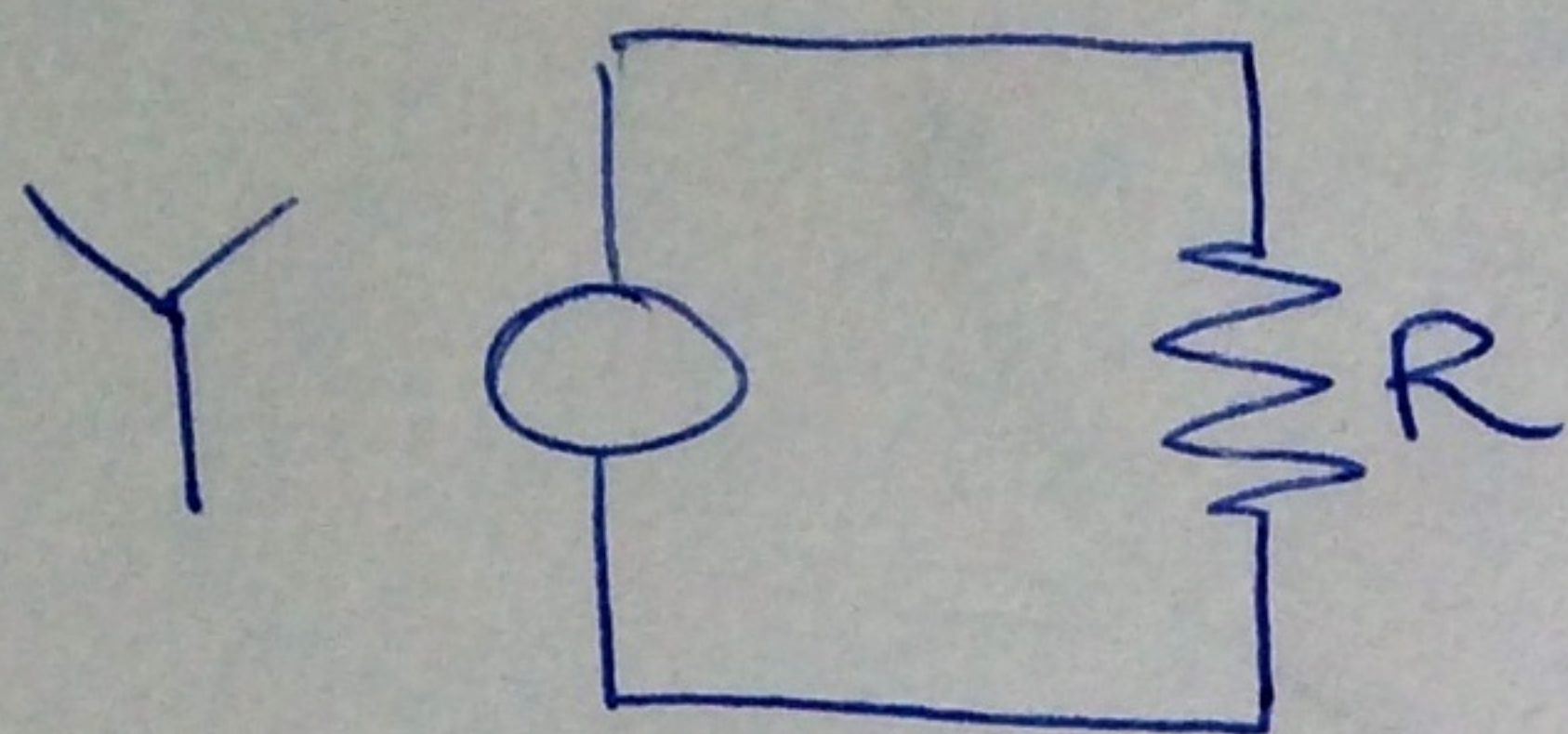
