SEÑALES Y SISTEMAS - AÑO 2020

Ejercicios de Repaso de Probabilidades

1. **Recordando algunas distribuciones continuas**

   a) Sea X una V.A. que toma valores en el intervalo $[a, b]$ y tal que la probabilidad de todos los intervalos de la misma longitud dentro de $[a, b]$ es la misma. La distribución de esta V.A. se denomina Uniforme. Escriba una expresión para la densidad de probabilidad de la distribución Uniforme en el intervalo $[a, b]$, $f_X(x)$.

   - Calcule la media y la varianza de X.
   - Escriba un script en Matlab o similar (por ej., Octave) para graficar la densidad de probabilidad de una V.A. distribuída uniformemente entre -1 y 3. Si no recuerda cómo hacer esto, puede consultar los apuntes de introducción a Matlab disponibles en la web de la cátedra, en la sección Documentos.

   b) Sea Z una V.A. con distribución gaussiana de media μ y varianza σ^2. Escriba la expresión para la densidad de probabilidad de Z, $f_Z(z)$, y convénzase de que sólo son necesarios dos parámetros (la media y la varianza) para definir toda la distribución.

   - ¿Qué porcentaje de la distribución se encuentra a $\pm\sigma$ de la media? ¿Y a $\pm 2\sigma$?
   - ¿Cuáles son la media y la varianza de la V.A. $T = aZ + b$?
   - Usando el hecho de que el área de la función de densidad gaussiana es 1, calcule el valor de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$.
   - Escriba un script en Matlab o similar para graficar la densidad de probabilidad de una V.A. gaussiana de media 2 y varianza 4.

2. **Recordando algunas distribuciones discretas**

   a) Sea W una V.A. que toma el valor 0 con probabilidad q y el valor 1 con probabilidad p. La distribución de esta V.A. se denomina distribución de Bernoulli. Escriba la expresión para la distribución de Bernoulli ($\mathrm{P}\{W = k\}$). Halle la relación entre p y q. Calcule la media y la varianza de W.

   b) Sea X una V.A. que cuenta el número de veces k que ocurre un suceso de probabilidad p al repetir N veces un experimento en forma independiente. La distribución de esta V.A. se denomina distribución Binomial. Escriba la expresión de la distribución Binomial ($\mathrm{P}\{X = k\}$). Calcule la media y la varianza de X.

   c) Sea Y una V.A. que cuenta el número de veces que debo repetir un experimento en forma independiente hasta que ocurra por primera vez un suceso de probabilidad p. La distribución de esta V.A. se denomina distribución Geométrica. Escriba la expresión de la distribución Geométrica ($\mathrm{P}\{Y = k\}$). Calcule la media y la varianza de Y.

3. **Esperanza**

   a) Explique cualitativamente qué es la esperanza de una V.A.

   b) Dé la expresión matemática para calcularla, para el caso de variables continuas y para el de variables discretas.

   c) Demuestre que para cualquier V.A. X y números $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathrm{E}\{aX + b\} = a\mathrm{E}\{X\} + b$.

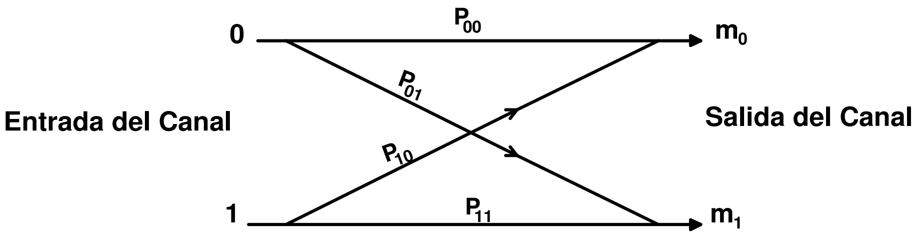
   d) Sea Z una V.A. con distribución exponencial con parámetro $\alpha > 0$:

   $$f_Z(z) = \alpha e^{-\alpha z} u(z)$$

   1) Calcule la esperanza de Z.

2) Sea la función $g(x) = 2\cos(\beta x)$. Calcule $\mathrm{E}\{g(Z)\}$ y compare el resultado con $g(\mathrm{E}\{Z\})$. Este ejemplo debería convencerlo de que, en general, $\mathrm{E}\{g(Z)\} \neq g(\mathrm{E}\{Z\})$

4. Se tiene un canal binario (un canal binario es un medio por el que se transmiten dos símbolos distintos: 0 y 1). Una manera de caracterizar dicho canal es la siguiente:



donde p_{ij} es la probabilidad de recibir el símbolo j habiéndose transmitido el símbolo i.

a) ¿Cuál es la probabilidad de recibir m_0? ¿y m_1?

b) ¿Cuál es la probabilidad de error?

Tome $p_{00} = 0{,}999$, $p_{01} = 0{,}001$, $p_{10} = 0{,}002$ y $p_{11} = 0{,}998$, y suponga los símbolos "0" y "1" equiprobables y mutuamente excluyentes.

Si se envía un paquete de 80 bits a través del canal,

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no ocurra ningún error? ¿Es aceptable?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que el último bit sea erróneo?

Algunos resultados

4. *a*) $P\{m_0\} = 0{,}5005$, $P\{m_1\} = 0{,}4995$ *b*) $P_e = 0{,}0015$ *c*) 0.8868 *d*) 0.00133