SEÑALES Y SISTEMAS - AÑO 2020

Práctica 4

Transformada de Fourier (TF) y Serie de Fourier (SF)

1. **TF y sus propiedades**

   a) Sea $v(t) = \bigwedge(t)$ una función par y real, y $V(f)$ su TF dada por:

   $$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\, \cos(2\pi ft)\, dt$$

   I. Grafique en Matlab el integrando de la ecuación anterior para $f = 0,5; 1; 3; 5$.
   II. ¿Dónde aparece reflejado el contenido frecuencial de la señal $v(t)$?.
   III. ¿Qué sucede cuando $f \to \infty$?
   IV. Calcule y grafique $V(f)$. Indique en el gráfico los resultados previamente obtenidos.

   b) Dada la función $x(t) = e^{-t} \sqcap(t - 1/2)$

   I. Calcule la TF de $x(t)$.
   II. Halle la parte par e impar de $x(t)$, luego calcule sus TFs.
   III. Obtenga las transformadas del inciso anterior por propiedades y verifique que coinciden.

   c) Demuestre que si $x(t)$ es una señal real y $X(f)$ su TF, entonces $X(-f) = X^*(f)$ (simetría hermítica). A partir de esto demuestre que $\mathrm{Re}\{X(f)\}$ es par, $\mathrm{Im}\{X(f)\}$ es impar, $|X(f)|$ es par y $\angle X(f)$ es impar (salvo número entero de ciclos, o sea $2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$).

   d) Sea $x(t) = A + \cos(2\pi f_0 t)$, con A y f_0 constantes reales, y llamemos $y(t)$ a su derivada.

   I. Calcule $X(f)$ e $Y(f)$.
   II. Pruebe la propiedad de derivación en el tiempo de la TF y vea que $X(f)$ e $Y(f)$ la cumplen.
   III. ¿Que sucede con el valor medio de la señal al derivar? ¿Cómo aparece reflejado este hecho en el dominio transformado?
   IV. ¿Son $x(t)$ e $y(t)$ señales de energía o de potencia? ¿Cómo vemos esto en sus transformadas?

   e) I. Halle la TF de $x(t) = u(t)$, usando la propiedad de derivación en el tiempo. ¿Cuánto vale el valor medio de $x(t)$? ¿Cómo se ve en su transformada?
   II. ¿Cuál es la TF de $y(t) = \mathrm{sgn}(t)$?
   III. Demuestre la propiedad de integración en el tiempo recordando que $\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)d\lambda = \{x * u\}(t)$. ¿Qué sucede si $x(t)$ tiene valor medio?

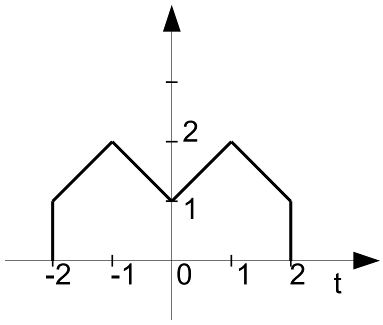
   f) Sea $x(t) = 2\sqcap(t/4 - 1/4) - \sqcap(t - 1)$. Grafíquela. Sin calcular su TF, $X(f)$, encuentre:

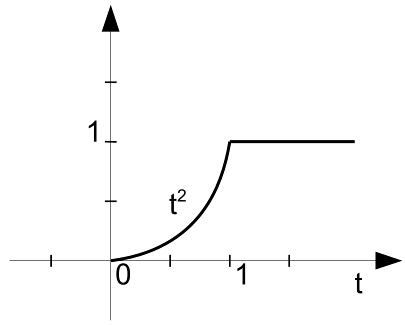
   I) $X(0)$ II) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\ df$ III) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\ df$

2. **Al derecho y al revés**

   a) Hallar la TF y graficar esquemáticamente:

   I. $f(t) = \sqcap(t/4 - 5)$
   II. $f(t) = \sqcap(t-1) + \bigwedge((t+1)/2)$
   III. $f(t) = e^{-3t^2+2t}$
   IV. $f(t) = e^{-j\pi t}$ (señal compleja)
   V. $f(t) = 1 + \cos(\pi t)$
   VI. $f(t) = \mathrm{sinc}^2(t)\ \mathrm{sinc}(t)$
   VII. $f(t) = \delta(5\,t - 2)$
   VIII. $f(t) = \bigwedge(t-2) * \sqcap(t) * \delta(3t)$
   IX. $f(t) = \mathrm{sen}(\pi t) \sqcap(t/2)$
   X. $f(t) = \cos(\pi t) \sqcap(t/2)$
   XI. $f(t) = (e^{-(t-1)}\, u(t-1)) * \sqcap(t-3)$
   XII. Para las señales de la figura:





b) Halle las antitransformadas de Fourier de las siguientes señales.