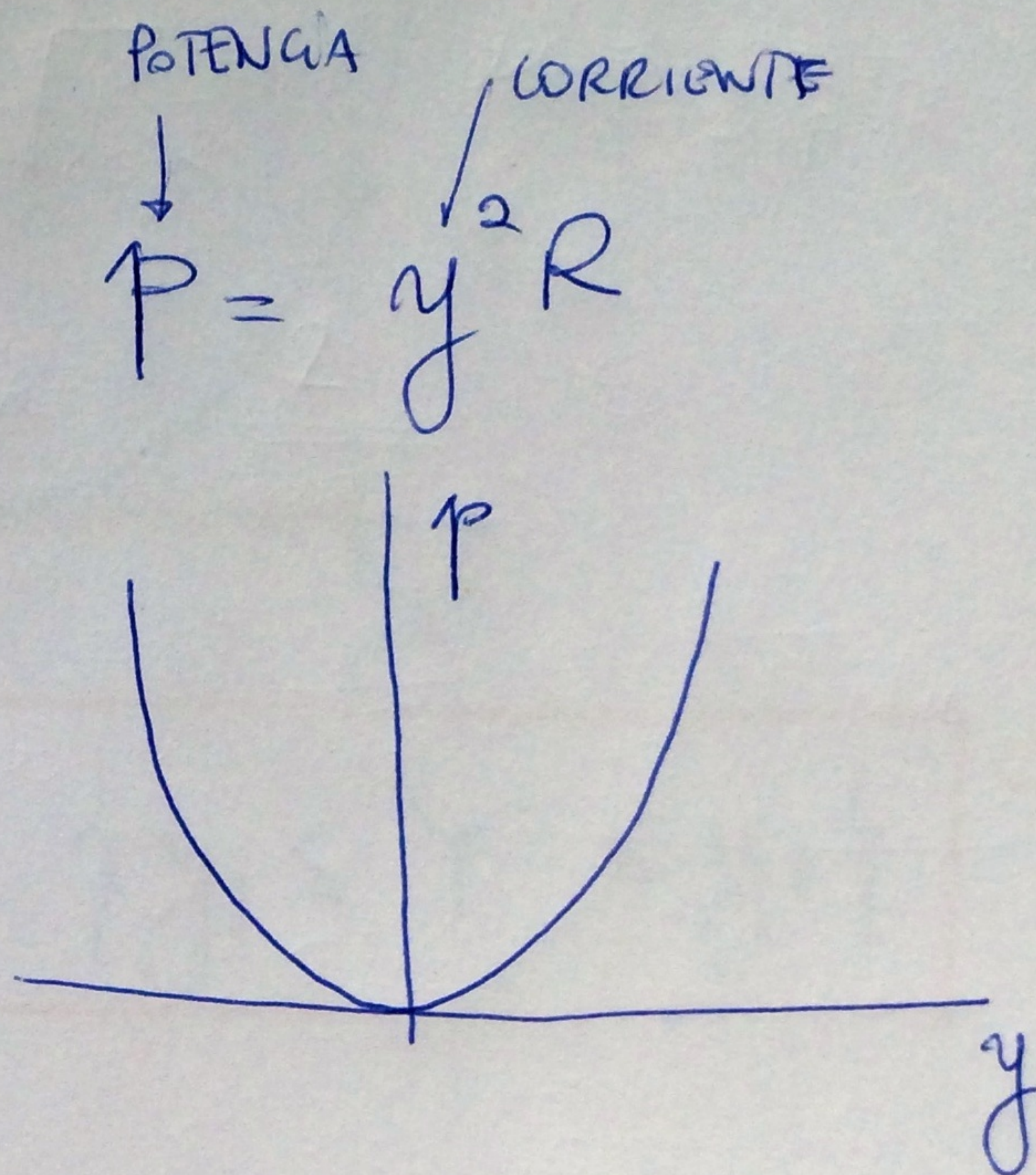


