Repaso de Probabilidades

Material Adicional TP0 SyS

Cátedra de Señales y Sistemas
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de La Plata

Javier García - 2010

Contenido

Experimento Aleatorio

Definición

Un **experimento aleatorio** es aquel que, bajo el mismo conjunto aparente de condiciones iniciales, puede presentar resultados diferentes. Es decir, no se puede predecir el resultado exacto de cada experiencia particular.
Ejemplos: Lanzamiento de un dado, de una moneda, etc.

Propiedades

Un experimento se dice aleatorio si verifica las siguientes condiciones:

- Es posible conocer previamente todos los posibles resultados.
- Es imposible predecir el resultado exacto del mismo antes de realizarlo.

Definiciones

Las probabilidades utiliza conceptos de la teoría de conjuntos.
Dado un experimento aleatorio:

- Un conj. de salidas posibles, $\mathcal{A}$: *Evento*
- Conj. de todas las salidas posibles, Ω: *Evento seguro*
- Conjunto vacío, $\emptyset$: *Evento nulo*
- Las salidas son elementos de los eventos: $\zeta \in \Omega$
- Los eventos son subconjuntos de Ω: $\mathcal{A} \subset \Omega$
- Utilizando operaciones de conjuntos: Nuevos eventos
    - Unión: $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$
    - Intersección: $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{A}\mathcal{B}$
    - Complemento: $\bar{A}$

Repaso de teoría de conjuntos

Propiedades de la unión:

- $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \mathcal{A}$
- $\mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cup \mathcal{C}$

Propiedades de la intersección:

- $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$
- $\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap \mathcal{C}$
- $\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{C})$

Leyes de De Morgan:

- $\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} = \bar{\mathcal{A}} \cap \bar{\mathcal{B}}$
- $\overline{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}} = \bar{\mathcal{A}} \cup \bar{\mathcal{B}}$

Axiomas de Probabilidad

Le asignamos a cada evento $\mathcal{A}$ un número $P\{\mathcal{A}\}$:

Probabilidad del evento $\mathcal{A}$

1. $P\{\mathcal{A}\} \geq 0$
2. $P\{\Omega\} = 1$
3. Si $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ entonces $P\{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}\} = P\{\mathcal{A}\} + P\{\mathcal{B}\}$

Propiedades:

- $P\{\emptyset\} = 0$
- $P\{\bar{\mathcal{A}}\} = 1 - P\{\mathcal{A}\}$
- $P\{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}\} = P\{\mathcal{A}\} + P\{\mathcal{B}\} - P\{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}\}$

Tres enfoques a la Probabilidad

- Clásico: $P\{\mathcal{A}\}$ se determina *a priori* sin experimentación:

$$P\{\mathcal{A}\} = \frac{N_{\mathcal{A}}}{N}$$

- Frecuencia Relativa: $P\{\mathcal{A}\}$ mediante experimentación:

$$P\{\mathcal{A}\} = \lim_{n\to\infty} \frac{n_{\mathcal{A}}}{n}$$

- Axiomático (Kolmogoroff, 1933): Se enfoca en el carácter deductivo del modelo probabilístico. $P\{\mathcal{A}\}$ se determina por hipótesis y/o experimentación.

Eventos de interés

No le asignamos probabilidad a todos los posibles subconjuntos de Ω.

Algebra, $\mathfrak{F}$

Dados los eventos $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{F}$

- Si $\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$ entonces $\overline{\mathcal{A}} \in \mathfrak{F}$
- Si $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{F}$ entonces $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \in \mathfrak{F}$

Sigma-Algebra (Borel), $\mathfrak{B}$

- Se permiten uniones e intersecciones infinitas
- Se extiende el tercer axioma a unión infinitas
- Si Ω es contable $\mathfrak{B}$ son todos los subconjuntos posibles

Un experimento aleatorio

De acuerdo a la definición axiomática un experimento aleatorio queda especificado en términos de:

