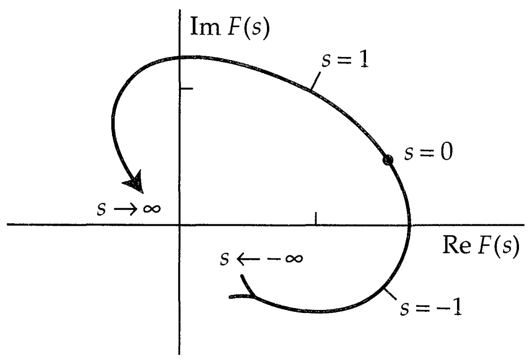
Transformada de Fourier - Representación Gráfica

Funciones complejas (dibujos tomados de Bracewell)









Transformada de Fourier - Propiedades 1

- Dualidad: Si $x \supset X$
  1. $x^*(t) \supset X^*(-f)$
  2. $X(-t) \supset x(f)$
     - x *par* $\to X$ *par* entonces $x(t) \supset X(f)$ y también $X(t) \supset x(f)$
     - x *impar* $\to X$ *impar* entonces $x(t) \supset X(f)$ y también $X(t) \supset -x(f)$
  3. $x(-t) \supset X(-f)$

Pares Transformados 1

- **Cajón:** Por definición,

$$\sqcap(t) \supset \operatorname{sinc}(s) = \frac{\operatorname{sen} \pi s}{\pi s}$$

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\operatorname{sen} \pi x}{\pi x} \supset \sqcap(s) \qquad \text{por Dualidad-2}$$

- **Exponencial unilateral:** Por definición,

$$e^{-\alpha x} u(x) \supset \frac{1}{\alpha + j2\pi s} = \frac{\alpha - j2\pi s}{\alpha^2 + 4\pi^2 s^2}; \qquad \alpha > 0$$

- **Delta de Dirac:** $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-j2\pi s x} dx = 1 \;\Rightarrow F(s) = 1$

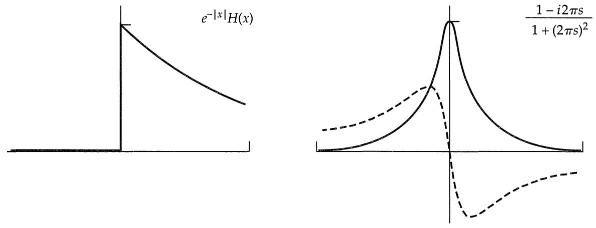
$$\begin{array}{lcl} \delta(x) & \supset & 1 \\ 1 & \supset & \delta(s) \qquad \text{por Dualidad-2} \end{array}$$

En forma directa, viola las conds. de Dirichlet!!

Pares Transformados 1 - Gráfico

Cajón

Exponencial Unilateral a derecha

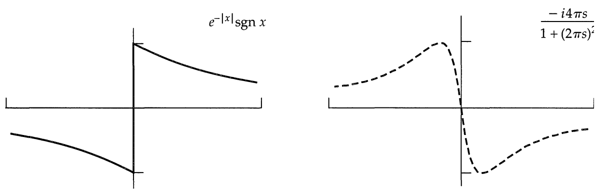


Constante - Delta de Dirac

Pares Transformados 2

- **Signo:** ¿Módulo integrable? No! Camino intuitivo: calcular $e^{-\sigma|x|}\text{sgn}(x)$; $\sigma > 0$, y luego hacer $\sigma \to 0$

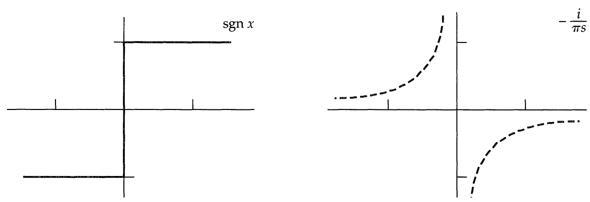
Por definición
$\mathcal{F}\{e^{-\sigma|x|}\text{sgn}(x)\}(s) = \frac{1}{\sigma+j2\pi s} - \frac{1}{\sigma-j2\pi s}$



