SEÑALES Y SISTEMAS - AÑO 2020

Práctica 2:

Procesos Aleatorios y Correlación

1. **Un poco de Distribuciones Conjuntas, Condicionales y Marginales**

   Sabemos que el valor de una señal aleatoria –proceso estocástico– en un instante dado es una variable aleatoria y que podemos caracterizarla mediante su distribución. Pero estas distribuciones no caracterizan a todo el proceso, de la misma forma que la distribución marginal de dos variables aleatorias no alcanza para describirlas. Es su distribución conjunta lo que necesitamos. Lo mismo sucede con los procesos, para describirlos necesitamos las distribuciones asociadas no sólo a un instante dado, sino las conjuntas de varios instantes (estrictamente de una cantidad numerable).

   En este ejercicio trabajaremos con distribuciones de dos variables aleatorias para volver a familiarizarnos con su funcionamiento.

   Sean X e Y dos V.A. con distribución conjunta $f_{XY}(x, y)$. Considere los siguientes casos:

   a) Si $f_{XY}(x, y) = C$ en $x^2 + y^2 \leq 1$ y 0 en el resto.
      I. Calcular el valor de C para que la distribución esté bien definida.
      II. Hallar las distribuciones marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$. ¿Son independientes estas V.A.?
      III. Hallar las distribuciones condicionales $f_{X|Y}(x|y)$ y $f_{Y|X}(y|x)$.

   b) Sea $Z = X + Y$
      I. Obtenga su distribución $f_Z(z)$ en función de $f_{XY}(x, y)$.
      II. Modifique el resultado anterior para el caso en que X e Y son independientes. En este caso $f_Z(\cdot)$ es la convolución de $f_X(\cdot)$ y $f_Y(\cdot)$. Pronto veremos que esta operación es de suma importancia para la teoría de sistemas lineales.

   c) Sea $f_{XY}(x, y) = \dfrac{1}{2\pi\sigma^2(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left(-\dfrac{x^2 + y^2 - 2xy\rho}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right)$,

      o sea que X e Y son V.A. conjuntamente gaussianas, con media nula, varianza σ^2 (ambas), y coeficiente de correlación ρ ($|\rho| \leq 1$).
      I. Hallar las distribuciones marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$. Notar que el resultado no depende de ρ.
      II. ¿Qué sucede si ρ es 0? ¿Y si ρ es cercano a 1 o -1? Puede ayudarle graficar en MATLAB.
      III. Hallar las distribuciones condicionales $f_{X|Y}(x|y)$ y $f_{Y|X}(y|x)$.
      IV. Calcular la distribución de $Z = X + Y$. Observar la influencia de ρ en el resultado.

2. **Algunos Procesos Aleatorios**

   Para cada uno de los siguientes procesos aleatorios halle la esperanza y la distribución correspondiente a un instante de tiempo.

   a) Sea A una V.A. con distribución $f_A(\cdot)$.
      I. $X(t) = A$
      II. $X(t) = A + t$
      III. $X(t) = A.e^{-t}$

   b) Sea además $B[n]$ una secuencia aleatoria i.i.d. con distribución $f_B(\cdot)$, e independiente de A.
      I. $X[n] = B[n] + A$
      II. $X[n] = nB[n]$
      III. $X[n] = B[n] - B[n-1]$

c) Grafique algunas realizaciones de cada proceso de los incisos 2a y 2b utilizando MATLAB. Suponga para ello que $f_A(\cdot) \sim \mathcal{N}(0,1)$ y $f_B(\cdot) \sim \mathcal{U}[-1,1]$.

d) Considere la secuencia aleatoria $S[n]$ que es i.i.d. y para cada instante puede tomar los valores 1 o -1, con idéntica probabilidad. A partir de ella construimos el proceso $W[n] = \sum_{k=0}^{n} S[k]$, para $n \geq 1$, $W[0] = 0$ y cero en caso contrario. Este nuevo proceso se conoce con el nombre de caminata aleatoria o del borracho. Para entender el por qué del nombre, vamos a usar Matlab para dibujar algunas realizaciones. Ejecute las siguientes sentencias en la ventana de comandos

```
a = randn(1,1000);
S = (a>0) - (a<0);
W = [0 cumsum(S)];
figure; plot(W);
```

Ejecute las mismas sentencias varias veces, para ver distintas realizaciones del proceso.

Convencido de lo adecuado del nombre, calcule ahora la media y varianza del proceso $W[n]$. Calcule también la función de probabilidad para los instantes $n = 0$, 1, 2 y 3.

3. Correlación determinística

a) Sean $x(t)$ e $y(t)$ señales complejas con energía finita e iguales a E_x y E_y.

