Transformada de Fourier del peine

Material Adicional TP4 SyS

Javier Smidt
IPS

Una señal periódica particular: El peine

Habíamos definido a la función peine como

$$ш(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - i)$$

Es simple ver que es una función periódica de período $T = 1$.
Aunque no cumple las condiciones de Dirichlet, podemos intentar representarla en serie de Fourier.
Para ello, calculamos los coeficientes:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi kt/T} dt = \int_0^1 \delta(t) e^{-j2\pi kt/T} dt = 1$$

La serie de Fourier del peine

Por lo tanto, tenemos que

$$\text{Ш}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kt/T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi kt}$$

Notemos que la última suma no converge en el sentido usual. Hemos "descubierto" una nueva igualdad en sentido distribucional

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t-i) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi kt}$$

igualdad conocida como de Poisson (o de Pascal).

La transformada de Fourier del peine

Usando los resultados anteriores, podemos calcular fácilmente la transformada de Fourier del peine

$$TF\{ \text{Ш}(t)\} = TF\left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t-i) \right\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} TF\{\delta(t-i)\}$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi if} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f-k)$$

donde en el último paso usamos la igualdad de Poisson.
O sea, mostramos que

$$\text{Ш}(t) \supset \text{Ш}(f)$$