SEÑALES Y SISTEMAS - AÑO 2020

Práctica 3

Clasificación de Sistemas. Sistemas Lineales (SL). Convolución. Procesos estocásticos a través de SL.

1. **Invarianza al Desplazamiento**

   Considere el sistema $y[n] = x[n^2]$.

   a) Determine si el sistema es invariante al desplazamiento.

   b) Para clarificar el resultado previo suponga que $x[n] = u[n] - u[n-4]$ se aplica al sistema.

      I. Grafique la secuencia $x[n]$.

      II. Calcule y grafique la secuencia de salida del sistema $y[n]$.

      III. Grafique la secuencia de salida desplazada $y[n-2]$.

      IV. Grafique la secuencia $x_2[n] = x[n-2]$.

      V. Calcule y grafique la salida $y_2[n]$ del sistema cuando la entrada es $x_2[n]$.

      VI. Compare la señal $y_2[n]$ con $y[n-2]$. ¿Qué puede concluir?

   c) Repita el inciso anterior para el sistema $y[n] = x[n] - x[n-1]$. ¿Puede valerse del resultado para hacer alguna aseveración sobre la invarianza al desplazamiento del sistema? ¿Por qué?

2. **Clasificación de Sistemas**

   Clasifique los siguientes sistemas de acuerdo a: memoria y causalidad, invarianza en el tiempo o al desplazamiento, linealidad, y estabilidad.

   a) $y(t) = a\,x(t) + b$

   b) $y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$

   c) $\dfrac{dy}{dt} = t^3 x(t)$

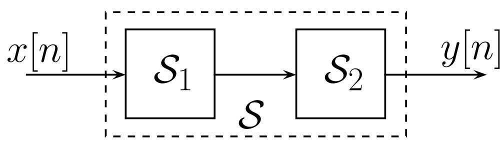
   d) $y[n] = \displaystyle\sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$

   e) Si $c > 0$: $y[n] = \begin{cases} x[n] & |x[n]| \leq c \\ c & x[n] > c \\ -c & x[n] < -c \end{cases}$

   f) $y[n] = x[-n]$

3. **Sistemas en cascada**

   Dos sistemas de tiempo discreto, $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$, se conectan en cascada formando un nuevo sistema $\mathcal{S}$, tal como se muestra en la figura.



   Establezca si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Recuerde que para demostrar la falsedad de un enunciado puede valerse de un contraejemplo, mientras que para demostrar la veracidad del mismo no es suficiente con un ejemplo en el cual se verifica.

   a) Si $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son lineales, entonces $\mathcal{S}$ es lineal (la conexión en cascada de dos sistemas lineales es lineal).

   b) Si $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son no-lineales, entonces $\mathcal{S}$ es no-lineal.

   c) Si $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son invariantes al desplazamiento, entonces $\mathcal{S}$ es invariante al desplazamiento.

d) Si $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son lineales e invariantes al desplazamiento, entonces $\mathcal{S}$ es lineal e invariante al desplazamiento.

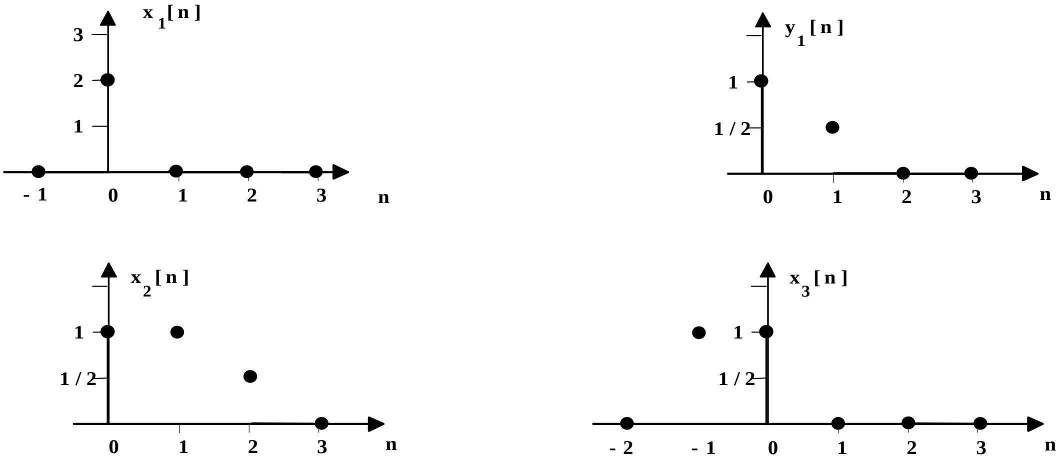
e) Si $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son variantes al desplazamiento, entonces $\mathcal{S}$ es variante al desplazamiento.