Espacio de Probabilidad, $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathrm{P})$

1. El conjunto de todas las salidas posibles: Ω
2. El conjunto de todos los eventos de interés: $\mathfrak{B}$
3. La ley de asignación de probabilidades: P

Ejemplo: Ruleta Discreta vs. Ruleta Continua

Definición de Probabilidad Condicional

Dado $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathrm{P})$ y un evento $\mathcal{B}$ con $P\{\mathcal{B}\} \neq 0$, la *probabilidad de* $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}$ *dado* $\mathcal{B}$ es

$$P\{\mathcal{A}|\mathcal{B}\} = \frac{P\{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}\}}{P\{\mathcal{B}\}}$$

Propiedades:

- $P\{\cdot|\mathcal{B}\}$ cumple los axiomas!
- Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ entonces $P\{\mathcal{A}|\mathcal{B}\} = 1$
- Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ entonces $P\{\mathcal{A}|\mathcal{B}\} > P\{\mathcal{A}\}$
- Si $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ entonces $P\{\mathcal{A}|\mathcal{B}\} = 0$

Dos teoremas útiles

Si $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, ..., \mathcal{A}_n\}$ es una *partición* de Ω, y $B \in \mathfrak{B}$:

Teorema de la Probabilidad Total

$$P\{\mathcal{B}\} = P\{\mathcal{B}|\mathcal{A}_1\}P\{\mathcal{A}_1\} + \ldots + P\{\mathcal{B}|\mathcal{A}_n\}P\{\mathcal{A}_n\}$$

Teorema de Bayes

$$P\{\mathcal{A}_i|\mathcal{B}\} = \frac{P\{\mathcal{B}|\mathcal{A}_i\}P\{\mathcal{A}_i\}}{P\{\mathcal{B}\}}$$

Ejemplo: Canal Simétrico Binario

Independencia

Dos eventos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son independientes si

$$P\{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}\} = P\{\mathcal{A}\}P\{\mathcal{B}\}$$

Propiedades:

- Si $P\{\mathcal{B}\} \neq 0$ entonces $P\{\mathcal{A}|\mathcal{B}\} = P\{\mathcal{A}\}$
- Si $P\{\mathcal{A}\} \neq 0$ entonces $P\{\mathcal{B}|\mathcal{A}\} = P\{\mathcal{B}\}$
- Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son independientes, entonces $\bar{\mathcal{A}}$ y $\bar{\mathcal{B}}$ también.

Para tres eventos $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$:

- $P\{\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j\} = P\{\mathcal{A}_i\}P\{\mathcal{A}_j\}$ para $i \neq j$
- $P\{\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3\} = P\{\mathcal{A}_1\}P\{\mathcal{A}_2\}P\{\mathcal{A}_3\}$

Experimentos combinados

Dados $(\Omega_1, \mathfrak{B}_1, \mathrm{P}_1)$ y $(\Omega_2, \mathfrak{B}_2, \mathrm{P}_2)$, formamos el nuevo experimento con $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$:

- Los eventos tienen forma $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, con $\mathcal{A}_i \subset \Omega_i$
- El conjunto de eventos de interés es $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$
- $P\{\mathcal{A}_1 \times \Omega_2\} = P_1\{\mathcal{A}_1\}$ y $P\{\Omega_1 \times \mathcal{A}_2\} = P_2\{\mathcal{A}_2\}$
- $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = (\mathcal{A}_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times \mathcal{A}_2)$

Pero $P\{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\}$ requiere información adicional!!!
Si los experimentos son independientes:

$$P\{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\} = P\{\mathcal{A}_1 \times \Omega_2\} P\{\Omega_1 \times \mathcal{A}_2\} = P_1\{\mathcal{A}_1\} P_2\{\mathcal{A}_2\}$$

Resumen

- Utilidad de los modelos probabilisticos.
- Un espacio de probabilidad es: $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathrm{P})$.
- Probabilidad condicional $\Leftrightarrow$ Dependencia.