



FACULTAD DE INGENIERÍA



SEÑALES Y SISTEMAS

Clase 14

Carlos H. Muravchik

27 de Abril de 2020

1/29

Habíamos visto:

- ▶ Análisis frecuencial:
 - ▶ SLIT: respuesta en frecuencia
 - ▶ Área e Integración
 - ▶ Correlación determinística: Propiedades
 - ▶ T. de Rayleigh - Parseval. Energía
 - ▶ Densidad Espectral de energía.

Y se vienen:

1. TF de señales periódicas
2. Relación TF de señales periódicas con su Serie de Fourier
3. Momentos
4. Centroide - Duración y Ancho de Banda
5. Principio de incertidumbre
6. Desigualdades
7. Idea Teorema del Límite Central

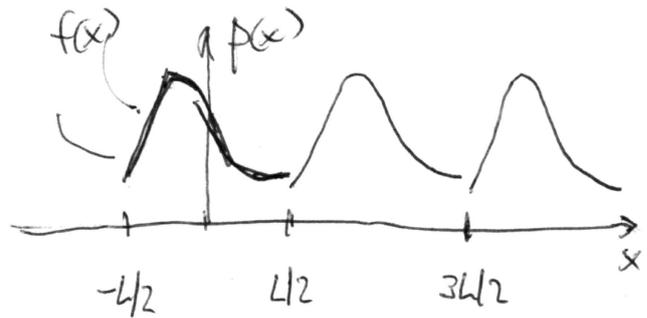
3/29

Señales periódicas

$$p(x) = p(x + L)$$

$$p(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x - kL)$$

$$f(x) = p(x) \square(x/L)$$



- ▶ Las funciones periódicas son de **potencia**, no son de \mathcal{E}
- ▶ Su TF deberá tener **deltas de Dirac**.
- ▶ Sabemos que cada $p(x)$ tiene una **serie de Fourier (SF)** que la **representa en el mismo dominio x**

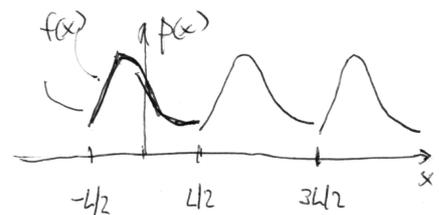
$$p(x) \simeq \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k \frac{x}{L}}$$

- ▶ ¿Cómo es la $\mathcal{F}\{p(\cdot)\}(s) = P(s)$?
- ▶ $P(s)$ está en el dominio s ¿Qué relación tendrá con la SF?

5/29

Transformada de Fourier de la señal periódica

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x - kL) = \\ &= \left\{ f(\xi) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\xi - kL) \right\} (x) = \\ &= \left\{ f(\xi) * \frac{1}{L} \uparrow\uparrow\uparrow\left(\frac{\xi}{L}\right) \right\} (x) \end{aligned}$$



y ahora

$$\mathcal{F}\{p(x)\}(s) = F(s) \cdot \uparrow\uparrow\uparrow(Ls) = \frac{F(s)}{L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(s - k/L) =$$

$$= \frac{1}{L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k/L) \delta(s - k/L) = P(s)$$

6/29

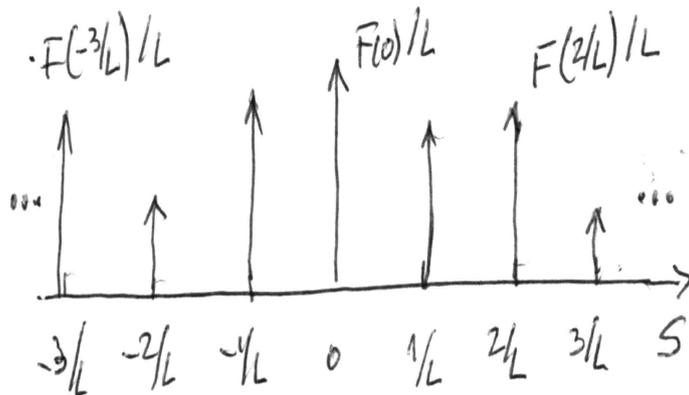
Transformada de Fourier de la señal periódica

$$\mathcal{F}\{p(x)\}(s) = P(s) = \frac{1}{L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k/L) \delta(s - k/L)$$

- ▶ Señal periódica (período L) \supset tren de deltas separados $\frac{1}{L}$
- ▶ Las áreas de las deltas son $\frac{1}{L} F(s)|_{s=k/L}$, $k \in \mathbb{Z}$
- ▶ El área de las deltas queda **determinado** por la TF de *un sólo período* de la señal, $F(s)$

Observación:

El tren no siempre tiene infinitas deltas. P.ej.: seno y coseno.