EJERCICIO 6C

$$Y \sim N(0, \sigma^2)$$



RELACION ENTRE
 p Y y

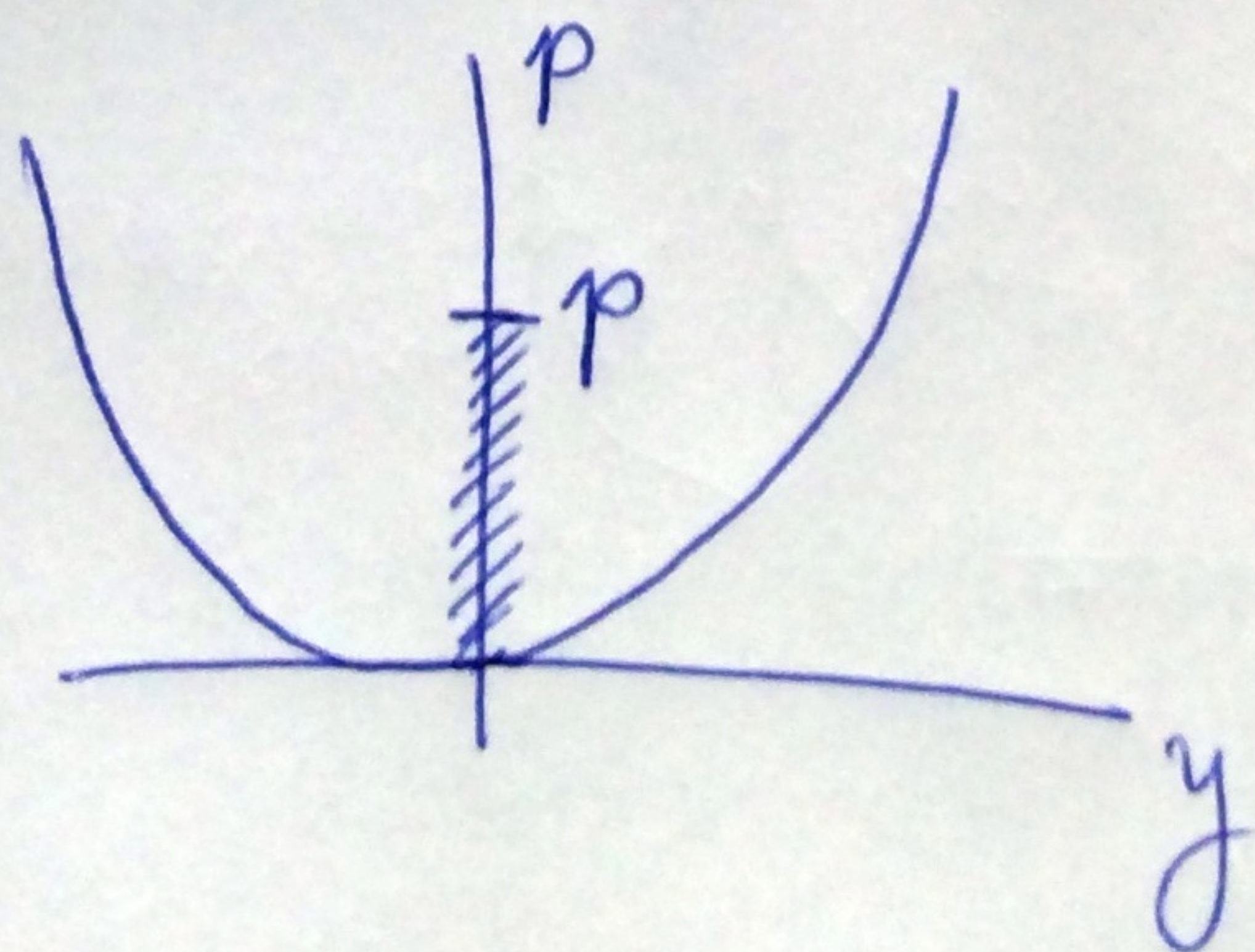


- LA IDEA ES CALCULAR LA DENSIDAD DE PROBABILIDAD ACUMULADA DE LA POTENCIA $F_p(p)$ Y EN BASE A ELLA, AL DERIVAR, OBTENER LA DENSIDAD DE PROBABILIDAD $f_p(p)$.