- I. Demostrar que $r_{xy}(\tau) = r_{yx}^*(-\tau)$.
- II. ¿Cuánto valen $r_{xx}(0)$ y $r_{yy}(0)$?
- III. Calcular la energía de la señal $x(t+\tau) - \lambda\, y(t)$, con $\lambda \in \mathbb{C}$, en función de $r_{xy}(\tau)$, $r_{xx}(0)$ y $r_{yy}(0)$. Recuerde que si $z \in \mathbb{C}$, entonces $z + z^* = 2Re\{z\}$.
- IV. ★ Utilice el resultado anterior (≥ 0 para todo λ), para demostrar que $|r_{xy}(\tau)|^2 \leq r_{xx}(0)\, r_{yy}(0)$. El valor $\lambda = r_{xy}(\tau)/r_{yy}(0)$ es particularmente útil. Hemos demostrado la desigualdad de Cauchy-Swartz para señales complejas. ¿Qué valor de $y(t)$ hace que se cumpla la igualdad?
- V. Exprese la propiedad anterior para la autocorrelación, es decir, cuando $x(t) = y(t)$.

b) Sean $x(t)$ e $y(t)$ señales complejas con potencia finita e iguales a P_x y P_y.

- I. ¿Cómo debe modificarse la definición de la correlación para poder operar con señales de potencia? Piense en cómo se altera la definición de energía para obtener la de potencia.
- II. ¿Cuánto valen ahora $r_{xx}(0)$ y $r_{yy}(0)$?
- III. ¿Cambian las propiedades de 3aI y 3aIV con esta nueva definición?

c) Calcular la intercorrelación r_{xy} (en función de r_{xx}) entre:

- I. $x[n]$ e $y[n] = \delta[n]$
- II. $x(t)$ y $a\,x(t)$ $\quad a \in \mathbb{R}$
- III. $x(t)$ y $x(t-\phi)$ $\quad \phi \in \mathbb{R}$
- IV. $x[n]$ y $y[n] = a\, x[n] + b\, x[n-N]$ $\quad a, b \in \mathbb{R}\ N \in \mathbb{Z}$

d) Calcular la autocorrelación de:

- I. $x(t) = t \sqcap(t)$
- II. $x[n] = a^n\, u[n]$ $\quad 0 < a < 1$
- III. $x[n] = \cos(n)$
- IV. $x(t) = u(t)e^{j2\pi f_0 t}$ $\quad f_0 \in \mathbb{R}$

4. Correlación Estadística

Veremos cómo podemos estimar la función de autocorrelación de una secuencia aleatoria ESA utilizando MATLAB. La obtención de la autocorrelación de una secuencia aleatoria $X[n]$ involucra el cálculo de la esperanza $R_{XX}[m] = E\{X[n+m]X[n]\}$. Esto significaría promediar sobre todas las realizaciones posibles de la secuencia aleatoria, sin embargo es posible obtener una "aproximación" a la función de autocorrelación a partir de un número finito de realizaciones.

a) Sea la secuencia aleatoria $X[n]$ i.i.d. con distribución $\mathcal{U}[-1/2, 1/2]$. Demuestre que $X[n]$ es una secuencia aleatoria estacionaria. Calcule analíticamente la función de autocorrelación $R_{XX}[m]$.

Los siguientes comandos de MATLAB permiten aproximar la función de autocorrelación $R_{XX}[m]$:

```
% 1º Obtener varias realizaciones de un proceso i.i.d. con distribución U[-.5,.5]
nro_de_realizaciones=500;
% Si bien las realizaciones de X[n] son de largo infinito, para realizar
% cálculos con MATLAB debemos restringirlo porque tenemos memoria finita.
largo_secuencia=150;
% Cada fila de la matriz x contendrá una realización del proceso, cada
% columna corresponde a una muestra de la secuencia (índice n de X[n]).
X=rand(nro_de_realizaciones,largo_secuencia)-.5;

% 2º Estimar Rxx[m] a partir del conjunto de realizaciones, para finitos m.
m_max=30;
for m=-m_max:m_max % Para cada m:
    % Determinar el rango de valores de n donde se puede evaluar X[n+m].
    n=(1+m_max):(largo_secuencia-m_max);
    % Calcular el argumento de la esperanza en Rxx[m]=EX[n+m]X[n]
    px=X(:,n+m).*X(:,n);     % para todas las realizaciones juntas.
    % En primer lugar, se promedian las diferentes realizaciones.
    rx=mean(px,1);
    Rx(1+m_max+m)=mean(rx);  % por ser X[n] ESA, se promedia para diferentes n.
end

% 3º Graficar el resultado.
figure;stem(-m_max:m_max,Rx);grid on;
```

b) Compare los resultados obtenidos con la función de autocorrelación teórica antes calculada.

c) Supongamos ahora que a partir de $X[n]$ se genera un nuevo proceso de la siguiente forma: $Y[n] = \sum_{i=0}^{11} X[n-i]$.
Calcule y grafique la función de autocorrelación $R_{YY}[m]$.