7/29

Serie de Fourier y Transformada

Sea $p(x)$ periódica, de período $L > 0$. La serie de Fourier que representa a $p(x)$ es

$$p(x) \simeq \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k \frac{x}{L}}$$

Los coeficientes c_k son

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} p(x) e^{-j2\pi kx/L} dx = \\ &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi kx/L} dx = \frac{1}{L} F(s)|_{s=k/L} \end{aligned}$$

donde $f(x) = p(x) \square(x/L)$.

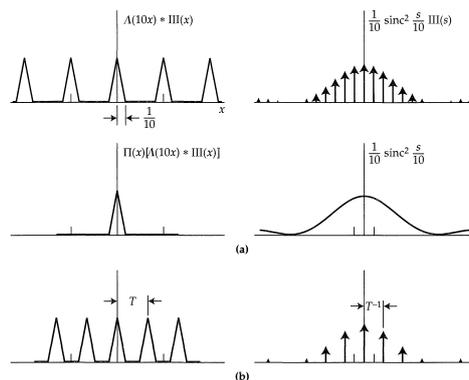
Note: los $\{c_k\}$ se obtienen integrando sobre un período; no importa cual sea el intervalo de integración.

8/29

TF y SF de $p(x)$

Consecuencias:

- ▶ El coeficiente del armónico k de la SF, es igual a $\frac{1}{L}$ de la TF de 1 ciclo de la señal periódica, evaluada en la frecuencia del armónico ($s = \frac{k}{L}$)
- ▶ Transformar *formalmente* término a término la SF da un tren de deltas **igual** a la $P(s)$.
- ▶ El área de las deltas de la TF de $p(x)$ coincide con los coeficientes de la SF de $p(x)$.



9/29

Fenómeno de Gibbs

Truncamiento de la SF:

- ▶ Truncar la SF a $\pm N$ términos es, en el espectro, como multiplicar $P(s)$ por el $\Pi\left(\frac{sL}{2N+1}\right)$.
- ▶ Opera como si aplicáramos un filtro pasabajos a la TF.
- ▶ El efecto en x de truncar a $\pm N$ términos es como hacer la convolución

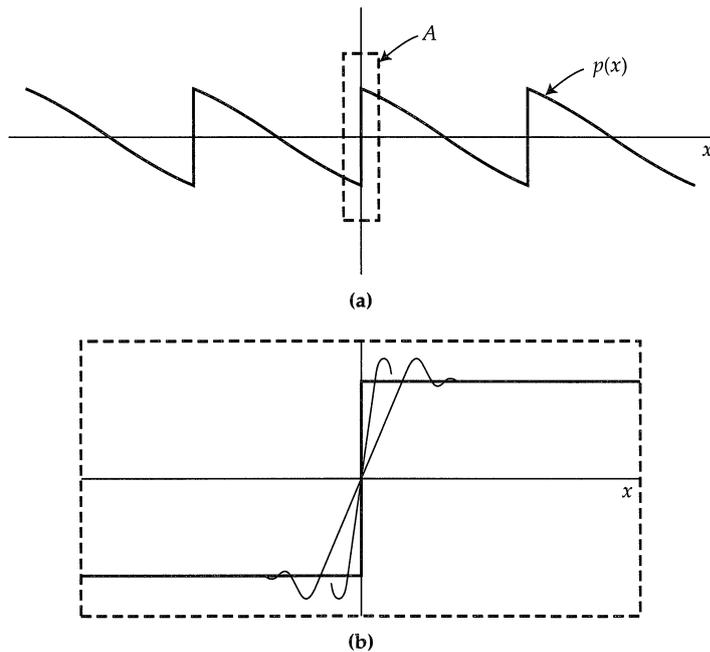
$$\{p(\xi) * \frac{2N+1}{L} \text{sinc}((2N+1)\xi/L)\}(x).$$

- ▶ A medida que N crece se convoluciona $p(x)$ con una función más y más parecida a una delta.
- ▶ Pero en los puntos de discontinuidad de $p(x)$...