Entonces, haciendo $\sigma \to 0$ $^{(*)}$

$$\text{sgn}(x) \supset \frac{1}{j\pi s} = \frac{-j}{\pi s}$$

$$\frac{j}{\pi x} \supset \text{sgn}(s) \qquad \text{por Dualidad-2}$$



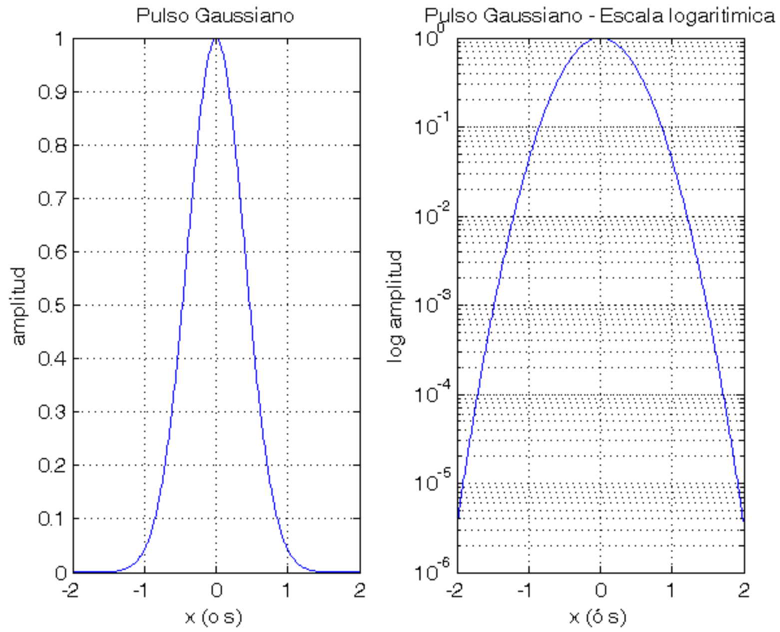
. $^{(*)}$ requiere ciertos detalles matemáticos

Pulso Gaussiano 1

Es simplemente una forma de pulso “redondeado”.

Definición:

$$p_g(x) = e^{-\pi x^2}$$



- $x = \pm 1$ donde cambia la concavidad. Ver en escala lineal.
- Pulso con soporte **infinito**. Ver en escala logarítmica.

Pulso Gaussiano 2

- Con la escala adecuada, su *TF* es el mismo pulso gaussiano.

$$P_g(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-j2\pi sx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\pi x^2 + j2\pi sx)} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x^2 + j2sx - s^2)} e^{-\pi s^2} dx =$$

$$= e^{-\pi s^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+js)^2} dx = e^{-\pi s^2}$$

- observe el truco de “completar a un cuadrado perfecto” y usar que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx = 1$$

- El p_g tiene el mismo **gráfico** que una fdp gaussiana de media cero y varianza $\sigma^2 = \frac{1}{2\pi}$

Linealidad

Motivación: expandir los pares transformados. Dar forma sencilla para transformar, a señales aparentemente "complicadas".

Ejemplo: escalón $u(x) = \frac{1}{2}(1 + \text{sgn}(x))$

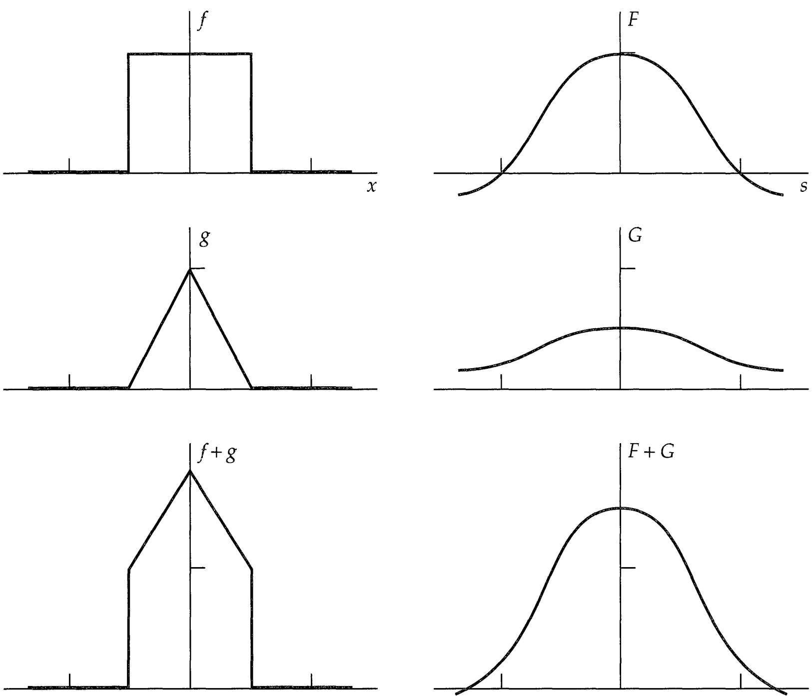
Linealidad: si $a, b \in \mathbb{C}$; $f \supset F$ y $g \supset G$

$$af + bg \supset aF + bG$$

Sigue el ejemplo:
$U(s) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}\{1\}(s) + \mathcal{F}\{\text{sgn}(\cdot)\}(s)\right) = \frac{\delta(s)}{2} + \frac{1}{j2\pi s}$;
algún detalle más adelante.