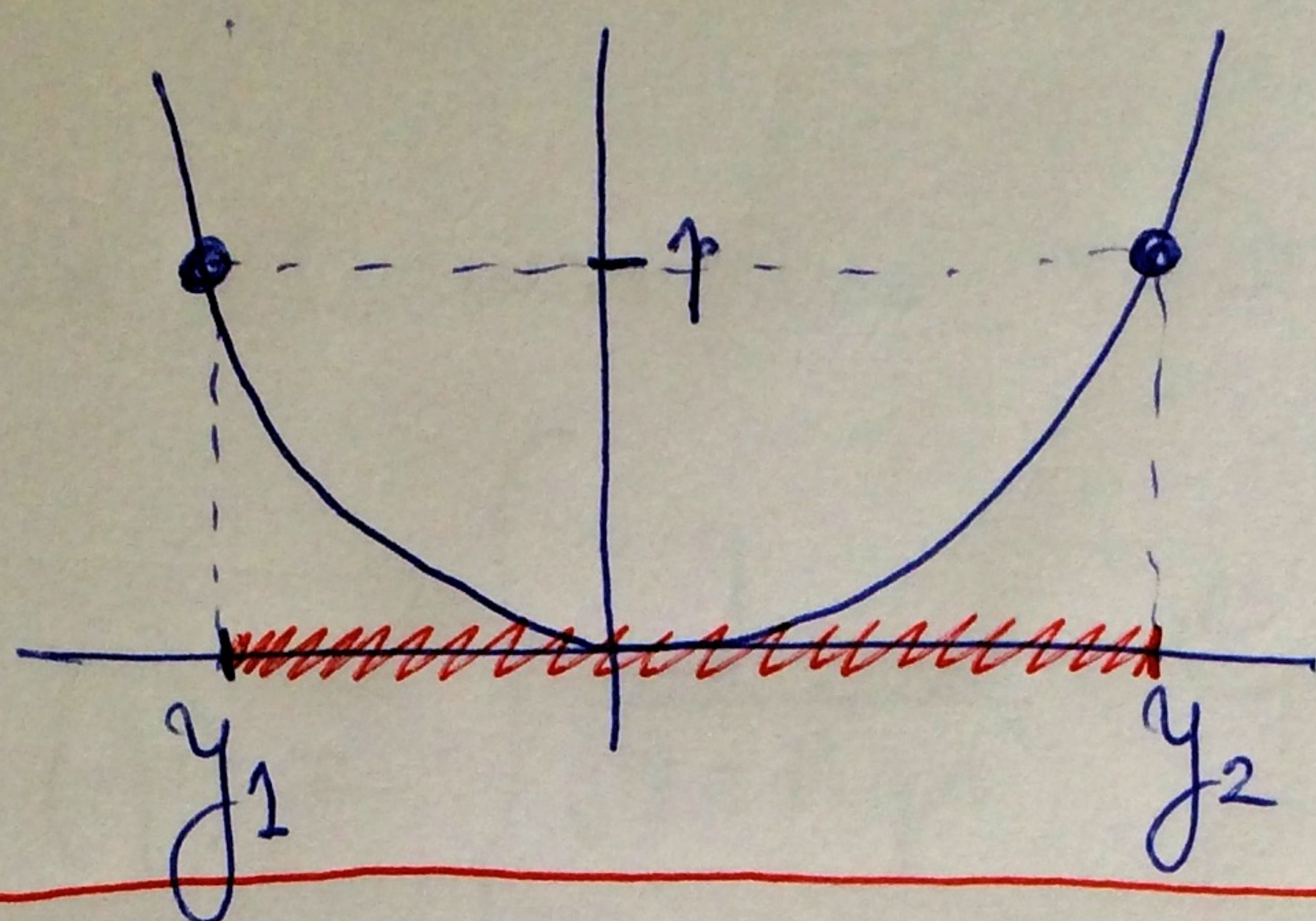
POR DEFINICION,

$$F_p(p) = P\{P < p\}$$

QUE EQUIVALE A QUE LA POTENCIA ESTE EN EL SIGUIENTE SEGMENTO



PERO PARA QUE PAIB ESO LA CORRIENTE
ENTONCES DEBE ESTAR EN



$$\{p < p\} \equiv \{y_1 \leq Y \leq y_2\} \quad \text{CLAVE!}$$

ENTONCES

$$P\{p < p\} = P\{y_1 \leq Y \leq y_2\}$$

$$= P\{Y \leq y_2\} - P\{Y \leq y_1\}$$

$$F_p(p) = F_Y\{y_2\} - F_Y\{y_1\}$$

COMO QUEREMOS TODO EN FUNCION DE p
USAMOS LA FUNCION INVERSA DE $y^2 R = p \Rightarrow y = \pm \sqrt{p/R}$