f) Si $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son causales, entonces $\mathcal{S}$ es causal.

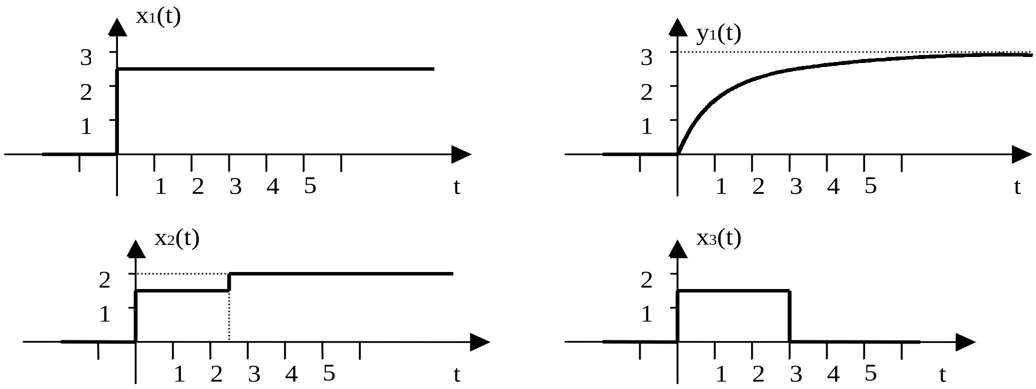
g) Si $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son estables, entonces $\mathcal{S}$ es estable (en sentido EA/SA).

4. **Aprovechando la linealidad**

a) Sea $S1$ un SLID cuya respuesta a la señal $x_1[n]$ es $y_1[n]$. Halle sus respuestas a $x_2[n]$ y a $x_3[n]$.



b) El SLIT $S2$ responde a $x_1(t)$ con $y_1(t) = 3(1 - e^{-2t})u(t)$. Halle sus respuestas a $x_2(t)$ y a $x_3(t)$.



c) Halle las respuestas impulsional de los sistemas $S1$ y $S2$.

d) Halle la respuesta del sistema $S2$ a la señal $x_4(t) = t.u(t)$ en función de $y_1(t)$. Para ello trate de vincular $x_4(t)$ con $x_1(t)$.

5. **A convolucionar se ha dicho!**

a) Calcule la convolución continua entre:

I. $x(t) = \mathrm{sinc}(t)$ y $h(t) = \delta(t-5)$

II. $x(t) = \bigwedge(t)$ y $h(t) = 2\delta(t) + \delta(t+1) + \delta(t-1)$

III. $x(t) = e^{-\alpha t}\,u(t)$ y $h(t) = e^{-\beta t}\,u(t)$ para $\alpha \neq \beta$ y $\alpha = \beta$

b) Calcule la convolución discreta entre:

