FACULTAD DE INGENIERÍA

SEÑALES Y SISTEMAS
Clase 15

Carlos H. Muravchik

30 de Abril de 2020

Habíamos visto:

- Momentos
- Centroide - Duración - Incertidumbre
- TF de señales periódicas
- Relación con su Serie de Fourier

Y se vienen:

1. Análisis frecuencial de SVID
2. Transformada Fourier de tiempo discreto
3. Propiedades

Análisis frecuencial de SVID

- TFTD: Transformada de Fourier de Tiempo Discreto
- TDF: Transformada Discreta de Fourier
- SDF: Serie Discreta de Fourier

TFTD - Motivación frecuencial

"Reproducir" lo ocurrido con SVIC.

	SVIC			SVID	
Aperiódicas		Periódicas	Aperiódicas		Periódicas
TF		*TF*; *SF*	*TFTD*		*TDF*; *SDF*
			largo *finito* $\rightarrowtail$	*TDF*	$\hookleftarrow$

TFTD - Motivación SLID

"Reproducir" lo ocurrido con SVIC:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}_d\{\cdot\}} \longrightarrow y[n]$$

$$x[n] = \alpha^n \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$
$$y[n] = \{x * h\}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\alpha^{n-k}$$

$$= \alpha^n \underbrace{\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\alpha^{-k} \right)}_{(A)} = \underbrace{H(\alpha)}_{\text{autovalor}} \ \underbrace{\alpha^n}_{\text{autofunción}}$$

y luego por superposición:

$$\underbrace{x[n] = \sum_{m=1}^{M} c_m \alpha_m^n}_{(B)} \Rightarrow y[n] = \sum_{m=1}^{M} c_m H(\alpha_m)\alpha_m^n$$

- (A) sugiere la definición de la TFTD
- (B) sugiere la forma que debiera tener una Serie Discreta de Fourier (SDF)

TFTD definición

$$\boxed{F(e^{j2\pi s}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]e^{-j2\pi sk}}$$

Otras notaciones: $F(\Omega)$ con $\Omega = 2\pi s$ y $F(e^{j\omega})$ con $\omega = 2\pi s$.

- Condiciones de Dirichlet? más sencillo:
- Existencia: secuencias absolutamente sumables $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f[k]| < \infty$
- discontinuidades?
- Si $f[n]$ es abs. sumable es de energía finita. La conversa NO vale. (Interesado? vea la filmina que sigue)

Si $f[n]$ es abs. sumable es de energía finita

$f[n]$ abs. sumable $\Rightarrow$

$$\exists C \setminus \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f[n]| \leq C < \infty$$

Definimos $F[n] = \frac{f[n]}{C}$. Claramente $|F[n]| \leq 1$ y $|F[n]|^2 \leq |F[n]|$. Entonces

$$\sum_{n=-m}^{m} |F[n]|^2 \leq \sum_{n=-m}^{m} |F[n]| = (1/C) \sum_{n=-m}^{m} |f[n]|$$

Tomando $\lim_{m\to\infty}$ a ambos lados,

$$\mathcal{E}_f = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=-m}^{m} |f[n]|^2 \leq C^2 < \infty$$

y resulta que $f[n]$ tiene de energía finita.

Propiedades

$$\boxed{F(e^{j2\pi s}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] e^{-j2\pi sk}}$$

Propiedades de $F(e^{j2\pi s})$:

- Es una función de la variable independiente continua s. O sea, en s es una SVIC.
- Es periódica en s!!! de período 1.
- Entonces tiene una SF: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi sk}$

TFTD inversa

$$F(e^{j2\pi s}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] e^{-j2\pi sk}$$

- Serie de Fourier: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi sk}$

con

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} \sqcap(s)\, F(e^{j2\pi s})\, e^{-j2\pi sk}\, ds =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} F(e^{j2\pi s})\, e^{-j2\pi sk}\, ds$$

por lo que como $f[k] = c_{-k}$,

$$\boxed{f[n] = \int_{-1/2}^{1/2} F(e^{j2\pi s})\, e^{j2\pi sn}\, ds}$$

Ejemplo TFTD - Exponencial

Secuencia bilateral expon. decreciente $x[n] = a^{|n|}$ con $|a| < 1$

$$X(e^{j2\pi s}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi sn} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{|n|} e^{-j2\pi sn} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j2\pi sn} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} a^m e^{j2\pi sm} + \sum_{k=0}^{\infty} a^n e^{-j2\pi sn} = -1 + \sum_{m=0}^{\infty} a^m e^{j2\pi sm} + \sum_{k=0}^{\infty} a^n e^{-j2\pi sn}$$

