EJERCICIO 9

(b)
$$\mathrm{Var}\{Z\} = E\{(Z-\mu_Z)^2\}$$
$$= E\{(aX + (1-a)Y - a\mu_X - (1-a)\mu_Y)^2\}$$
$$= E\{(a(X-\mu_X) + (1-a)(Y-\mu_Y))^2\}$$
$$= a^2 E\{(X-\mu_X)^2\} + 2a(1-a)E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\} + $$
$$+ (1-a)^2 E\{(Y-\mu_Y)^2\}$$

$$\mathrm{Var}\{Z\} = a^2\sigma_X^2 + 2a(1-a)\rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y + (1-a)^2\sigma_Y^2$$

COEFICIENTE DE CORRELACIÓN ES

$$\rho_{XY} = \frac{E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}}{\sigma_X\sigma_Y}$$

PARA MINIMIZARLA DERIVAMOS =0

$$\frac{\partial \mathrm{Var}\{Z\}}{\partial a} = 2a\sigma_X^2 + (2-4a)\rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y - (2-2a)\sigma_Y^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{\sigma_Y^2 - \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_X^2 - 2\rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y + \sigma_Y^2}}$$

ⓒ $E_x = \sum_{0}^{\infty} \underbrace{\left| e^{-j\pi \frac{n}{2}} \right|^2}_{1} = \infty$ DIVERGE

$$P_x = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \underbrace{\sum_{n=0}^{N} \underbrace{\left| e^{-j\pi \frac{n}{2}} \right|^2}_{1}}_{N+1}$$

$$= \lim_{N \to \infty} \frac{N+1}{2N+1} = 1/2$$

ES SEÑAL DE POTENCIA.

ⓓ • PARA SVIC ES POSIBLE QUE SI LOS PERIODOS SON T_x Y T_y, $\frac{T_x}{T_y} \notin \mathbb{Q}$ ENTONCES SERÍA FALSA. PARA DEMOSTRAR QUE ALGO ES FALSO PODEMOS USAR UN <u>CONTRAEJEMPLO</u>.

TOMAMOS $x(t)$ E $y(t)$ TAL QUE

$$g(t) = x(t) + y(t) = \underbrace{\operatorname{sen}(2t)}_{x} + \underbrace{\operatorname{sen}(2\pi t)}_{y}$$

x PERIÓDICA $T_x = \pi$

y " $T_y = 1$

$\frac{T_x}{T_y} = \pi \notin \mathbb{Q} \Rightarrow$ $g(t)$ NO ES PERIÓDICA

- PARA SVID TOMAMOS

x : PERIÓDICA PERIODO $N_x \in \mathbb{N}$

y : " " $N_y \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \frac{N_x}{N_y} \in \mathbb{Q} \Rightarrow g[n] = x[n] + y[n] \text{ ES PERIÓDICA}$$

OPCIONAL

FORMALMENTE: LLAMEMOS m AL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO ENTRE N_x Y N_y. ENTONCES

$$m = m_x N_x \quad \text{PARA } m_x \in \mathbb{N}$$

$$m = m_y N_y \quad \text{" } m_y \in \mathbb{N}$$

ENTONCES COMO x ES PERIÓDICA CON PERIODO N_x

$$x[n] = x[n+N_x] = x[n+2N_x] = \cdots = x[n+m_x N_x]$$

SIMILARMENTE

$$y[n] = y[n + m_y N_y]$$

ENTONCES VEAMOS QUE PASA CON LA SUMA

$$g[n] = x[n] + y[n] = x[n + \underbrace{m_x N_x}_{m}] + y[n + \underbrace{m_y N_y}_{m}]$$

$$g[n] = x[n+m] + y[n+m]$$

$$\boxed{g[n] = g[n+m]}$$

ENTONCES DEMOSTRAMOS QUE g ES PERIÓDICA DE PERIODO m

(e)

$$x[n] = e^{j\frac{2\pi nk}{N}} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

$$= e^{j\frac{2\pi nk}{N}} \left(\frac{e^{j\frac{2\pi nk}{N}} - e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}}{2j} \right)$$

$$= \frac{1}{2j} \underbrace{e^{j\frac{4\pi nk}{N}}}_{\text{PARTE PERIÓDICA.}} - \underbrace{\frac{1}{2j}}_{\text{CONSTANTE}}$$

$\Rightarrow$ QUEREMOS HALLAR M / $x[n] = x[n+M]$

$$e^{j\frac{4\pi nk}{N}} = e^{j\frac{4\pi (n+M)}{N}k}$$

$$\Rightarrow e^{j\frac{4\pi Mk}{N}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi Mk}{N} = 2\pi m \qquad m \in \mathbb{Z}$$

ENTONCES EL PERÍODO ES $M = \dfrac{mN}{2k}$

PARA DISTINTOS VALORES DE k Y N HAY QUE HALLAR EL VALOR DE m QUE HAGA QUE M SEA EL <u>NATURAL</u> MAS CHICO.

