FACULTAD DE INGENIERÍA

SEÑALES Y SISTEMAS
Clase 13

Carlos H. Muravchik

23 de Abril de 2020

Habíamos visto:

1. *Transformada de Fourier*
2. Existencia. Simetrías.
3. Pares transformados usuales.
4. TF de pulso gaussiano.
5. Propiedades.

Y se vienen:

- Pares transformados repaso. Peine
- Derivación, Integración
- Convolución, Áreas, Modulación
- Respuesta en frecuencia de SLIT
- Correlaciones determinísticas
- Rayleigh-Parseval. Dens. de energía

TF - Algunos pares transformados 1

- $x(t) = e^{-\alpha t}u(t), \quad \alpha > 0$

$$e^{-\alpha t}u(t) \supset \frac{1}{\alpha + j2\pi f} \quad \alpha > 0$$

- $x(t) = e^{-\alpha |t|}, \quad \alpha > 0$

$$e^{-\alpha |t|} \supset \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} \quad \alpha > 0$$

- $x(t) = \delta(t)$

$$\delta(t) \supset 1$$

- $x(t) = 1$

$$1 \supset \delta(f) \quad \textit{por dualidad}\ (2)$$

($x(t) = 1$ no es módulo integrable!!)

TF - Algunos pares transformados 2

- Cajón: $x(t) = \sqcap(t)$

$$\sqcap(t) \supset \text{sinc}(f) = \frac{\text{sen}(\pi f)}{\pi f}$$

- Signo: $x(t) = \text{sgn}(t)$

$$\text{sgn}(t) \supset \frac{1}{j\pi f} = \frac{-j}{\pi f}$$

$$\frac{-1}{j\pi t} \supset \text{sgn}(f)$$

- Escalón: $x(t) = u(t)$, (no es módulo integrable!!)

$$u(t) = \frac{1}{2}(1 + \text{sgn}(t))$$

$$u(t) \supset \frac{1}{2}\left(\delta(f) + \frac{1}{j\pi f}\right)$$

TF - Algunos pares transformados 3

- Exponencial compleja: $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ con $f_0 \in \mathbb{R}$

$$e^{j2\pi f_0 t} \supset \delta(f - f_0)$$

- Coseno: $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

$$\cos(2\pi f_0 t) \supset \frac{1}{2}\left(\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)\right)$$

- Seno: $x(t) = \operatorname{sen}(2\pi f_0 t)$

$$\operatorname{sen}(2\pi f_0 t) \supset \frac{1}{2j}\left(-\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)\right)$$

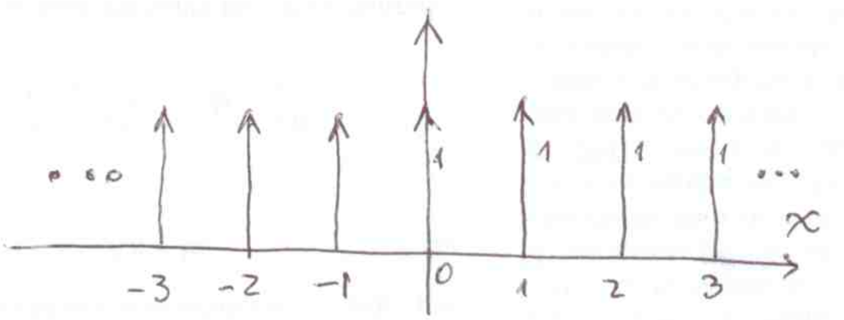
- Pulso gaussiano: $x(t) = e^{-\pi t^2}$

$$e^{-\pi t^2} \supset e^{-\pi f^2}$$

Pares Transformados - Peine 1

$$\text{Ш}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) \supset \text{Ш}(s)$$

pero... ¿cómo?