Para obtener varias realizaciones de $Y[n]$ en MATLAB podemos usar los siguientes comandos:

```
muestras_sumadas=12;  % Definir el número de muestras de X sumadas para obtener Y.
for n=muestras_sumadas:largo_secuencia   % Para cada n.
    % Calcular la salida del sistema para todas las realizaciones simultáneamente.
    Y(:,n)=sum(X(:,n+1-muestras_sumadas:n),2);
end
% Las primeras muestras de Y deben descartarse ya que contienen un
% transitorio producido al utilizar una X de largo finito.
 Y=Y(:,muestras_sumadas:largo_secuencia);
 largo_secuencia_Y=size(Y,2); %  Calcular el largo de la secuencia Y[n].
```

d) Realice un histograma con las muestras de las realizaciones de la secuencia $Y[n]$. ¿Qué distribución aparentan tener? De hecho, una forma práctica de generar una V.A. con distribución prácticamente idéntica a la $\mathcal{N}(0, 1)$ es sumando 12 variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{U}[-1/2, 1/2]$. Esto es debido al teorema del límite central.

e) Ahora calcule la aproximación a la función de autocorrelación $R_{YY}[m]$ a partir de las realizaciones de esta secuencia que obtuvo en MATLAB. Compare lo obtenido con lo calculado analíticamente.

5. **ESA Sinusoide Aleatoria**

Dado el proceso aleatorio $X(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$, graficar algunas realizaciones, hallar $E\{X(t)\}$, $R_{XX}(t+\tau, t)$, $E\{X^2(t)\}$; y verificar si es estacionario en sentido amplio para los siguientes casos:

   a) ω_0 y A constantes; θ es una variable uniformemente distribuida en $[-\pi, \pi]$.
   b) ω_0 y A constantes; θ es una variable uniformemente distribuida en $[-\pi/2, \pi/2]$.
   c) ω_0 y θ constantes; A: V.A. uniformemente distribuida en $[-A_0, A_0]$.
   d) $\theta = 0$ y A constante; ω_0: V.A. uniformemente distribuida en $[-B\pi, B\pi]$.
   e) A constante; θ es una variable uniformemente distribuida en $[-\pi, \pi]$; ω_0: V.A. uniformemente distribuida en $[-B\pi, B\pi]$, independiente de θ.

6. **Ergodicidad de la media**

   a) Considere el proceso $X(t) = M + W(t)$, donde M es una variable aleatoria con distribución $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ y $W(t)$ es ruido blanco gaussiano independiente de M, con $R_{WW}(\tau) = (N_0/2)\delta(\tau)$.
      I. Calcular y graficar E$\{X(t)\}$ y $R_{XX}(t+\tau, t)$. ¿Es $X(t)$ ESA?
      II. ¿Cuál es la distribución de $X(t)$?
      III. ★ Sea $< X(t) >_T$ la media temporal de $X(t)$ entre -T/2 y T/2, calcular su esperanza y su varianza. Vea qué sucede cuando T tiende a infinito. ¿Es $X(t)$ es ergódico en la media?
   b) ★ Con un procedimiento similar pruebe que una secuencia aleatoria i.i.d. (con media y varianza finitas) es ergódica en media.
   c) Sea $X(t)$ un PAESA y ergódico en media. Se define un nuevo proceso $Y(t)$ por la transformación $Y(t) = X(0)$. ¿Es $Y(t)$ es ESA?; ¿y ergódico en media?
   d) Dos PAESA's y ergódicos $X(t)$ e $Y(t)$ son independientes entre sí, y se cumple: $R_{XY}(\tau) = 8$ y $R_{XX}(\tau) = 4 + 2e^{-|\tau|}$. Hallar E$\{Y(t)\}$.

7. ☑ **Continuamente estocástico**

Sea U una variable aleatoria uniformemente distribuida, $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$. A partir de ella se construye el proceso $X(t) = \mathrm{e}^{-Ut}$, con $t \geq 0$.

   a) Represente un par de realizaciones de $X(t)$.
   b) Para cada valor de t, determine el rango de valores posibles de la VA $X(t)$.
   c) Calcule E$\{X(t)\}$ y $R_X(t_1, t_2)$. Preste atención a $t = 0$ y $t_1 = t_2 = 0$, respectivamente.
   d) Estudie la estacionariedad en sentido amplio del proceso $X(t)$.