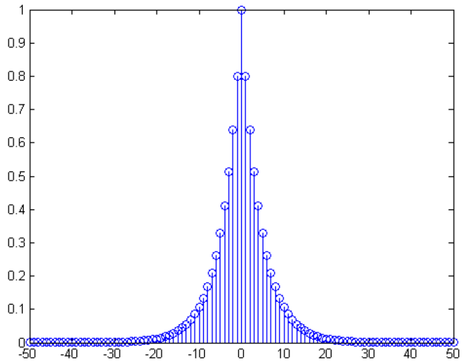
sumando la serie geométrica

$$X(e^{j2\pi s}) = -1 + \frac{1 - \lim_{m\to\infty} a^m e^{-j2\pi sm}}{1 - ae^{j2\pi s}} + \frac{1 - \lim_{m\to\infty} a^m e^{-j2\pi sm}}{1 - ae^{-j2\pi s}} =$$

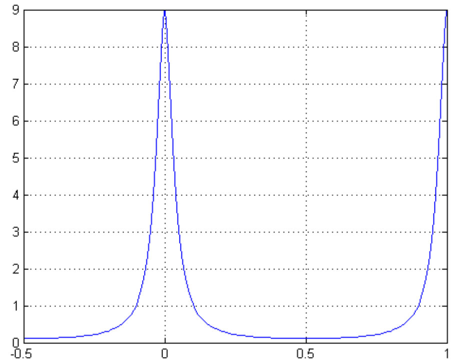
$$= -1 + \frac{1}{1 - ae^{j2\pi s}} + \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi s}} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2 - 2a\cos(2\pi s)}$$

Verificar propiedades. Graficar ($s = 0$, $s = 1/2$)

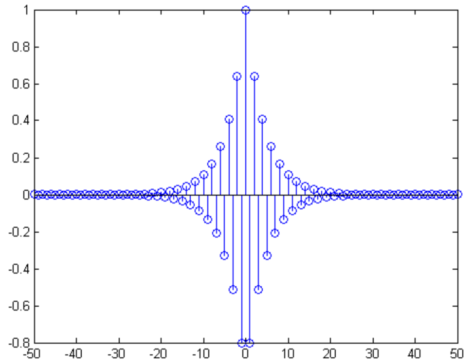
Ejemplo TFTD - Exponencial Gráficos



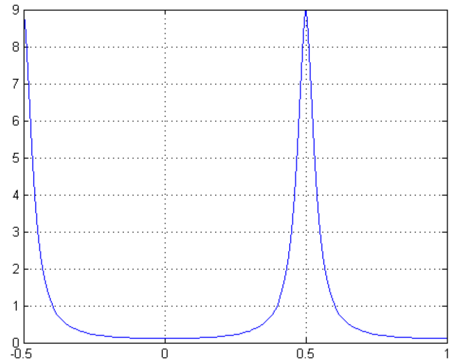
$a = 0{,}8$ Secuencia



$a = 0{,}8$ TFTD



$a = -0{,}8$ Secuencia



$a = -0{,}8$ TFTD

Ejemplo TFTD - Cajón

Cajón con número impar $(2N+1)$ de puntos $x[n] = \text{rect}_N[n]$.

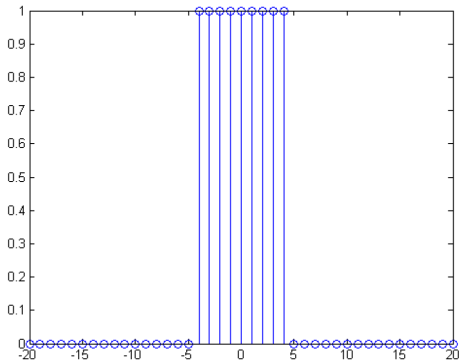
$$X(e^{j2\pi s}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi sn} = \sum_{n=-N}^{N} e^{-j2\pi sn} =$$

$$= \frac{e^{j2\pi sN} - e^{-j2\pi s(N+1)}}{1 - e^{-j2\pi s}} = \frac{e^{-j\pi s}}{e^{-j\pi s}} \frac{e^{j2\pi s(N+1/2)} - e^{-j2\pi s(N+1/2)}}{e^{j\pi s} - e^{-j\pi s}} =$$