Transformada de Fourier - Propiedades 1'

Otra ilustración de cómo usar que $f + g \supset F + G$



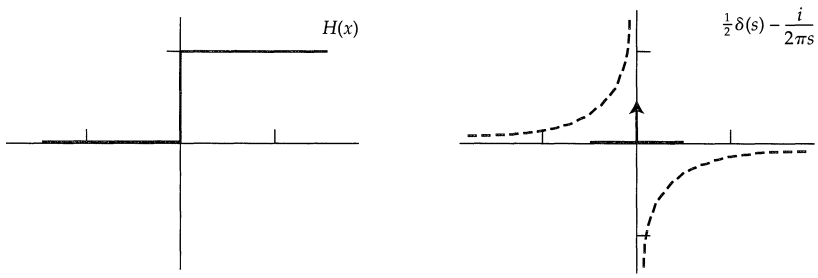
Extremadamente útil (imagine escribir ecuaciones para cada tramo de función...)

Pares Transformados 2'

- Tenemos la transformada de signo, delta...
- **Escalón:** ¿Módulo integrable? No!
  Camino intuitivo como antes con signo?
  No funcionará, porque valor medio $\neq 0$.

  Truco: $u(x) = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{sgn}(x))$
  y ahora aplicamos la *Linealidad de la Transformada*

$$u(t) \supset \frac{1}{2}\left(\delta(f) + \frac{1}{j\pi f}\right)$$



Translación

Si $g(x) \supset G(s)$, y $\quad d \in \mathbb{R}$

$$g(x-d) \supset e^{-j2\pi sd}G(s)$$
$$e^{j2\pi xd}G(-x) \supset g(s-d)$$

por Dualidad-2.

Demostración: escriba la relación directa de la TF pero con $x-d$ en lugar de x y trabaje el factor exponencial.

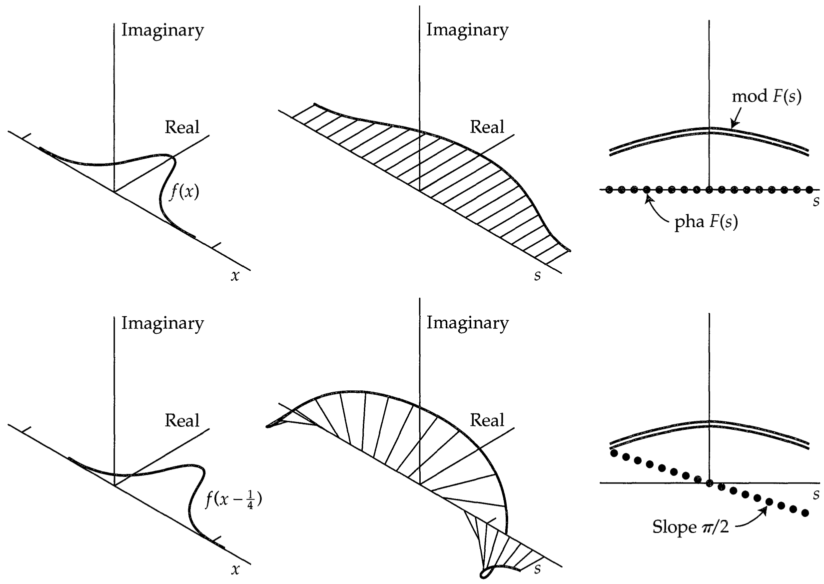
Ejemplo: $\sqcap(x) \supset \mathrm{sinc}(s)$ entonces $\sqcap(x-1/2) \supset e^{j\pi s}\mathrm{sinc}(s)$

Verifique que -linealidad+translación-
$\mathcal{F}\{\sqcap(x-1/2)\}(s) \equiv \mathcal{F}\{u(x)-u(x-1)\}(s)$.