10/29

Fenómeno de Gibbs - sigue

Efecto en puntos de discontinuidad de $p(x)$:



La distancia entre picos positivo y negativo en (b) es proporcional a $1/N$

El sobrepico es aproximadamente 9%

11/29

Peine y fórmula de Pascal

$$\uparrow\uparrow\uparrow(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) \quad \supset \quad \uparrow\uparrow\uparrow(s). \quad \text{Ingenuamente}$$

$$G(s) = \mathcal{F}\{\uparrow\uparrow\uparrow(x)\}(s) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ns}}_{\text{periódica en } s \text{ con } L=1, c_n=1}. \quad \text{Luego}$$

$$c_n = 1 = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} G(s) \Pi(s) e^{-j2\pi ns} ds = \int_{-1/2}^{1/2} F(s) e^{-j2\pi ns} ds$$

entonces, debe ser $F(s) = \delta(s)$ y

$$G(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(s - n) = \uparrow\uparrow\uparrow(s)$$

Finalmente $\boxed{\uparrow\uparrow\uparrow(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ns}}$, la **fórmula de Pascal**, una igualdad en “sentido distribucional”.

12/29

Momentos

Supongamos $g \supset G$. Tenemos **momento** de orden n de g :

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n g(x) dx \quad \Rightarrow \quad m_n = \left(\frac{j}{2\pi} \right)^n \frac{d^n G}{ds^n}(0)$$

Demostración: de la definición de TF,

$$\begin{aligned} \frac{dG}{ds}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} (-j2\pi x) g(x) e^{-j2\pi s x} dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^n G}{ds^n}(s) &= (-j2\pi)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n g(x) e^{-j2\pi s x} dx \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Similarmente, para **momento** de orden n de G , comenzando con la TF^{-1} :

$$M_n = \int_{-\infty}^{\infty} s^n G(s) ds \quad \Rightarrow \quad M_n = \left(\frac{1}{j2\pi} \right)^n \frac{d^n g}{dx^n}(0)$$

14/29

Momentos - ejemplos

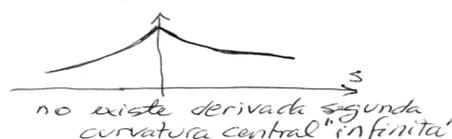
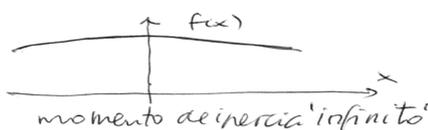
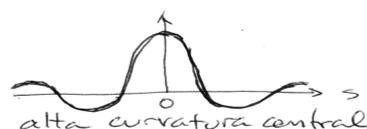
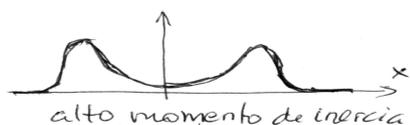
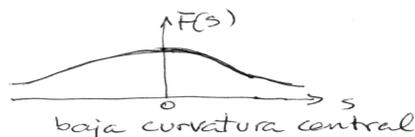
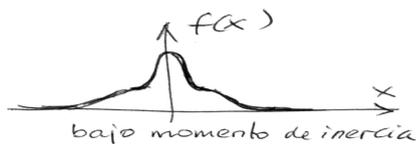
Pensar $f(x)$ como densidad lineal de masa.

- **Primer orden** (momento)

Si $f(x) = \mathcal{N}(x)$, de Física, $m_1 = \frac{-1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{-1}{2} = -1/2$.

Por lo anterior, $F(s) = j \sin(\pi s)$, luego $\frac{jF'(0)}{2\pi} = \frac{j^2 \pi}{2\pi} = -1/2$

- **Segundo orden** (momento de inercia) $m_2 = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{d^2 G}{ds^2}(0)$

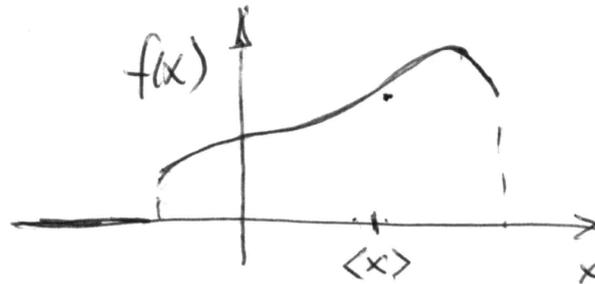


15/29

Centroide

Idea: Localizar la señal en el eje de x ,
 \Rightarrow ubicar el "centro de masa".

Suma de momentos
 $= 0$



$$\int (x - \langle x \rangle) f = 0$$

o sea,

$$\begin{aligned} \langle x \rangle \int f &= \int xf &\Rightarrow & \langle x \rangle = \frac{\int xf}{\int f} = \\ & & & = \frac{-F'(0)}{j2\pi F(0)} = \frac{j}{2\pi} \frac{d}{ds} \ln F(s) \Big|_{s=0} \end{aligned}$$

17/29

Duración equivalente

Idea: ¿Cuánto *dura* una señal f ? ¡ d_f !