PARA $N = 21$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M	1	21	21	7	21	21	7	3	21	7

SI $k = 0 \Rightarrow x[n] = 0$

- POR EJEMPLO PARA $k = 3$

$$M = \frac{m \cdot 21}{2 \cdot 3} = \frac{m}{2} 7$$

TOMAMOS $m = 2 \Rightarrow \boxed{M = 7}$

EJERCICIO 10

$$Z \sim \mathcal{N}\left(2, \tfrac{1}{2}\right)$$

ⓐ $E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{2} \delta(x+2) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{4} \delta(x+1) dx + \frac{1}{4} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-2)^2} dx}_{E\{Z\}}$$

PROPIEDAD DE EXTRACCIÓN DE LA DELTA

$$= -1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

RECORDAR

$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

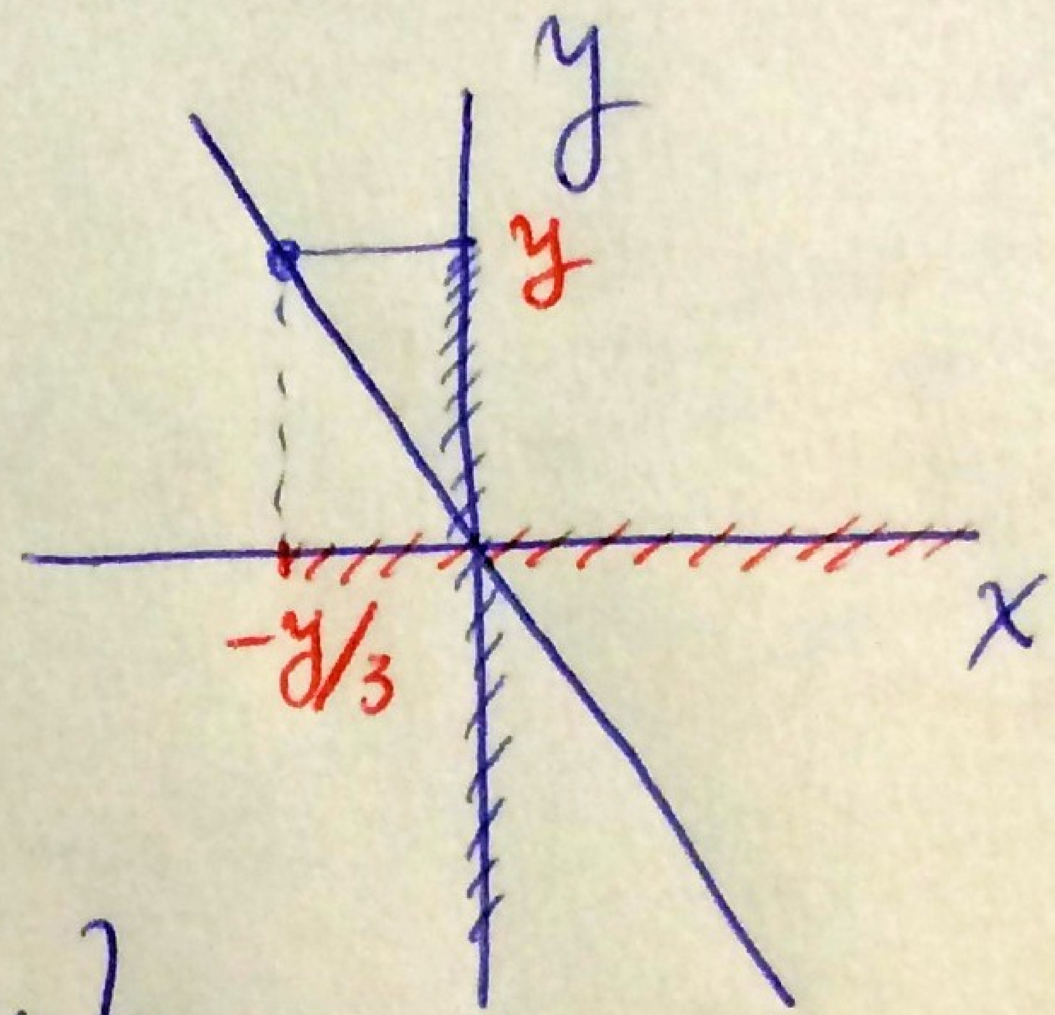
ⓑ $Var\{X\} = E\{X^2\} - \mu_X^2$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{2} \delta(x+2) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{4} \delta(x-1) dx + \frac{1}{4} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-2)^2} dx}_{Var\{Z\} + \mu_Z^2}$$

$$= 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{\sigma_z^2} + \underbrace{4}_{\mu_z^2}\right) - \underbrace{\frac{1}{16}}_{\mu_x^2}$$ DEL PUNTO ⓐ