Transformada de Fourier - Traslación

Una ilustración de traslación

$$f(x - 1/4) \supset e^{-j\pi s/2} F(s)$$



$f(x)$ in 3D $\quad$ $F(s)$ in 3D $\quad$ $F(s)$ en módulo y fase

TF - Algunos pares transformados 3

- **Exponencial compleja:** $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ con $f_0 \in \mathbb{R}$

$$e^{j2\pi f_0 t} \supset \delta(f - f_0)$$

$$\delta(t - t_0) \supset e^{-j2\pi f_0 t}$$

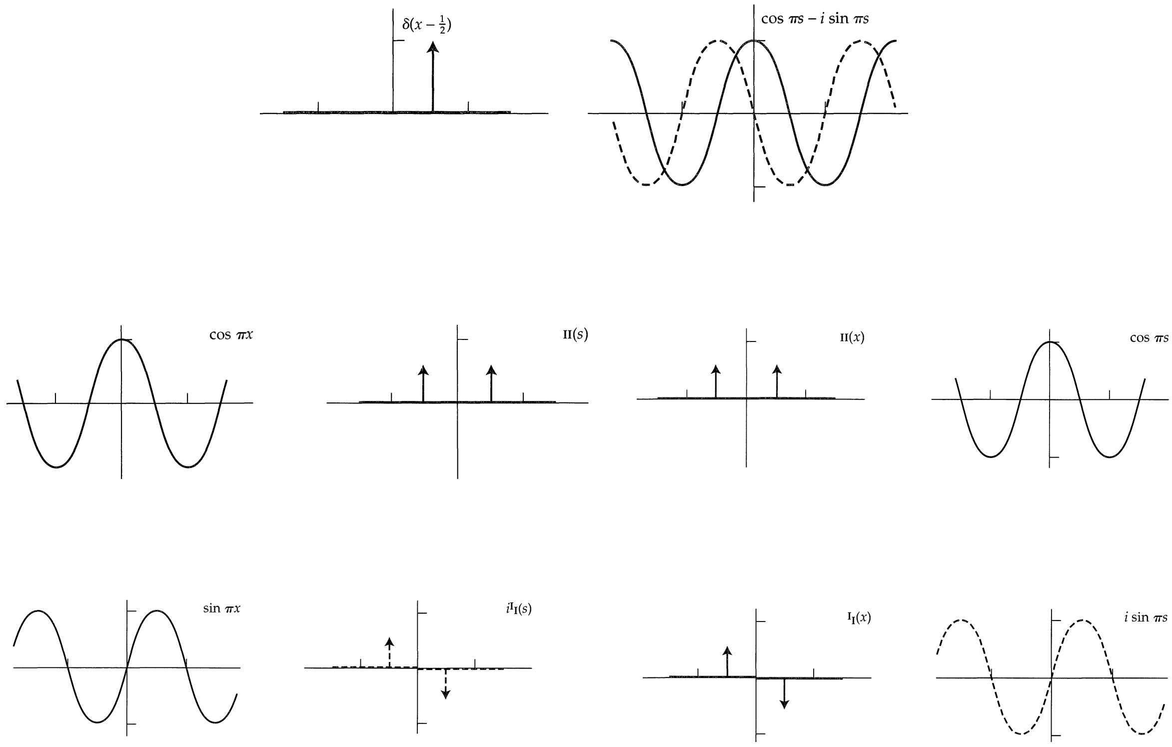
- **Coseno:** $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ Euler + linealidad

$$\cos(2\pi f_0 t) \supset \frac{1}{2}\left(\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)\right) = \frac{1}{2f_0} \upuparrows(f/2f_0)$$