Pares Transformados - Peine 2

- Cualquier intento de usar la definición falla (Lin. a un número infinito de sumandos; ¿converge?).
- Si insistimos en usar L+T

$$\text{Ш}(x) \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-j2\pi sn}$$

  que es una “serie formal”, pues no converge (como bien lo sufrió el mismo Fourier!!)
- Demostraremos con series de Fourier la Fórmula de Pascal

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-j2\pi sn} = \text{Ш}(s)$$

  y eso lleva al resultado.

$$\text{Ш}(x) \supset \text{Ш}(s)$$

Derivación

Dominio ‘tiempo’. Si $x \supset X$ entonces, si x es diferenciable,

$$\frac{df}{dx}(x) = f'(x) \supset \; j2\pi sF(s)$$

Dominio ‘frecuencia’: si X es diferenciable,

$$-j2\pi xf(x) \supset \; F'(s) = \frac{dF}{ds}(s)$$

Demostración: usar expresiones de TF directa e inversa.

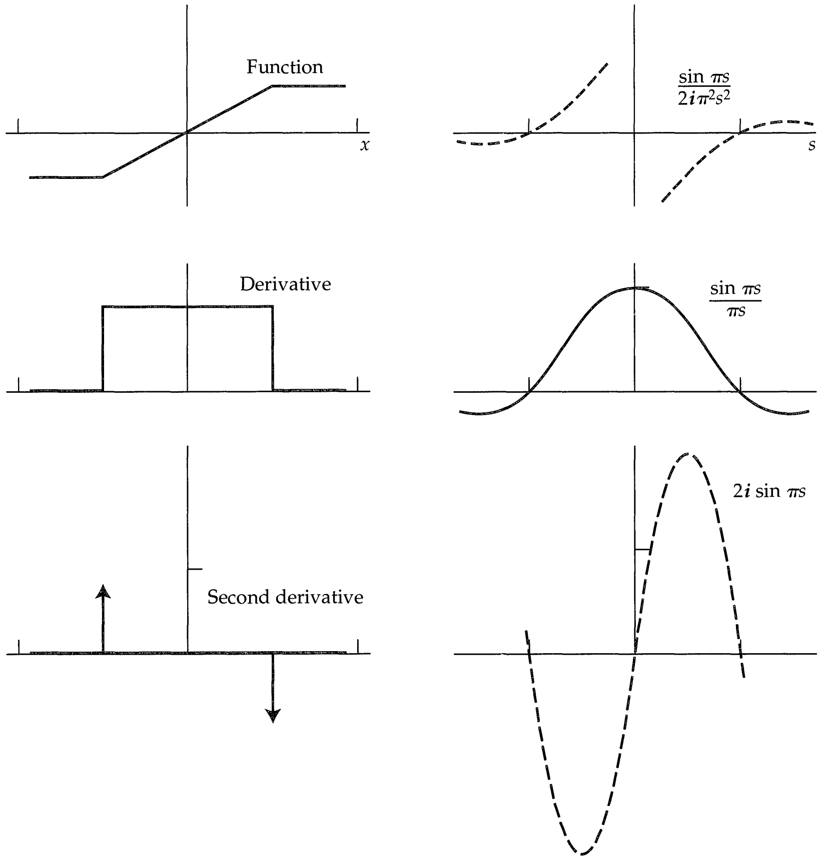
Ejemplo:

$$\sqcap(x) \supset \; \mathrm{sinc}(s) = \frac{\operatorname{sen} \pi s}{\pi s}$$

$$2 \,{\uparrow\!\downarrow}(x) \supset \; j2\pi s \,\mathrm{sinc}(s) = j2 \operatorname{sen} \pi s$$

Observar que al derivar, se incrementaron las altas frecuencias.