I. $x[n] = 0{,}5^n\,u[n]$ y $h[n] = 4^n\,u[n-2]$

II. $x[n] = \delta[n+2]$ y $w[n] = a^{-n}\,u[-n] \qquad 0 < a < 1$

III. $x[n] = 1$ y $h[n] = \sqcap_{\mathbf{5}}[n]$

IV. $x[n] = \sqcap_{\mathbf{3}}[n]$ y $h[n] = \sqcap_{\mathbf{5}}[n-1]$

c) Analice cómo quedan los soportes de las señales resultado de la convolución en términos del soporte de las señales que se están convolucionando.

d) Definimos el área bajo la curva de una señal $x(t)$ como $A_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$. Demuestre que si $y(t) = \{x * h\}$, entonces $A_y = A_x A_h$. ¿Cuál es la versión para tiempo discreto de esta propiedad?

6. **Convoluciones en MATLAB**

   a) En el ambiente de trabajo de MATLAB defina los vectores h y x correspondientes a señales discretas y calcule la convolución entre ellas ejecutando las siguientes sentencias:

```
h=[zeros(1,10), [-10:1:0]/10+1, 1-[1:10]/10, zeros(1,10)];
x=[zeros(1,15), ones(1,11), zeros(1,15)]; c=conv(h,x);
```

   Grafique utilizando el comando `stem`.

   b) Calcule las respuestas a las excitaciones x1, x2 y x3 de un sistema con respuesta impulsional h, como en el inciso anterior:

```
h=[zeros(1,10), exp(-.2*[1:60])];
x1=[zeros(1,10), 2.5*ones(1,60)];
x2=[zeros(1,10), 1.5*ones(1,25), 2*ones(1,35)];
x3=[zeros(1,10), ones(1,30), zeros(1,30)];
```

   Comparar con los resultados del ejercicio 4*b*. Interprete que ocurre en las convoluciones anteriores a partir de `n=80` (recuerde que `conv` resuelve la convolución entre secuencias de largo finito).

7. **Realización de Sistemas**

   Dadas las siguientes ecuaciones en diferencias/diferenciales que describen sistemas LID/LIT:

   S1) $2y[n] + y[n-1] - 4y[n-3] = x[n] + 3x[n-5]$

   S2) $y[n] = x[n] - x[n-1] + 2x[n-2] - 3x[n-4]$

   S3) $\dot{y}(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t)$

   S4) $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2y(t) = x(t)$

   a) Halle la realización de los sistemas en la forma directa I.

   b) Halle la realización de los sistemas en la forma directa II.

   c) En cada caso ¿qué realización utiliza la menor cantidad de bloques de retardo/integradores? ¿Y sumadores?

   d) En el caso de los sistemas discretos, determine si se trata de sistemas FIR o IIR.

8. **Promedio Móvil**

   El cálculo del promedio móvil de $M = 2N + 1$ muestras de una secuencia dada puede obtenerse aplicando esta secuencia a la entrada de un SLID cuya respuesta impulsional es:

$$h[n] = \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-N}^{N} \delta[n-m]$$

   a) Halle la ecuación en diferencias que describe al sistema.

   b) ¿Es el sistema causal? ¿Cómo es posible usar este sistema con datos "del mundo físico"?

   c) Obtenga la salida si la entrada es $x[n] = A + \text{sen}(2\pi n/M)$; con $A \in \mathbb{R}$ constante.

   d) El sistema es excitado por una secuencia estocástica estacionaria $X[n]$ tal que $X[n] = A + V[n]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, con $A \in \mathbb{R}$ y donde $V[n]$ es i.i.d. gaussiana con media cero y varianza σ^2.