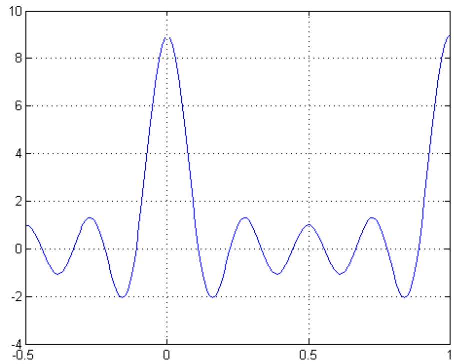
$$= \frac{\text{sen}(2N+1)\pi s}{\text{sen}\,\pi s}$$

Verificar propiedades. Graficar ($s = 0$; notar $s = m/(2N+1)$ y $s = 1/2$)

Ejemplo TFTD - Cajón Gráficos



Secuencia



TFTD

TFTD - Propiedades 0

- SVID:$f[n] \supset_{tftd} F(e^{j2\pi s})$ que es **SVIC**, **periódica**
- $f[k] = p[k] + n[k] = p_R + jp_I + n_R + jn_I$;
- $F(e^{j2\pi s}) = P(e^{j2\pi s}) + N(e^{j2\pi s}) = P_R + jP_I + N_R + jN_I$
- Simetrías: como en TF, parte par transforma en parte par; parte impar transforma en parte impar. Y además,

$$
\begin{array}{lccccccc}
f = & p_R & + & jp_I & + & n_R & + & jn_I \\
 & \mathcal{F} \downarrow\uparrow \mathcal{F}^{-1} & & \mathcal{F} \downarrow\uparrow \mathcal{F}^{-1} & & \mathcal{F} \downarrow\uparrow \mathcal{F}^{-1} & & \mathcal{F} \downarrow\uparrow \mathcal{F}^{-1} \\
F = & P_R & + & jP_I & + & jN_I & + & N_R
\end{array}
$$

Más aún, las “tradicionales”

$$f^*[n] \supset_{tftd} F^*(e^{-j2\pi s})$$

$$f[-n] \supset_{tftd} F(e^{-j2\pi s})$$

TFTD - Propiedades 1

- Linealidad
- Desplazamiento

$$f[n-d] \supset_{tftd} e^{-j2\pi sd} F(e^{j2\pi s}) \quad d \in \mathbb{Z}$$

$$\text{pero} \quad e^{j2\pi nd} f[n] \supset_{tftd} F(e^{j2\pi(s-d)}) \quad d \in \mathbb{R}$$

Notar el desplazamiento *circular*.

Demostraciones.
Linealidad? Aburrido y fácil, queda para Uds.

TFTD - Desplazamiento circular

- Sea $d \in \mathbb{Z}$. Pensemos una nueva SVID $g[n] = f[n-d]$

$$g[n] = \int_{-1/2}^{1/2} G(e^{j2\pi s})\, e^{j2\pi sn}\, ds = f[n-d] =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} F(e^{j2\pi s})\, e^{j2\pi s(n-d)}\, ds = \int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{\left\{ F(e^{j2\pi s}) e^{j2\pi sd} \right\}}_{G(e^{j2\pi s})} e^{j2\pi sn}\, ds \quad \blacksquare$$

- Sea $g \supset_{tftd} G$ y $h \supset_{tftd} H$, con $G(e^{j2\pi(s-d)}) = H(e^{j2\pi s})$ y $d \in \mathbb{R}$

$$h[n] = \int_{-1/2}^{1/2} H(e^{j2\pi s})\, e^{j2\pi sn}\, ds = \int_{-1/2}^{1/2} G(e^{j2\pi(s-d)})\, e^{j2\pi sn}\, ds =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} G(e^{j2\pi\lambda})\, e^{j2\pi(\lambda+d)n}\, d\lambda = e^{j2\pi dn} \underbrace{\int_{-1/2}^{1/2} G(e^{j2\pi s})\, e^{j2\pi sn}\, ds}_{g[n]} \quad \blacksquare$$