I. $H(f) = \sqcap(2f) + j\,f \sqcap(f)$

II. $H(f) = \mathrm{sinc}(2f-1)$

III. $H(f) = 2\delta(f+1) + 2\delta(f-1) + 4\delta(f)$

IV. $H(f) = \cos(8\pi f + \pi/3)$

V. $H(f) = j(\wedge(f+10) + \wedge(f-10))$

V. $H(f) = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$, $\alpha > 0$

3. **Respuesta en frecuencia de un SLIT**

Consideremos un SLIT con respuesta impulsional real $h(t)$, cuya TF es $H(f)$. Si llamamos $x(t)$ a su entrada e $y(t)$ a su salida, sabemos que se verifica que $y(t) = \{x * h\}(t)$.

a) Operando en el dominio del tiempo, pruebe que si $x(t) = A\ e^{j(2\pi f_0 t + \theta)}$, con $f_0 \in \mathbb{R}$, entonces la salida es $y(t) = A\ H(f_0)\ e^{j(2\pi f_0 t + \theta)}$ (por esto $H(f)$ es llamada la respuesta en frecuencia).

b) Halle una expresión que vincule la TF de la salida, $Y(f)$, con la TF de una entrada cualquiera, $X(f)$. ¿Qué característica del sistema es necesaria para que exista $Y(f)$ si existe $X(f)$?

c) Obtenga el resultado de $3a$ operando en el dominio de la frecuencia.

d) Considerando que $h(t)$ es real (como lo será en general para los sistemas que analicemos) y utilizando los resultados anteriores demuestre que la salida a la entrada $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$ se puede expresar como $y(t) = B\cos(2\pi f_0 t + \phi)$. ¿Cuánto valen B y ϕ?

e) Si la entrada $x(t) = 1 + 4\cos(2\pi t) + 8\ \mathrm{sen}(3\pi t - \pi/2)$ produce la salida $y(t) = 2 - 2\ \mathrm{sen}(2\pi t)$, ¿Qué valores de $H(f)$ es posible determinar? ¿Cuánto valen?

f) Explique por qué no se puede caracterizar al sistema con un par entrada-salida como el anterior y sí cuando la entrada es un impulso o un escalón.

g) Suponga que la ecuación diferencial que describe al SLIT es $y'(t) + 3y(t) = x(t)$. Halle $H(f)$ aplicando TF directamente a la ecuación. Halle $h(t)$ antitransformando. Obtenga la salida del sistema cuando la entrada es:

I. $x(t) = \cos(2\pi t)$

II. $x(t) = \cos(3\pi t) + \mathrm{sen}(5\pi t)$

III. $x(t) = e^{-2t}u(t)$

IV. $x(t) = e^{-3t}u(t)$

V. $x(t) = \sqcap(t)$

4. **TF de señales periódicas y SF**

Sea $p(t)$ una señal periódica de período T y $q(t) = p(t)\sqcap\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$, con $t_0 \in \mathbb{R}$, arbitrario. Es decir, $q(t)$ es igual a $p(t)$ en un período y cero en los restantes valores de t. La señal $p(t)$ puede escribirse como $p(t) = \{q * p_T\}(t)$, donde $p_T(t) = \frac{1}{T}\,\text{Ш}\left(\frac{t}{T}\right)$.

a) Utilizando este hecho escriba cómo resultaría la TF de $p(t)$, $P(f)$, en términos de la TF de $q(t)$, $Q(f)$.

b) Exprese los coeficientes de la SF de $p(t)$, $c[n]$ ($n \in \mathbb{Z}$), en función de $Q(f)$.

c) En base a los dos incisos anteriores, exprese la TF de $p(t)$, $P(f)$, en términos de los coeficientes de su SF, $c[n]$.

d) Sea $r(t) = p(t - t_1)$, con $t_1 \in \mathbb{R}$. ¿Cómo resultan los coeficientes de la SF de $r(t)$ en términos de los $c[n]$? ¿Qué sucede en el caso $t_1 = T/2$?

e) Calcule la potencia de $p(t)$ en función de los $c[n]$. ¿Cuál es el valor medio de $p(t)$?

f) Obtener la SF para las siguientes señales. Graficar los $c[n]$ en módulo y fase. Hallar su potencia.