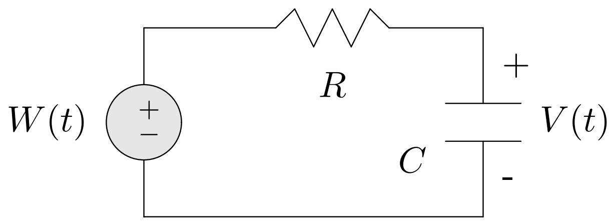
I. Calcule la función de autocorrelación $R_{XX}[n+m,n]$. ¿Es $X[n]$ ESA?
II. Halle $\mathrm{E}\{Y[n]\}$ y $\mathrm{Var}\{Y[n]\}$.
III. Calcule $R_{YY}[n+m,n]$. Grafique el resultado. ¿Es $Y[n]$ ESA?
IV. ¿Es $Y[n]$ gaussiano?¿Es $Y[n]$ estacionario? ¿Por qué?

e) Considere la situación anterior con $N=1$, y que la secuencia se aplica desde $n=0$.
I. Calcule $\mathrm{E}\{Y[-1]\}$, $\mathrm{E}\{Y[0]\}$, $\mathrm{E}\{Y[1]\}$ y $\mathrm{E}\{Y[n]\}$ para $n \geq 2$.
II. Calcule $R_{YY}[n_1,n_2]$ para $-1 \leq n_1 \leq 2$ y $-1 \leq n_2 \leq 2$.
III. ¿Es $Y[n]$ estacionaria en algún sentido? ¿Es $Y[n]$ gaussiano?

f) Por último y con $N=1$, consideremos que la entrada $X[n]$ es una secuencia estocástica i.i.d. con distribución dada por $P\{X[n]=0\} = 2P\{X[n]=1\} = 2/3$ (aplicada desde $-\infty$).
I. Calcule $E\{X[n]\}$, $\sigma_X^2 = \mathrm{Var}\{X[n]\}$ y $R_{XX}[n+m,n]$.
II. Calcule $E\{Y[n]\}$, $\sigma_Y^2 = \mathrm{Var}\{Y[n]\}$ y $R_{YY}[n+m,n]$.
III. ¿Es $X[n]$ una secuencia ESA? ¿Es $Y[n]$ una secuencia ESA? ¿Es $Y[n]$ una secuencia i.i.d.?
IV. $\bigstar$ Halle la distribución de $Y[n]$.

9. **Circuito RC con ruido**

En el circuito de la figura se considera $W(t)$ como entrada y $V(t)$ como salida.



a) Halle la ecuación diferencial que describe al sistema y su respuesta impulsional. Exprese la salida $V(t)$ en función de la entrada $W(t)$.

b) Suponga que la entrada del circuito $W(t)$ es ruido blanco gaussiano, es decir un PAESA con media nula y autocorrelación $R_{WW}(\tau) = (N_o/2)\delta(\tau)$ (excitación aplicada desde $t=-\infty$).
I. Calcule la media μ_V y la varianza σ_V^2 de $V(t)$.
II. Calcule $R_{VV}(\tau) = \mathrm{E}\{V(t+\tau)V(t)\}$ ¿Por qué sabemos que $R_{VV}(\tau)$ no va a depender de t?
III. Verifique que se cumple que $R_{VV}(\tau) = \{h * h^- * R_{WW}\}(\tau)$, con $h(t)$ respuesta impulsional del circuito, y $h^-(t) = h(-t)$.
IV. Obtenga la densidad de probabilidad de $V(t)$. ¿Es la salida $V(t)$ ESA?

c) Considere ahora que el proceso aleatorio de entrada $W(t)$ tiene media A (con lo cual $R_W(\tau) = A^2 + (N_0/2)\delta(\tau)$), y además se aplica desde $t=0$. Piense que hay una llave que se cierra en $t=0$, que conecta una fuente de continua “ruidosa”.
I. Calcule y grafique $\mathrm{E}\{V(t)\}$ y $\mathrm{Var}\{V(t)\}$.
II. ¿Es $V(t)$ un proceso ESA? Justifique.
III. $\bigstar$ Calcule $R_{WV}(t+\tau,t)$.
IV. Halle la densidad de probabilidad de $V(t)$.