$$y_1 = -\sqrt{p/R} \quad y_2 = +\sqrt{p/R}$$

$$F_p(p) = F_Y\left\{\sqrt{p/R}\right\} - F_Y\left\{-\sqrt{p/R}\right\}$$

Y AHORA DERIVAMOS CON RESPECTO A p
USANDO LA REGLA DE LA CADENA

$$f_p(p) = f_Y\left(\sqrt{\frac{p}{R}}\right) \frac{1}{2\sqrt{pR}} + f_Y\left(-\sqrt{\frac{p}{R}}\right) \frac{1}{2\sqrt{pR}}$$

con $p \neq 0$

ENTONCES, SABEMOS QUE Y ES GAUSSIANA,

$$f_p(p) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi R p \sigma^2}} e^{-\frac{p}{2\sigma^2 R}} & p > 0 \\ 0 & p \leq 0 \end{cases}$$

• $E\{Y^2 R\} = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 R \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$

$= R \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$

$= R \sigma^2$

USANDO $E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx$

SI NO QUEREMOS HACERLO ASÍ, PODEMOS USAR LA DENSIDAD DE LA POTENCIA, PERO ES MÁS LARGO, MENOS EFICIENTE

$$\begin{aligned}
 E\{P\} &= \int_0^{\infty} p \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} R p \sigma^2} e^{-\frac{p}{2\sigma^2 R}} dp \\
 &= \int_0^{\infty} u^2 R \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi} \sigma^2} \cdot e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du \\
 &= R \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma^2} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du}_{\sigma^2} \\
 &= R \sigma^2
 \end{aligned}$$

EJERCICIO 8

TENEMOS UNA DISTRIBUCIÓN UNIFORME Y SU VARIABLE ALEATORIA U . A PARTIR DE ELLA QUEREMOS OBTENER OTRA VARIABLE ALEATORIA X CON OTRA DISTRIBUCIÓN $f_X(x)$. O SEA QUE QUEREMOS UNA TRANSFORMACIÓN QUE RELACIONE A ESTAS VARIABLES $X = g(U)$.

PROPONEMOS LA SIGUIENTE ~~transformación~~, PERO COMO TODAVÍA NO SABEMOS SI DE ESTA MANERA OBTENEMOS X , LLAMEMOSLA Y Y VEAMOS QUE DISTRIBUCIÓN OBTENEMOS