I. $p(t) = e^{-j10\pi t}$
II. $p(t) = \cos(\pi t + \pi/4)$
III. $q(t) = \sqcap(t/4)$ y $T = 8$
IV. $q(t) = \sqcap(t/4 - 1)$ y $T = 8$
V. $q(t) = \sqcap(t/4)$ y $T = 12$
VI. $q(t) = \wedge(t/4)$ y $T = 8$

g) Halle la TF de las señales del inciso anterior.

5. **Señales periódicas a través de sistemas**

a) Demuestre que si a la entrada de un SLIT se aplica una señal periódica $x(t)$, la señal de salida, $y(t)$, resulta también periódica. ¿Cómo resulta la SF de $y(t)$ en términos de la SF de $x(t)$? **Ayuda:** En el ejercicio 3 analizamos cómo resulta la salida de un SLIT con respuesta en frecuencia $H(f)$ cuando a su entrada se aplica la señal $x(t) = A\, e^{j(2\pi f_0 t + \theta)}$, con $f_0 \in \mathbb{R}$.

b) Considere el sistema SLIT con respuesta impulsional $h(t)$, al que se aplican las señales de entrada $x_1(t)$ y $x_2(t)$ donde:

$h(t) = \sqcap\,(5/2(t - 1/5))$

$x_1(t) = \cos(2\pi t) + \cos(5\pi t)$

$x_2(t) = \{q * p_T\}$ con $q(t) = \sqcap\left(\frac{5t}{2}\right)$ y $T = 4/5$

I. Halle el período fundamental de la señal $x_1(t)$ (puede serle de utilidad revisar lo hecho en la Práctica 1). Calcule su SF, su TF y grafique esta última ¿dónde aparece reflejado el período fundamental?

II. Halle la SF de la señal de salida del sistema cuando a su entrada se aplica la señal $x_1(t)$. Halle la TF y grafíquela. ¿Cuál es el período fundamental de esta señal?

III. Halle la SF y la TF de $x_2(t)$.

IV. Halle la SF de la señal de salida del sistema cuando a su entrada se aplica la señal $x_2(t)$. ¿Qué sucede? ¿Cómo explicaría esto en el dominio del tiempo?

c) La señal $x(t) = \cos(2\pi t)$ se aplica al sistema descripto por $y(t) = \cos(\pi t)x(t)$. Halle las SF de las señales de entrada y de salida. Compare este resultado con lo que esperaría en caso de que el sistema fuese SLIT.

d) La señal $x(t) = \cos(2\pi t)$ se aplica al sistema descripto por $y(t) = (x(t))^2$. Halle las SF de las señales de entrada y de salida. Compare este resultado con lo que esperaría en caso de que el sistema fuese SLIT.

Cuidado: Estos dos últimos incisos son sólo ejemplos de lo que sucedería al aplicar señales periódicas a sistemas que no son SLIT. A partir de estos ejemplos no es posible generalizar sobre el comportamiento de sistemas que no son SLIT.

6. **¡Grande Parseval!**

Sean $x(t)$ e $y(t)$ señales de energía con TF's $X(f)$ e $Y(f)$. El teorema generalizado de Parseval es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)df$$

a) Demuestre el teorema. ¿Qué resultado se obtiene cuando $x(t) = y(t)$ (Teorema de Parseval)?

b) Verifique los resultados de las siguientes integrales

I. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^4(x)\, dx = \frac{2}{3}$ II. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} \cos(2\pi a x)\, dx = e^{-\pi a^2}$

III. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2(x) \cos(\pi x)\, dx = \frac{1}{2}$ IV. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\operatorname{sinc}(2f)}{1+(2\pi f)^2}\, df = 1 - e^{-1}$

c) Sea $X(f) = \sqcap(f/2)$ la TF de $x(t)$, y sea $y(t)$ su derivada segunda. Calcule la energía de $y(t)$.