10. $\bigstar$**Rectificador de Onda Completa**

Sea un modelo “simplista” de rectificador de onda completa que a la entrada $x(t)$ le asigna como salida $y(t) = |x(t)|$. Sea $X(t)$ un proceso estocástico gaussiano, de media nula y $R_{XX}(\tau) = \sigma^2 \bigwedge(\tau/T),\ T>0$.

a) Analice la linealidad, memoria e invarianza en el tiempo del sistema que representa el rectificador.

b) Llamemos $Y(t)$ a la salida del sistema cuando la entrada es el proceso $X(t)$. Calcule $\mathrm{E}\{Y(t)\}$.

c) Calcule la varianza de $Y(t)$. ¿Cuánto vale $R_{YY}(t,t)$?

d) Calcule $R_{YY}(t_1,t_2)$ para $|t_1-t_2|>T$.

e) Considere $X(t_1)$ y $X(t_2)$ para $0<|t_1-t_2|<T$. ¿Cuál es su distribución conjunta? (Escriba una expresión para la misma y justifique su razonamiento).

f) ¿Cómo podría plantear el cálculo de $R_{YY}(t_1,t_2)$ para $0<|t_1-t_2|<T$? ¿Es el proceso aleatorio $Y(t)$ estacionario en sentido amplio?

11. ☑ Considere el sistema de entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ definido por la ecuación $y(t)=\int_{t-1}^{t+1}x(\tau)d\tau$

   a) ¿Es un sistema lineal? ¿Es invariante en el tiempo? Justifique todas sus respuestas.

   b) Calcule y grafique la respuesta impulsional del sistema.

   c) El sistema, ¿es causal? ¿Es estable? Justifique.

12. ☑ **Largo Estocástico**

   Considere un SLID con ecuación en diferencias dada por $y[n+3]=x[n]+3x[n-1]-x[n-2]$, donde la entrada es x y la salida y. Ahora se le aplica como entrada (desde $-\infty$) un proceso estocástico $W[n]$ gaussiano, de media cero y autocorrelación $R_W[m]=2\delta[m]$; dando como salida el proceso $Y[n]$.

   a) Grafique la $R_W[m]$. Halle la varianza de $W[n]$.

   b) Diga *a-priori*, sin calcular nada, si el proceso $W[n]$ es estacionario en sentido amplio. Justifique.

   c) Calcule la función de intercorrelación $R_{YW}[n_1,n_2]=\mathrm{E}\{Y[n_1]W[n_2]\}$. Grafíquela.

   d) Calcule la función de autocorrelación $R_{YY}[n_1,n_2]=\mathrm{E}\{Y[n_1]Y[n_2]\}$. Grafíquela.

   e) Halle la densidad de probabilidad de $Y[n]$ y muestre claramente cuáles son sus parámetros.

   f) ¿Es Y estacionario en sentido amplio? ¿Puede decir si es estacionario en sentido estricto?. Justifique ambas.

Algunos resultados

2. *a*) SM, IT, no lineal (increm. lineal) y estable.

   b) CM, causal, IT, lineal e inestable.

   c) CM, causal y lineal si $y(-\infty)=0$, VT e inestable.

   d) CM, no causal, ID, lineal y estable.

   e) SM, causal, ID, no lineal y estable.

   f) CM, no causal, VD, lineal y estable.

3. *a*) V *b*) F *c*) V *d*) V *e*) F *f*) V *g*) V

5. *a*) I. $\mathrm{sinc}(t)$

   II. $2\wedge(t/2)$

   III. $(\beta-\alpha)^{-1}(e^{-\alpha t}-e^{-\beta t})u(t)$ si $\alpha\neq\beta$; $t\,e^{-\alpha t}u(t)$ si $\alpha=\beta$

   b) I. $\frac{8}{7}\,(4^n-8(0,5)^n)u[n-2]$

   II. $\frac{a^{-n}}{a^2}\,u[-n-2]$

   III. 5

   IV. $y[n]=\wedge_4[n-1]-\delta[n-1]$

   c) $S_y=S_x\,S_h$, con $S_x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]$