Derivación - Ilustración



Transformada de Fourier - Mas propiedades

- Convolución: Si $x \supset X$ e $y \supset Y$ entonces

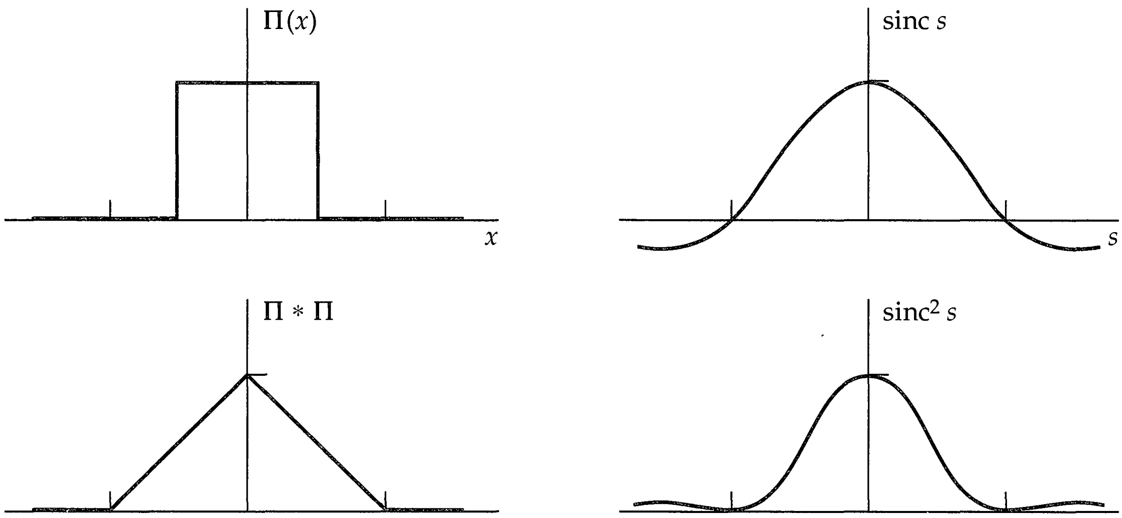
$$\{x * y\}(t) \supset X(f)Y(f)$$

$$\mathcal{F}\{x * y\}(f) = \int e^{-j2\pi f\tau} \int x(\eta)y(\tau - \eta)\, d\eta\, d\tau =$$
$$= \int e^{-j2\pi f\eta} x(\eta) \int y(\tau - \eta) e^{-j2\pi f(\tau-\eta)}\, d\tau\, d\eta =$$
$$= \int e^{-j2\pi f\eta} x(\eta)\, d\eta \int y(\phi) e^{-j2\pi f(\phi)}\, d\phi = X(f)Y(f)$$

- Multiplicación: Si $x \supset X$ e $y \supset Y$ entonces

$$x(t)y(t) \supset \{X * Y\}(f)$$

Convolución - Ejemplo



Y entonces obtenemos otro par simple

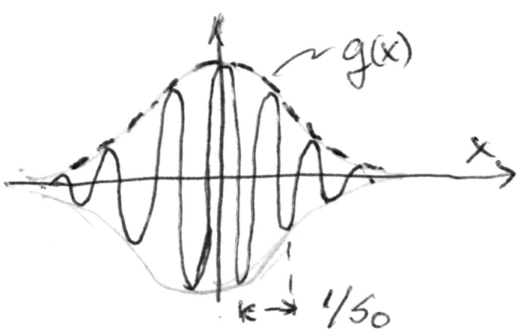
$$\{\sqcap * \sqcap\}(t) = \wedge(t) \supset (\mathrm{sinc}(f))^2 = \frac{\mathrm{sen}^2(\pi f)}{\pi^2 f^2}$$

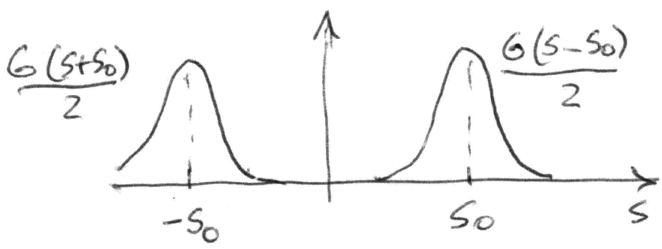
Transformada de Fourier - Modulación

Si $x \supset X$ y $f_0, t_0 \in \mathbb{R}$ entonces (recordar convolución)

$$x(t)\cos(2\pi f_0 t) \supset \frac{1}{2}\left(X(f+f_0) + X(f-f_0)\right)$$

$$x(t)\mathrm{sen}(2\pi f_0 t) \supset \frac{j}{2}\left(X(f+f_0) - X(f-f_0)\right)$$