$$= \frac{53}{16}$$

ⓒ $Y = -3X$



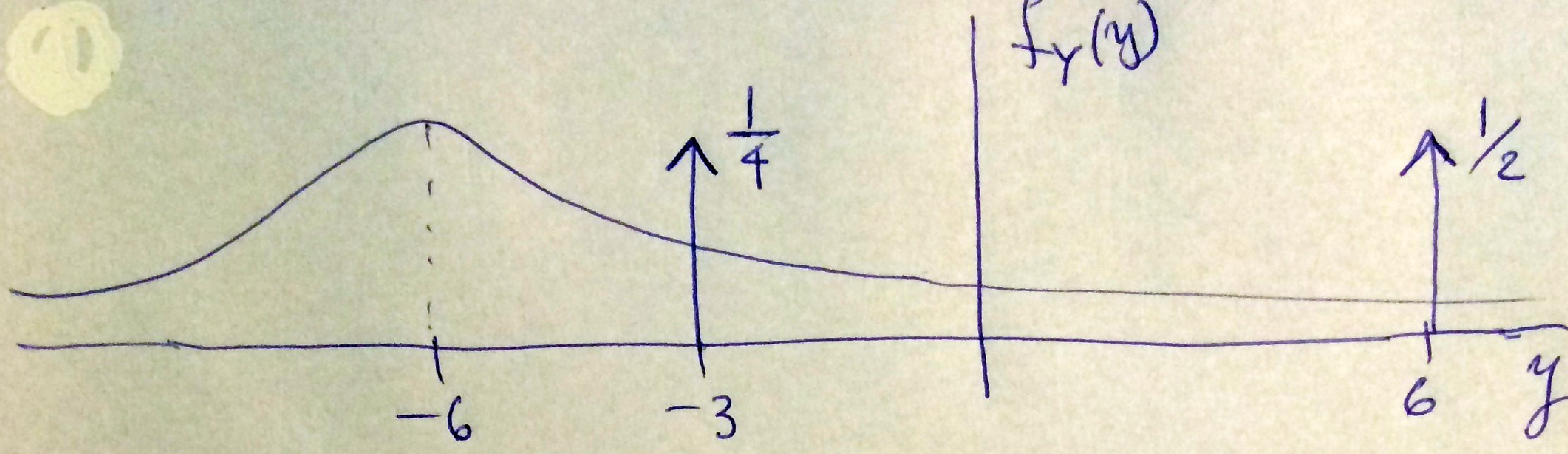
$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\}$$
$$= P\{X \geq -y/3\}$$
$$= 1 - P\{X \leq -y/3\}$$
$$= 1 - F_X(-y/3)$$

DERIVAMOS CON. RESP. A y

$$f_Y(y) = f_X(-y/3) \cdot \frac{1}{3}$$

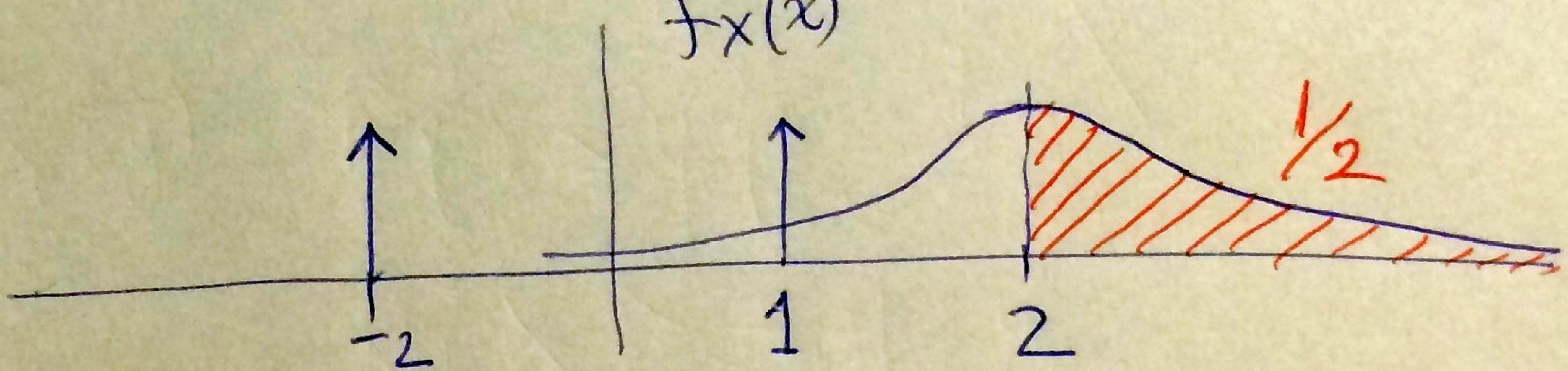
$$f_Y(y) = \frac{1}{6}\delta\left(-\frac{y}{3}+2\right) + \frac{1}{12}\delta\left(\frac{-y}{3}-1\right) + \frac{1}{12\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{-y}{3}-2\right)^2}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}\delta(y-6) + \frac{1}{4}\delta(y+3) + \frac{1}{4\sqrt{\pi(9/2)}} e^{-\frac{(y+6)^2}{2(9/2)}}$$



(a)

$$P\{A\} = P\{X \geq 2\} = \underbrace{\int_2^{\infty} f_X(x)\,dx}$$



$$P\{A\} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

ENTONCES

$$P\{X \leq x \mid X \geq 2\} = \frac{P\{2 \leq X \leq x\}}{P\{X \geq 2\}}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 2 \\ 8 \cdot \frac{1}{4} \int_2^x \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-2)^2} dx & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$