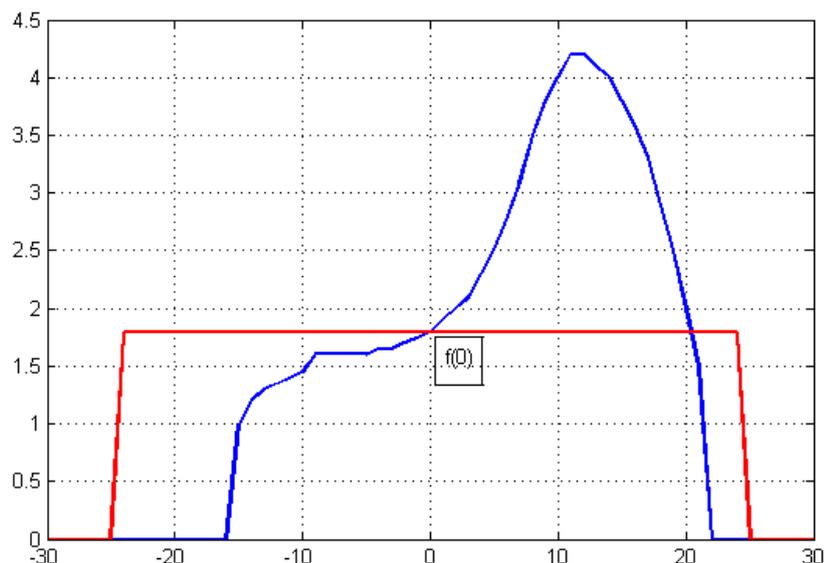
Área bajo $f(x) = \text{Área rectángulo} \begin{cases} \text{alto} & = f(0) \\ \text{ancho} & = d_f \end{cases}$

entonces

$$\int f = f(0) \cdot d_f$$

o sea,

$$d_f = \frac{\int f}{f(0)} = \frac{F(0)}{\int F}$$



19/29

Ancho de Banda equivalente

La misma **idea**: cuánto se *extiende* f , pero **en el dominio de la frecuencia**.

Con $f(x) \supset F(s)$, el ancho de banda equivalente de f es B_f , definido por:

$$\text{Área bajo } F(s) = \text{Área rectángulo} \begin{cases} \text{alto} & = F(0) \\ \text{ancho} & = B_f \end{cases}$$

entonces

$$\int F = F(0) \cdot B_f$$

o sea,

$$B_f = \frac{\int F}{F(0)} = \frac{f(0)}{\int f}$$

20/29

Duración \times Ancho de Banda

Consideramos **duración equivalente** d_f y **ancho de banda equivalente** B_f .

Recordar

$$d_f = \frac{\int f}{f(0)} \quad \text{y} \quad B_f = \frac{\int F}{F(0)} = \frac{f(0)}{\int f}$$

en consecuencia

$$\boxed{d_f \cdot B_f = 1}$$

★ a mayor duración equivalente, menor ancho de banda equivalente y viceversa.

★ no se pueden tener señales de corta duración y poco ancho de banda.

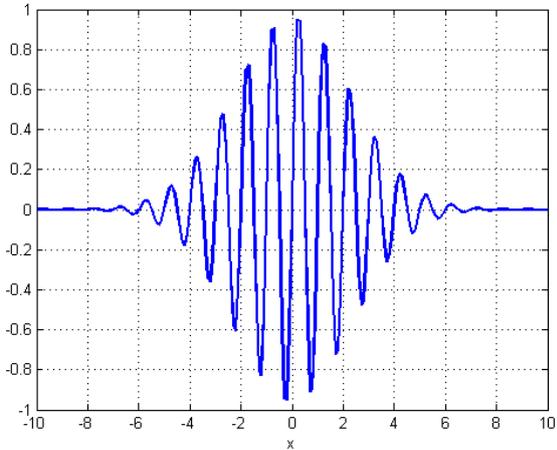
Esta es una forma rudimentaria del “principio de incertidumbre”.

21/29

Principio de Incertidumbre 1

Duración equivalente y ancho de banda equivalente tienen **limitaciones:**

- ▶ dependencia del área con el signo de f o F
- ▶ dependencia con el valor de $f(0)$ o de $F(0)$
- ▶ demasiado orientadas a medir “concentración de amplitud alrededor del origen”
- ▶ no contempla formas de onda con oscilaciones



Existen otras medidas: ancho de autocorrelación, ancho en media cuadrática, etc.