- **Seno:** $x(t) = \mathrm{sen}(2\pi f_0 t)$ Euler + linealidad

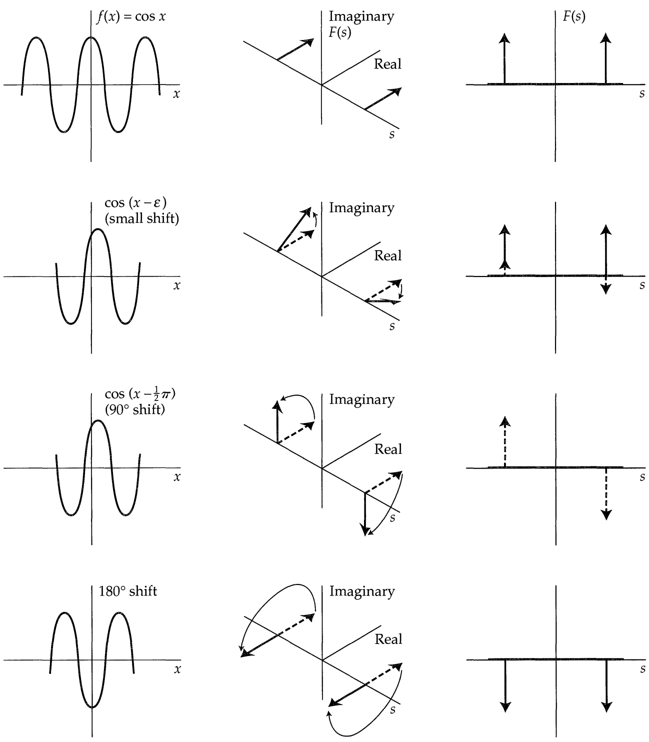
$$\mathrm{sen}(2\pi f_0 t) \supset \frac{1}{2j}\left(-\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)\right) = \frac{j}{2f_0} \updownarrows(f/2f_0)$$

Gráficos



Translación de un coseno

Tomado de Bracewell



$$\cos(2\pi f_0 t + \phi) = \cos(2\pi f_0 t)\ \cos(\phi) - \mathrm{sen}(2\pi f_0 t)\ \mathrm{sen}(\phi)$$

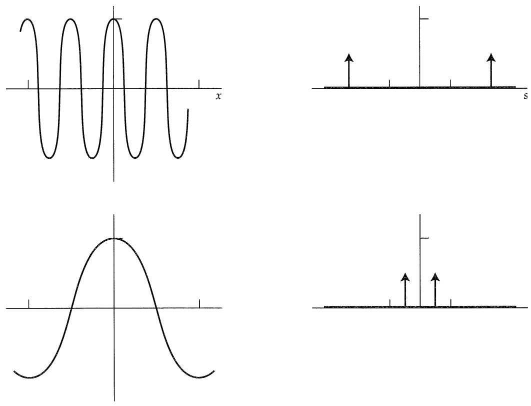
Similaridad

O cambio de escala. Si $g(x) \supset G(s)$, y $\quad a \in \mathbb{R}$

$$g(ax) \supset \frac{1}{|a|} G(s/a)$$

Ejemplo: Si $T > 0$, entonces $\sqcap(x/T) \supset T\mathrm{sinc}(sT)$

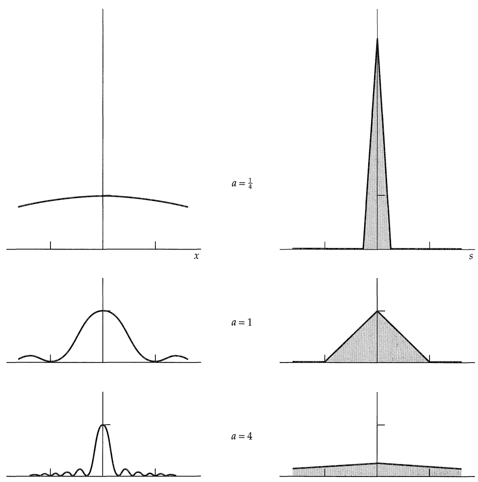
- ⋆ Si $a > 1$, $f(ax)$ se *contrae*; pero $F(s/a)$ se *expande*.
- ⋆ Variaciones más rápidas dan contenido de mayores frecuencias.



Transformada de Fourier - Similaridad

Otra ilustración de similaridad

$$x(at) \supset \frac{1}{|a|} X(f/a)$$



Obsérvese cómo el área de la transformada se preserva. ¿Por qué? $x(a0) = x(0)$ para cualquier a.

Translación y Similaridad juntos

$$g(ax - b) = g(a(x - \frac{b}{a})) \quad \supset \quad \frac{1}{|a|}G(s/a)e^{-j2\pi s\frac{b}{a}}$$

★ Puede verse como si uno primero desplaza en b

$$G(s) \mapsto e^{-j2\pi sb}G(s)$$

y luego, al conjunto, le cambia la escala en a

$$e^{-j2\pi sb}G(s) \mapsto \frac{1}{a}e^{-j2\pi s(b/a)}G(s/a)$$

★ No confundirse: **NO** es lo mismo que hacer primero un cambio de escala de a y luego una traslación de b.

Próximas Clases

- Derivación. Convolución. Area bajo la señal y bajo la convolución. Integración.
- Correlación determinística: Propiedades auto e inter. Energía. Interpretación como densidad de energía.
- Reconciliación serie y transformada de Fourier.