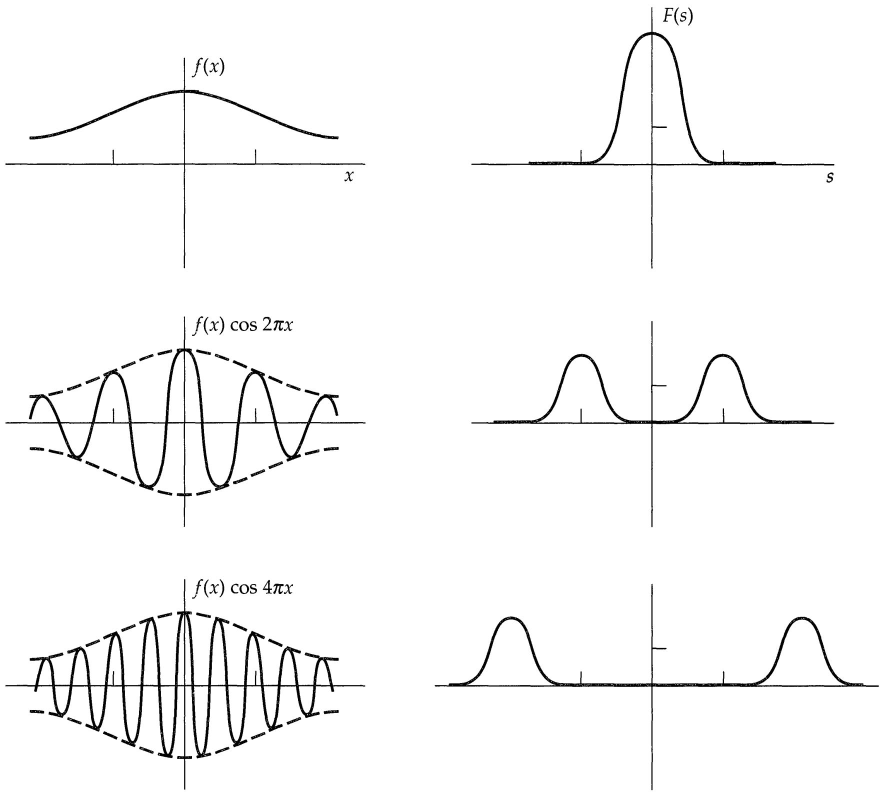




De forma dual

$$\frac{1}{2}\left(x(t+t_0) + x(t-t_0)\right) \supset X(f)\cos(2\pi f t_0)$$

Modulación



Derivación - Integración

Teníamos

- Derivación: Si $x \supset X$, entonces

$$\frac{dx}{dt}(t) = x'(t) \supset j2\pi f X(f)$$

$$-j2\pi t x(t) \supset \frac{dX}{df}(f) = X'(f)$$

La operación "inversa":

- Integración: Si $x \supset X$ y $a \in \mathbb{R}$ entonces

$$\int_{-\infty}^{t} x(\lambda) d\lambda \supset \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)\delta(f)}{2}$$

Notar que al integrar se atenúan las altas frecuencias.

Integración - detalles

Considere $x(t) \supset X(f)$. Defina la función integral $i_x(t)$

$$i_x(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\sigma)\, d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma)\, u(t-\sigma)\, d\sigma = \{x * u\}(t)$$

Luego $i_x(t) \supset I_x(f)$ y como $\{x * u\}(t) \supset U(f)X(f)$

$$I_x(f) = U(f)X(f) = X(f)\left(\frac{1}{2}(\delta(f) + \frac{1}{j\pi f})\right) = \frac{X(0)}{2}\delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

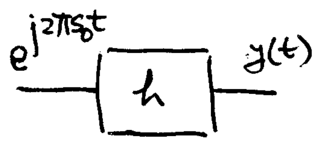
en sentido distribucional.

- La delta en $f = 0$ refleja el área bajo la curva de x. ¿por qué por 1/2?
- La división por f atenúa las altas frecuencias de x

Otra motivación para la TF

Respuesta de SLIT a exponenciales imaginarias:

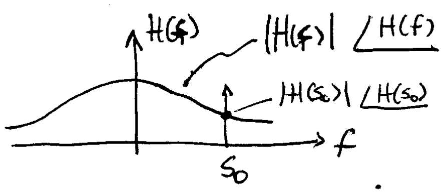
$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 (t-\tau)} h(\tau)d\tau$$

$$y(t) = e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f_0 \tau} h(\tau)d\tau$$

$$y(t) = H(f_0)e^{j2\pi f_0 t}$$



con

$$H(f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau$$

Respuesta de sistemas lineales a exponenciales imaginarias

$H(f_0)$ es un número complejo (Ojo!! Tiene parte real e imaginaria - o módulo y fase -).