d) $h[n] = \delta[n-1] + 2\ \delta[n-2] + \delta[n-3]$

8. *c*) $y[n] = A$

   d) I. $R_{XX}[n+m, n] = \sigma^2\delta[m] + A^2$. Sí.
   II. $\mathrm{E}\{Y[n]\} = A$ y $\mathrm{Var}\{Y[n]\} = \sigma^2/M$
   III. $R_{YY}[n+m, n] = (\sigma/M)^2 \wedge_M[m] + A^2$. Sí.
   IV. Sí. Sí.

   e) I. $\mathrm{E}\{Y[-1]\} = A/3$, $\mathrm{E}\{Y[0]\} = 2A/3$, $\mathrm{E}\{Y[1]\} = A$ y $\mathrm{E}\{Y[n]\} = A$ para $n \geq 2$.
   II. $R_{YY}[n_1, n_2] = (\sigma/3)^2[1\ 1\ 1\ 0;\ 1\ 2\ 2\ 1;\ 1\ 2\ 3\ 2;\ 0\ 1\ 2\ 3] + (A/3)^2[1\ 2\ 3\ 3;\ 2\ 4\ 6\ 6;\ 3\ 6\ 9\ 9;\ 3\ 6\ 9\ 9]$ para $-1 \leq n_1 \leq 2$ y $-1 \leq n_2 \leq 2$.
   III. . No. Sí.

   f) I. $E\{X[n]\} = 1/3$, $\sigma_X^2 = 2/9$ y $R_{XX}[n+m, n] = (2/9)\delta[m] + 1/9$.
   II. $E\{Y[n]\} = 1/3$, $\sigma_Y^2 = (2/9)/M$ y $R_{YY}[n+m, n] = (2/9)/(M^2) \wedge_M[m] + 1/9$.
   III. Sí. Sí. No.
   IV. $M\ Y[n] \sim \mathcal{B}(M, 1/3)$.

9. *a*) $RC.V'(t) + V(t) = W(t)$, $h(t) = \alpha e^{-\alpha t}u(t)$ con $\alpha = 1/(RC)$, y $V(t) = \{h * W\}(t)$.

   b) I. $\mu_V = 0$ y $\sigma_V^2 = \alpha N_0/4$
   II. $R_{VV}(\tau) = \sigma_V^2 e^{-\alpha|\tau|}$
   IV. $V(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_V^2)$. Sí.

   c) I. $\mathrm{E}\{V(t)\} = A(1 - e^{-\alpha t})u(t)$ y $\mathrm{Var}\{V(t)\} = \sigma_V^2(1 - e^{-2\alpha t})u(t)$
   II. No.
   III. $R_{WV}(t+\tau, t) = 2\sigma_V^2 e^{\alpha\tau}u(t+\tau)u(-\tau) + A^2(1 - e^{-\alpha t})u(t)$
   IV. $V(t) \sim \mathcal{N}(\mathrm{E}\{V(t)\}, \mathrm{Var}\{V(t)\})$

10. *a*) No lineal, SM e IT.

   b) $E\{Y(t)\} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\ \sigma$

   c) $V\{Y(t)\} = (1 - \dfrac{2}{\pi})\ \sigma^2$ y $R_{YY}(t, t) = \sigma^2$

   d) $R_{YY}(t_1, t_2) = E\{\ |X(t)|\ \}^2 = \dfrac{2}{\pi}\ \sigma^2$

   e) $f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \dfrac{1}{2\pi\sigma^2(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left(-\dfrac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\rho}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right)$, con $\rho = \wedge\left(\dfrac{t_1 - t_2}{T}\right)$

   f) $R_{YY}(t_1, t_2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |x_1\ x_2|\ f_X(x_1, x_2; t_1, t_2)dx_1dx_2$, ESA.