$$Y = F_X^{-1}(U)$$

LA TRANSFORMACION ES LA INVERSA DE LA FUNCION DE DISTRIBUCION ACUMULADA QUE QUERAMOS OBTENER

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt.$$

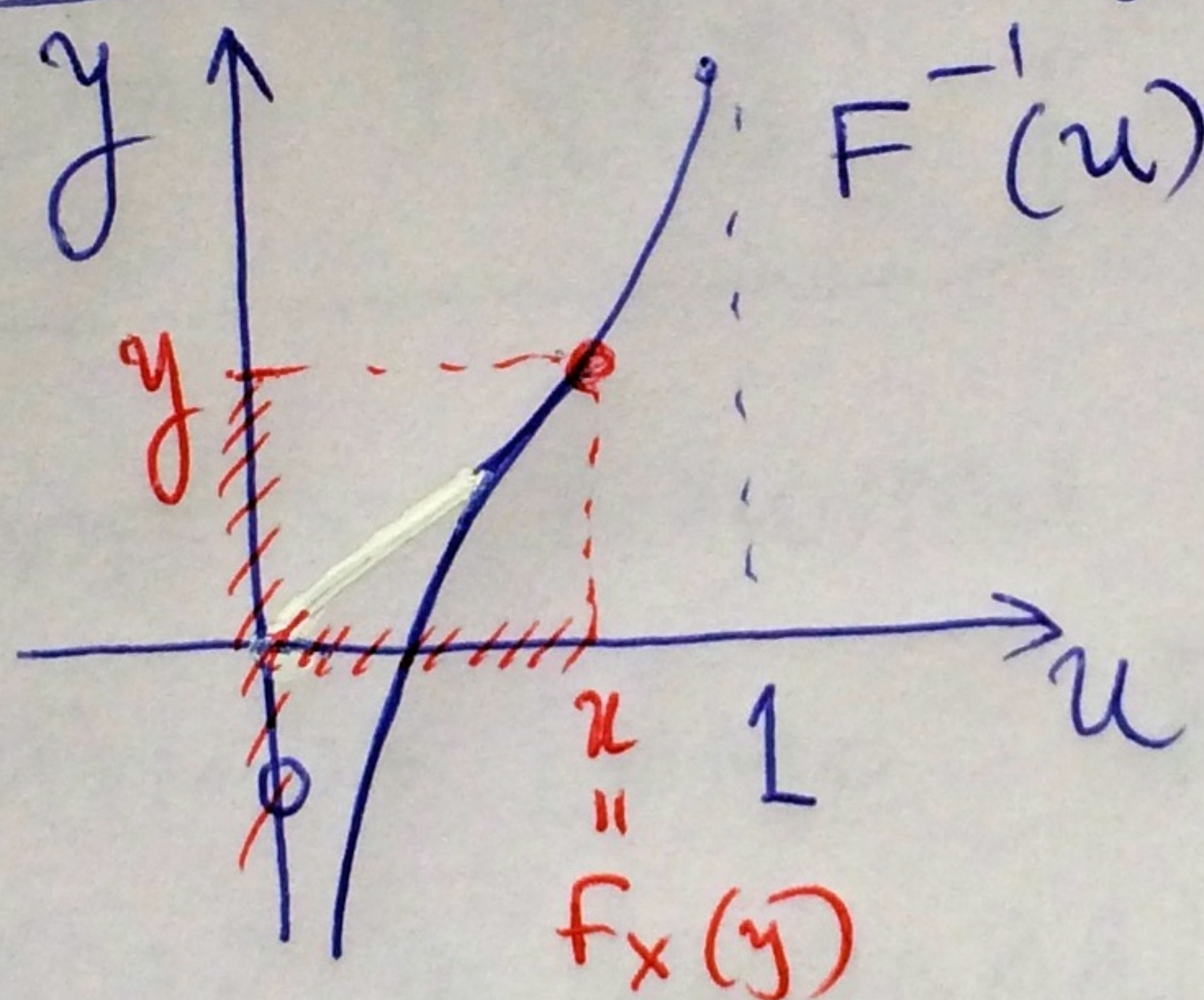
Y COMO F_X ES CRECIENTE > 0 CONTINUA.

$\Rightarrow \exists F_X^{-1}$ CONTINUA Y CRECIENTE.

Y NUESTRAS VARIABLES SE RELACIONAN.