Conclusión:

En un SLIT cuando entra una exponencial imaginaria, sale una exponencial imaginaria de la misma frecuencia. Pero su amplitud y fase cambian de acuerdo a $H(f_0)$, que depende del sistema en cuestión.

Las exponenciales imaginarias son *autofunciones* de los SLIT y los correspondientes valores $H(f_0)$ *autovalores*

Ocurre como con matrices (operadores lineales en espacios vectoriales de *dimensión finita*).

¿Qué ocurre cuando a un SLIT entra un coseno? Usar linealidad.

Respuesta en Frecuencia de SLIT

Si variamos la frecuencia de la exponencial imaginaria de entrada, obtenemos (barrido de frecuencia)

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

que es la transformada de Fourier de la respuesta impulsional del sistema.

Por este motivo, $H(f)$ se conoce como la respuesta en frecuencia del sistema.

Respuesta en Frecuencia de SLIT

Sea un SLIT con respuesta impulsional $h(t)$. Sean $x(t)$ e $y(t)$ la entrada y la salida de dicho sistema respectivamente. Como

$$y(t) = \{x * h\}(t)$$

Utilizando propiedades de la TF llegamos a que

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

donde $H(f)$ es la respuesta en frecuencia del sistema.

Atención: ¿Siempre existe $H(f)$?

Respuesta de SLIT a entrada coseno

$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$. SLIT con respuesta impulsional h real y $h(t) \supset H(f)$.

$$Y(f) = H(f).X(f) = \frac{A.H(f)}{2}\left[\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)\right] =$$
$$= A\left[\frac{H(-f_0)\delta(f+f_0)}{2} + \frac{H(f_0)\delta(f-f_0)}{2}\right]$$

Como h real, $|H(f)|$ resulta par y $\angle H(f)$ impar; entonces

$$|H(f_0)| = |H(-f_0)| \qquad ; \qquad \angle H(f_0) = -\angle H(-f_0)$$

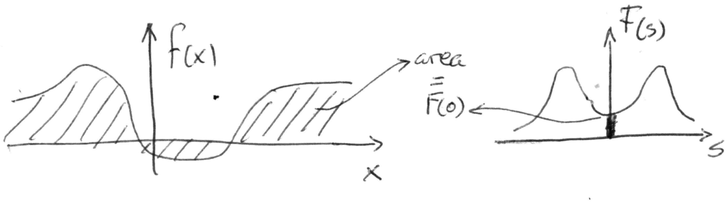
Luego

$$Y(f) = \frac{A.|H(f)|}{2}\left[\frac{e^{\angle H(f_0)}\delta(f-f_0)}{2} + \frac{e^{\angle H(-f_0)}\delta(f+f_0)}{2}\right] \subset$$
$$\subset y(t) = \frac{A.|H(f)|}{2}\left[e^{\angle H(f_0)}e^{j2\pi f_0 t} + e^{-\angle H(f_0)}e^{-j2\pi f_0 t}\right] =$$
$$= A.|H(f)|\cos(2\pi f_0 t + \angle H(f_0))$$

Area bajo la curva de señal

Si $f(x) \supset F(s)$, notar que de $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi sx} dx$

$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$



El gráfico muestra un **imposible** ¿por qué?

Y también, el Área bajo la convolución

si $f \supset F$, $g \supset G$ notar que como $\{f * g\}(x) \supset F(s)G(s)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{f * g\}(x)\, dx = \underbrace{F(0)}_{\substack{\text{área} \\ \text{bajo } f}} \cdot \underbrace{G(0)}_{\substack{\text{área} \\ \text{bajo } g}}$$

Correlación de determinísticas - Visión en frecuencia

Considere señales de energía $f(x) \supset F(s)$ y $g(x) \supset G(s)$.