TFTD - Ecuaciones en diferencias

Usando la Propiedad de Desplazamiento y Linealidad, el SLID

$$\sum_{i=0}^{p} a_i y[n-i] = \sum_{k=0}^{q} b_k x[n-k] \quad \Longrightarrow$$

(*con condiciones iniciales nulas*) transforma en

$$Y(e^{j2\pi s}) \sum_{i=0}^{p} a_i e^{-j2\pi si} = X(e^{j2\pi s}) \sum_{k=0}^{q} b_k e^{-j2\pi sk}$$

lo que lleva a la importantísima (para los s en que $X(e^{j2\pi s}) \neq 0$)

$$\boxed{\frac{Y(e^{j2\pi s})}{X(e^{j2\pi s})} = \frac{\sum_{k=0}^{q} b_k e^{-j2\pi sk}}{\sum_{i=0}^{p} a_i e^{-j2\pi si}} = \frac{b_0 + b_1 e^{-j2\pi s} + \ldots + b_q e^{-j2\pi qs}}{a_0 + a_1 e^{-j2\pi s} + \ldots + a_p e^{-j2\pi ps}}}$$

Respuesta en frecuencia: $H(e^{j2\pi s}) = Y(e^{j2\pi s})/X(e^{j2\pi s})$

TFTD - Propiedades 2

- Reflexión $f[-n] \supset F(e^{-j2\pi s})$
- Similaridad - ¿Hay algo como el cambio de escala en SVIC? **NO!**.
  Pero alterando la SVID original

$$f_a[n] = \begin{cases} f[m] & \forall n = ma \quad m \in \mathbb{Z} \\ 0 & n \text{ no múltiplos de } a \in \mathbb{N} \end{cases}$$

  permite decir

$$F_a(e^{j2\pi s}) = F(e^{j2\pi as}) \quad a \in \mathbb{N}$$

  Estirar la secuencia ($a > 1$, rellenando con ceros), comprime en frecuencia.

TFTD - Propiedades 3

- Diferenciación
$$nf[n] \supset_{tftd} \frac{j}{2\pi}\frac{dF(e^{j2\pi s})}{ds} \qquad \text{Ojo! con esta derivada}$$
- Integración Término a término. Para $f[n]$ tales que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f[n]}{n} = K$ y $f[0] = 0$
$$\frac{f[n]}{n} \supset_{tftd} j2\pi \int_0^s F(e^{j2\pi\xi})d\xi + K \qquad n \neq 0$$
- Diferencia Simple
$$f[n] - f[n-1] \supset_{tftd} \left(1 - e^{-j2\pi s}\right) F(e^{j2\pi s})$$
- Suma y Suma Parcial Note que $F(e^{j2\pi 0}) = \sum f[m]$. Sea $g[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} f[m]$; usando que $g[n] - g[n-1] = f[n]$
$$g[n] \supset_{tftd} G(e^{j2\pi s}) = \frac{F(e^{j2\pi s})}{1 - e^{-j2\pi s}}$$
con $f[n]$ abs. sumable. ¿Y si $f[n]$ tiene “valor medio” $\neq 0$?

Pares especiales 1

- Como $g[n] = \int_{-1/2}^{1/2} G(e^{j2\pi s})e^{j2\pi ns}\, ds$, si $G(e^{j2\pi s}) = \delta(s)$; $s = 0 \in (-1/2, 1/2)$, entonces $g[n] = 1\ \forall n$ y luego se tiene el par
$$g[n] = 1 \supset_{tftd} G(e^{j2\pi s}) = \text{Ш}(s)$$
- De manera similar, para $f \in \mathbb{R}$
$$e^{j2\pi fn} \supset_{tftd} \text{Ш}(s - f)$$
Nota 1: $\text{TFTD}\{e^{j2\pi fn}\}(e^{j2\pi s}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(s-f)n}$ que no converge! Pero usando la *fórmula de Pascal*...
Nota 2: f indistinguible de $f \pm 1$ o de $f \pm m$ para $m \in \mathbb{Z}$
- Secuencia coseno por linealidad
$$\cos(2\pi fn) \supset_{tftd} \frac{1}{2}(\text{Ш}(s+f) + \text{Ш}(s-f))$$
- Secuencia seno
$$\text{sen}(2\pi fn) \supset_{tftd} \frac{j}{2}(\text{Ш}(s+f) - \text{Ш}(s-f))$$