7. **Correlación y TF**

Sean $x(t)$ e $y(t)$ señales de energía, y $r_{xy}(\tau)$ su intercorrelación.

a) Encuentre una expresión para $\mathcal{F}\{r_{xy}(\tau)\}$ en función de $X(f)$ e $Y(f)$.

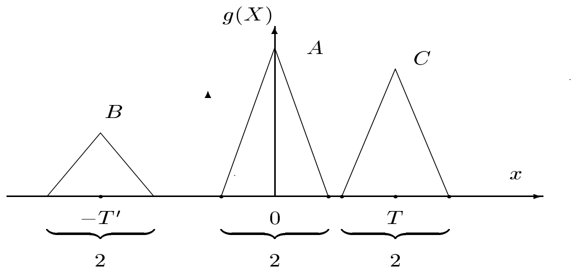
b) Calcular $r_{xy}(\tau)$ si $x(t) = 10\cos(t)\sqcap(t/2\pi)$ e $y(t) = 20\operatorname{sen}(t)\sqcap(t/2\pi)$.

c) Demostrar que la TF de una función de autocorrelación es siempre positiva.

d) Determine si las funciones: $f(x) = \sqcap(x)$ y $g(x) = e^{-|x|}$ pueden ser funciones de autocorrelación.

e) Considere la función de la figura:

Determine los valores posibles para números reales A, B, C, T, T'de de modo que $g(x)$ pueda ser una función de autocorrelación.



f) Suponga que $x(t)$ es la entrada e $y(t)$ la salida a un SLIT estable con respuesta impulsional real $h(t)$. Halle expresiones para $\mathcal{F}\{r_{xy}(t)\}$ y $\mathcal{F}\{r_{yy}(t)\}$, en función de $\mathcal{F}\{r_{xx}(t)\}$ y $\mathcal{F}\{h(t)\}$.

8. ☑ Sea el sistema descrito por $y(t) = x^2(t)\cos(2\pi 5t)$.

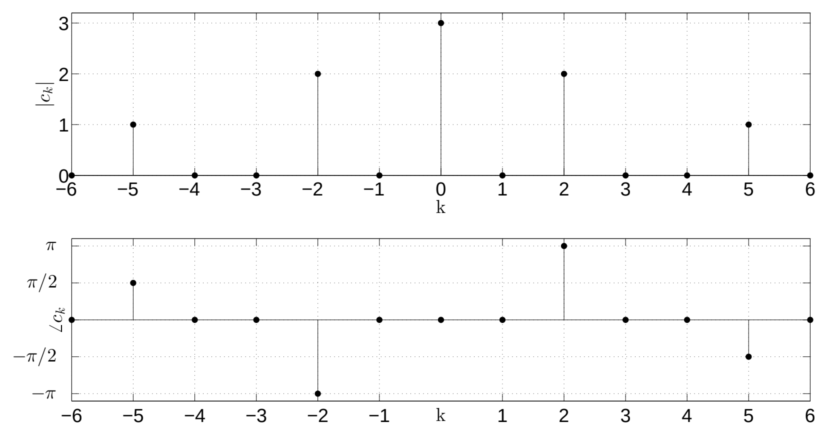
a) Si la entrada al sistema es $x(t) = 10\operatorname{sinc}(10t)$, obtenga el espectro de la señal de salida $Y(f)$.

b) Grafique esquemáticamente $Y(f)$ indicando los valores representativos de la señal en los ejes.

c) ¿Puede sugerir qué parámetro/s del sistema cambiar para alejar el contenido espectral de frecuencia 0?

9. ☑ **Co-eficientes**

Sea $x(t)$ una señal periódica de período $T = 1/50$ cuya expresión en serie de Fourier posee los coeficientes dados en la figura (los que no aparecen son nulos).



Sin calcular explícitamente $x(t)$ responda:

a) ¿Tiene valor medio $x(t)$? Justifique.

b) ¿Cuál es la potencia de $x(t)$?.

c) ¿Es $x(t)$ una señal real? Justifique.

Ahora proceda como desee:

d) ¿Cuál es la frecuencia fundamental de $x(t)$?

e) Halle la TF de $x(t)$, $X(f)$.

f) La señal $x(t)$ ingresa a un SLIT de respuesta impulsional $h(t) = 300sinc(300t)$. Muestre que la salida del sistema $y(t)$ es una señal periódica.

g) Halle los coeficientes de la SF de la señal de salida. Escriba $y(t)$.