22 / 29

Principio de Incertidumbre 2

Una medida sofisticada para atacar esas limitaciones es la **desviación medio cuadrática del centroide de $|f(x)|^2$** , Δx

$$(\Delta x)^2 = \frac{\int x^2 |f(x)|^2}{\int |f(x)|^2} - \left[\frac{\int x |f(x)|^2}{\int |f(x)|^2} \right]^2$$

y de modo similar para el ancho de banda Δs

$$(\Delta s)^2 = \frac{\int s^2 |F(s)|^2}{\int |F(s)|^2} - \left[\frac{\int s |F(s)|^2}{\int |F(s)|^2} \right]^2$$

y resulta un principio de incertidumbre (como el de Heisenberg):

$$\Delta x \cdot \Delta s \geq \frac{1}{4\pi}$$

con **igualdad** -mínimo producto duración/ancho de banda- para el **pulso gaussiano**;

y consecuencias similares a las extraídas para $d_f \cdot B_f = 1$

23 / 29

Desigualdades

1. Cota del **máximo de $f(x)$ en función de la $F(s)$**

$$|f(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |F(s)| ds$$

Demostración: como $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{j2\pi xs} ds$ luego,

$$|f(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |F(s)||e^{j2\pi xs}| ds = \int_{-\infty}^{\infty} |F(s)| ds$$

2. Cota de la **máxima pendiente de $f(x)$ en función de la $F(s)$**

$$|f'(x)| \leq 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |sF(s)| ds$$

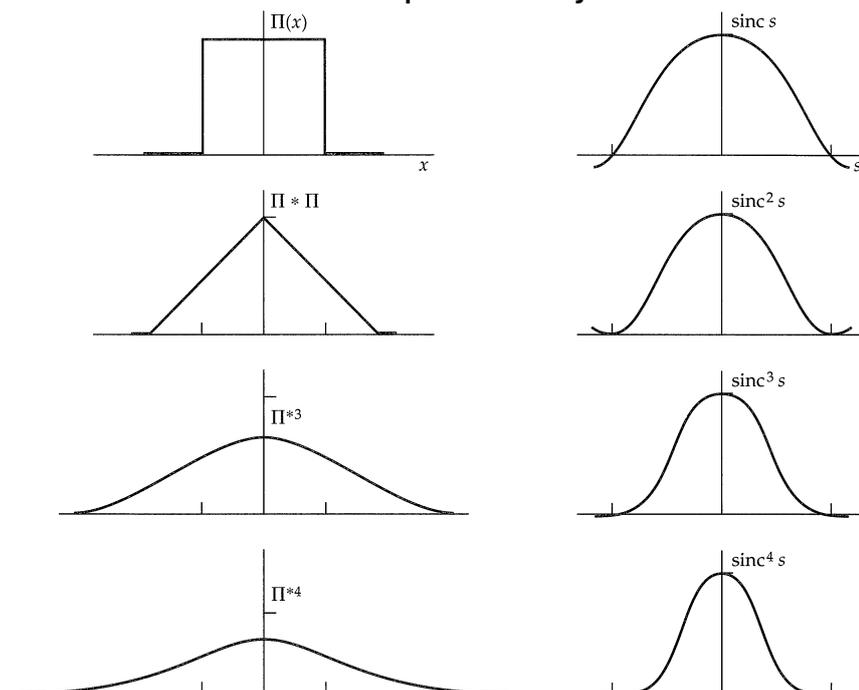
Demostración: como $f'(x) = j2\pi \int_{-\infty}^{\infty} sF(s)e^{j2\pi xs} ds$ luego,

$$|f'(x)| \leq 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |sF(s)||e^{j2\pi xs}| ds = \int_{-\infty}^{\infty} |sF(s)| ds$$

25/29

Teorema del límite central

1. auto-convolución múltiple - dibujos



2. sigue...

26/29

Teorema del límite central

En probabilidades: la suma de VA independientes tiene densidad de probabilidad igual a la convolución de sus densidades.

Caso id

1. auto-convolución múltiple
2. máximo en 0 y McLaurin $\sim (1 - af^2)$
3. n-sima convolución $\sim (1 - af^2)^n$
4. aproximación $e^x \sim (1 + x/n)^n$ cuando $n \rightarrow \infty$
5. luego, $(1 - af^2)^n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} e^{-anf^2}$
6. antitransformando

$$e^{-anf^2} \subset \left(\frac{\pi}{an}\right)^{1/2} e^{-\pi^2 x^2 / an}$$

7. Luce como una Gaussiana con $\sigma^2 = \frac{an}{2\pi^2}$

27/29

Clases que vienen

- Análisis de Fourier de SVID

29/29