La intercorrelación de f con g es

$$\gamma_{fg}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+\sigma)\, g^*(\sigma)\, d\sigma = \{f \star g\}(x)$$

como

$$f(x+\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi s\sigma} F(s) e^{j2\pi sx} ds$$

se tiene, cambiando el orden de integración,

$$\gamma_{fg}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi s\sigma} g^*(\sigma) d\sigma}_{G^*(s)}\, F(s) e^{j2\pi sx} ds$$

entonces, con $\gamma_{fg}(x) \supset \Gamma_{fg}(s)$

$$\boxed{\Gamma_{fg}(s) = F(s)G^*(s)}$$

Correlación - alternativa 1

Observación : La **correlación** de f con g es igual a una *convolución* de $\{f(\cdot)$ con $\overset{\vee}{g}(x) = g^*(-x)$. Preste atención:

$$\{f \star g\}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+\sigma)\, g^*(\sigma)\, d\sigma =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overset{\vee}{f}{}^{*}(-x-\sigma)\, g^*(\sigma)\, d\sigma = \{\overset{\vee}{f} * g\}^*(-x)$$

PERO también

$$\{f \star g\}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+\sigma)\, g^*(\sigma)\, d\sigma =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x+\sigma)\, \overset{\vee}{g}(-\sigma)\, d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\lambda)\, \overset{\vee}{g}(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \{f * \overset{\vee}{g}\}(x)$$

★ Aprovecharemos la TF de la convolución.

Correlación - alternativa 2

★ Aprovechando la TF de la convolución:

$$\gamma_{fg}(x) = \{f \star g\}(x) = \{f * \overset{\vee}{g}\}(x) \supset F(s)G^*(s)$$

porque $\mathcal{F}\{\overset{\vee}{g}\} = G^*(s)$ por Dualidades-1 y 3.

PERO también

$$\gamma_{fg}(x) = \{f \star g\}(x) = \{\overset{\vee}{f} * g\}^*(-x)$$

$$\supset \{F^*(s)G(s)\}^* = F(s)G^*(s)$$

Teorema de Rayleigh

Por definición de inter-correlación

$$\gamma_{fg}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)g^*(\sigma)d\sigma$$

y también

$$\gamma_{fg}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma)G^*(\sigma)e^{j2\pi x\sigma}d\sigma$$

por lo que calculando en $x = 0$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)g^*(\sigma)d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)G^*(s)ds}$$

o sea, las áreas bajo la curva de fg^* y de FG^* son iguales.

Para los que gustan de las matemáticas: la TF de funciones de energía es una isometría.

Relación de Parseval

Especializamos la inter-correlación para autocorrelación, haciendo $g \equiv f$:

$$\boxed{\gamma_f(x) \supset \Gamma_f(s) = F(s)F^*(s) = |F(s)|^2}$$

entonces

- Nueva propiedad de la función de autocorrelación:
La TF de una función de autocorrelación es real y positiva.

Recordamos que $\gamma_f(0) = \int |f|^2 = \mathcal{E}_f$ la energía de la función f.

El teorema de Rayleigh especializa en la Relación de Parseval:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma)|^2 d\sigma = \mathcal{E}_f = \int_{-\infty}^{\infty} |F(s)|^2 ds}$$

- es decir $|F(s)|^2$ da la repartición de energía de f en función de la frecuencia o *densidad espectral de energía*.

Correlaciones determinísticas, en frecuencia

Señales de energía.

La **intercorrelación** de f con g es

$$\mathcal{F}\left\{\gamma_{fg}(x)\right\}(s) = \Gamma_{fg}(s) = F(s)G^{*}(s)$$

La **autocorrelación** de f es

$$\gamma_{f}(x) \supset \Gamma_{f}(s) = F(s)F^{*}(s) = |F(s)|^{2}$$

Teorema de Rayleigh:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)g^{*}(\sigma)d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)G^{*}(s)ds$$

Teorema de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma)|^{2}d\sigma = \mathcal{E}_{f} = \int_{-\infty}^{\infty} |F(s)|^{2}ds$$

$|F(s)|^{2}$ representa *Densidad* **Espectral** *de Energía*

Próxima Clase

- Transformada de Fourier de señales periódicas
- Relación SF-TF
- Momentos. Centroide. Duración-ancho de banda. Principio de incertidumbre
- Transformada de Fourier de tiempo discreto (TFTD)