Ejemplo: Signo y Escalón

- Secuencia signo señal sin media...

$$\mathrm{sgn}[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ -1 & n < 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{sgn}[n] - \mathrm{sgn}[n-1] = 2\delta[n]$$

$$\mathrm{SGN}(e^{j2\pi s}) - e^{-j2\pi s}\mathrm{SGN}(e^{j2\pi s}) = 2$$

entonces

$$\mathrm{SGN}(e^{j2\pi s}) = \frac{2}{1 - e^{-j2\pi s}}$$

- Secuencia escalón señal con media. Si usa la fórmula de Diferencias Simples pierde -se cancela- la media.
  Usar $u[n] = (1/2)(1 + \mathrm{sgn}[n])$ y

$$U(e^{j2\pi s}) = \frac{1}{2}\ \text{Ш}(s) + \frac{1}{1 - e^{-j2\pi s}}$$

Convolución

Si $f \supset_{tftd} F$ y $g \supset_{tftd} G$

$$\{f * g\}[n] \ \supset_{tftd}\ F(e^{j2\pi s})G(e^{j2\pi s})$$

Dem:

$$\{f{*}g\}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n{-}k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-1/2}^{1/2} F(e^{j2\pi s})e^{j2\pi ks}\,ds \right\} g[n{-}k] =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} F(e^{j2\pi s}) \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[n-k]e^{-j2\pi(n-k)s} \right\} e^{j2\pi ns} ds =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} F(e^{j2\pi s})G(e^{j2\pi s})e^{j2\pi ns} ds = \mathrm{TFTD}^{-1}\{F(e^{j2\pi s})G(e^{j2\pi s})\} \quad \blacksquare$$

- En SLID, con entrada exponencial imaginaria de frecuencia f:

$$Y(e^{j2\pi s}) = H(e^{j2\pi s})\ \text{Ш}(s - f)$$

Correlación de SVID determinísticas

Si $f \supset_{tftd} F$ y $g \supset_{tftd} G$

$$\{f \star g\}[n] \;\supset_{tftd}\; F(e^{j2\pi s})G^*(e^{j2\pi s})$$

Dem:

$$\gamma_{fg}[n] = \{f \star g\}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k+n]g^*[k] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-1/2}^{1/2} F(e^{j2\pi s})e^{j2\pi(n+k)s}\,ds \right\} g^*[k] =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} F(e^{j2\pi s}) \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} g^*[k]e^{j2\pi ks} \right\} e^{j2\pi ns} ds =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} F(e^{j2\pi s})G^*(e^{j2\pi s})e^{j2\pi ns} ds = \mathrm{TFTD}^{-1}\{F(e^{j2\pi s})G^*(e^{j2\pi s})\} \quad \blacksquare$$

Teorema de Rayleigh

La intercorrelación cumplía

$$\gamma_{fg}[n] = \{f \star g\}[n] = \int_{-1/2}^{1/2} F(e^{j2\pi s})G^*(e^{j2\pi s})e^{j2\pi ns} ds$$

Evaluando en $n = 0$,

$$\gamma_{fg}[0] = \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g^*[k] = \int_{-1/2}^{1/2} F(e^{j2\pi s})G^*(e^{j2\pi s}) ds}$$

el teorema de Rayleigh.

Parseval - Energía

Relación de Parseval para SVID

Es el T. de Rayleigh especializado para $g \equiv f$,

$$\gamma_f[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]f^*[k] = \int_{-1/2}^{1/2} F(e^{j2\pi s})F^*(e^{j2\pi s})ds$$

y entonces,

$$\gamma_{ff}[0] = \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f[k]|^2 = \mathcal{E}_f = \int_{-1/2}^{1/2} \left|F(e^{j2\pi s})\right|^2 ds}$$

Idea de $\left|F(e^{j2\pi s})\right|^2$ como densidad espectral de energía.

Clases que vienen

- Análisis frecuencial para SVID periódicas
- Análisis de Fourier de procesos estocásticos (SVIC y SVID)