8. ☑ **Cortito en sentido amplio**

Suponga que $X(t)$ es un proceso estocástico estacionario en sentido amplio. Para los procesos $Y(t), Z(t)$ definidos más abajo, determine si $Y(t)$ y $X(t)$ son conjuntamente estacionarios en sentido amplio. Idem para $Z(t)$ y $X(t)$.

   a) $Y(t) = X(t + a)$
   b) $Z(t) = X(at)$

Algunos resultados

1. *a)*
   I. $C = \dfrac{1}{\pi}$
   II. $f_X(z) = f_Y(z) = \dfrac{2}{\pi} \sqcap \left(\dfrac{z}{2}\right) \sqrt{1-z^2}$. No.
   III. $f_{X|Y}(z|c) = f_{Y|X}(z|c) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-c^2}}$ si $-\sqrt{1-c^2} \leq z \leq \sqrt{1-c^2}$, 0 en c.c.

   b)
   I. $f_Z(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z-x)dx$
   II. $f_Z(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx$

   c)
   I. $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ las dos.
   II. Si $\rho = 0$, X e Y son indep. Si $\rho \to \pm 1$ la distrib. se concentra sobre la recta $y = \pm x$ respect.
   III. $X|(Y=y) \sim \mathcal{N}(\rho y, \sigma^2(1-\rho^2))$ y $Y|(X=x) \sim \mathcal{N}(\rho x, \sigma^2(1-\rho^2))$
   IV. $Z \sim \mathcal{N}(0, 2\sigma^2(1+\rho))$

3. *c)*
   I. $x[m]$
   II. $a\ r_{xx}(\tau)$
   III. $r_{xx}(\tau + \phi)$
   IV. $a\ r_{xx}[m] + b\ r_{xx}[m+N]$

   d)
   I. $r_{xx}(\tau) = (1 - 3|\tau| + 2|\tau|^3) \sqcap (\tau/2)/12$
   II. $r_{xx}[m] = a^{|m|}/(1-a^2)$
   III. $r_{xx}[m] = \cos(m)/2$
   IV. $e^{j2\pi f_0 \tau}/2$

5. *a)* $E\{X(t)\} = 0$, $R_{XX}(t+\tau, t) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)$, $E\{X^2(t)\} = \frac{A^2}{2}$, ESA.

   b) $E\{X(t)\} = \frac{2A}{\pi}\cos(\omega_0 t)$, $R_{XX}(t+\tau, t) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)$, $E\{X^2(t)\} = \frac{A^2}{2}$, No ESA.

   c) $E\{X\} = 0$, $R_{XX}(t+\tau, t) = \frac{A_0^2}{3}\cos(\omega_0(t+\tau)+\theta)\cos(\omega_0 t + \theta)$, $E\{X^2\} = \frac{A_0^2}{3}\cos^2(\omega_0 t + \theta)$, NoESA.

   d) $E\{X\} = A\text{sinc}(Bt)$, $R_{XX} = \frac{A^2}{2}[\text{sinc}(B\tau) + \text{sinc}(B(2t+\tau))]$, $E\{X^2\} = \frac{A^2}{2}[1 + \text{sinc}(2Bt)]$, NoESA.

   e) $E\{X(t)\} = 0$, $R_{XX}(t+\tau, t) = \frac{A^2}{2}\text{sinc}(B\tau)$, $E\{X^2(t)\} = \frac{A^2}{2}$, ESA.

6. *a)*
   I. $\text{E}\{X(t)\} = 0$ y $R_{XX}(t+\tau, t) = \sigma^2 + (N_0/2)\delta(\tau)$.
   II. $X(t)$ es gaussiano y ESA.
   III. $\text{E}\{< X(t) >_T\} = 0$ y $\text{Var}\{< X(t) >_T\} = \sigma^2 + (N_0/2)/T$. No.

   c) Sí. No.

   d) $\text{E}\{Y(t)\} = \pm 4$

7. *b)* $e^{-t} \leq X(t) \leq 1$

   c) $\text{E}\{X(t)\} = (1 - e^{-t})/t$ para $t > 0$, $\text{E}\{X(t)\} = 1$
   $R_X(t_1, t_2) = (1 - e^{-(t_1+t_2)})/(t_1 + t_2)$ para $t_1 \neq 0, t_2 \neq 0$, $R_X(0,0) = 1$

   d) No es ESA

8. *a)* Conj. ESA

   b) No Conj. ESA