$$u = F_X(y)$$

$$y = F_X^{-1}(u)$$



ENTONCES TENDREMOS LA DISTRIBUCION DE Y

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\}$$

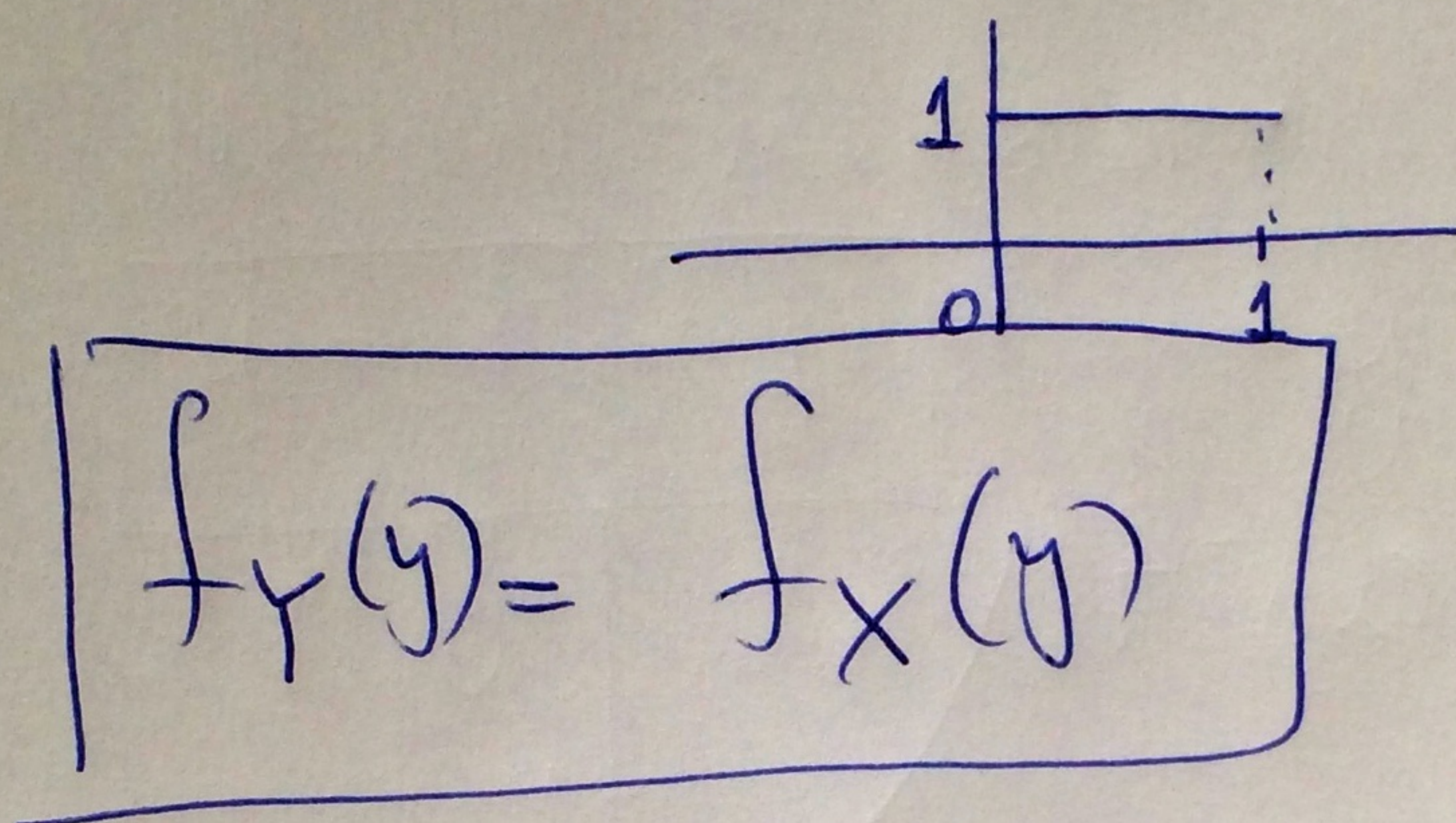
$$= P\{0 \leq U \leq u\}$$

$$= F_U(u) =$$

$$= F_U(F_X(y))$$

DERIVAMOS CON RESPECTO A y Y CON LA
REGLA DE LA CADENA,

$$f_Y(y) = \underbrace{f_U(F_X(y))}_{\text{DISTRIBUCIÓN UNIFORME} = 1} \cdot \underbrace{F'_X(y)}_{f_X(y)}$$



ACABAMOS DE DEMOSTRAR ENTONCES QUE LA
V.A. DEFINIDA COMO $F_X^{-1}(u)$ TIENE
LA DENSIDAD DE PROBABILIDAD $f_X(x)$.

EJEMPLO Si queremos $f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} u(x)$

HALLAMOS LA ANTI-derivada

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{t}{\sigma^2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = \underbrace{1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}_u$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \sqrt{-2\sigma^2 \ln(1-u)} \quad 0 \leq u \leq 1}$$

↑
TRANSFORMACIÓN.