Algunos resultados

2. *a*)
   - I. $4\ \mathrm{sinc}(4f)\ e^{-j40\pi f}$
   - II. $\mathrm{sinc}(f)\ e^{-j2\pi f} + 2\ \mathrm{sinc}^2(2f)\ e^{j2\pi f}$
   - III. $e^{1/3}\sqrt{\pi/3}\ e^{-j2\pi f/3}\ e^{-\pi^2 f^2/3}$
   - IV. $\delta(f+0{,}5)$
   - V. $\delta(f) + \frac{1}{2}\{\delta(f+0{,}5) + \delta(f-0{,}5)\}$
   - VI. $\sqcap(f)(\frac{3}{4} - f^2) + \sqcap(|f|-1)(\frac{f^2}{2} - \frac{3|f|}{2} + \frac{9}{8})$
   - VII. $e^{-j4\pi f/5}/5$
   - VIII. $\mathrm{sinc}^3(f)\ e^{-j4\pi f}/3$
   - IX. $j\{\mathrm{sinc}(2f+1) - \mathrm{sinc}(2f-1)\}$
   - X. $\mathrm{sinc}(2f+1) + \mathrm{sinc}(2f-1)$
   - XI. $\mathrm{sinc}(f)e^{-j8\pi f}/(1+j2\pi f)$
   - XII. i)$2\ \mathrm{sinc}^2(f)\cos(2\pi f) + 4\ \mathrm{sinc}(4f)$
   - XII. ii)$(\delta(f) - \mathrm{sinc}(f)e^{-j\pi f}/(\pi f)^2 + e^{-j2\pi f}/(\pi f)^2)/2$

   b)
   - I. $\mathrm{sinc}(t/2)/2 + \mathrm{sinc}'(t)/2\pi$
   - II. $\sqcap(t/2)\ e^{j\pi t}/2$
   - III. $4(1+\cos(2\pi t))$
   - IV. $0{,}5 * (\delta(t+4)\ e^{j\pi/3} + \delta(t-4)\ e^{-j\pi/3})$
   - V. $2j\ \mathrm{sinc}^2(t)\cos(20\pi t)$
   - VI. $e^{-\alpha t}u(t)$

3. *e*) $H(0) = 2$, $H(1) = H(-1)^* = 0{,}5j$ y $H(1{,}5) = H(-1{,}5) = 0$

   g)
   - I. $\dfrac{\cos(2\pi t - \mathrm{tg}^{-1}(2\pi/3))}{\sqrt{9+4\pi^2}}$
   - II. $\dfrac{\cos(3\pi t - \mathrm{tg}^{-1}(\pi))}{3\sqrt{1+\pi^2}} + \dfrac{\mathrm{sen}(5\pi t - \mathrm{tg}^{-1}(5\pi/3))}{\sqrt{9+25\pi^2}}$
   - III. $(e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$
   - IV. $te^{-3t}u(t)$
   - V. $\dfrac{(1-e^{-3(t+0{,}5)})\sqcap(t)}{3} + \dfrac{(1-e^{-3})e^{-3(t-0{,}5)}u(t-0{,}5)}{3}$

4. *f*)
   - I. $c[n] = \delta[n+1]$ ($P = 1$ y $T = \frac{1}{5}$)
   - II. $c[n] = e^{j\pi n/4}(\delta[n+1] + \delta[n-1])/2$ ($P = \frac{1}{2}$ y $T = 2$)
   - III. $c[n] = \frac{1}{2}\ \mathrm{sinc}(\frac{n}{2})$ ($P = \frac{1}{2}$)
   - IV. $c[n] = \frac{1}{2}\ \mathrm{sinc}(\frac{n}{2})(-1)^n$ ($P = \frac{1}{2}$)
   - V. $c[n] = \frac{1}{3}\ \mathrm{sinc}(\frac{n}{3})$ ($P = \frac{1}{3}$)
   - VI. $c[n] = \frac{1}{2}\ \mathrm{sinc}^2(\frac{n}{2})$ ($P = \frac{1}{3}$)

6. *c*) $32\ \pi^4/5$

7. *a*) $X(f)Y^*(f)$

   b) $r_{xy} = -200\pi\ \mathrm{sen}(t)\wedge(t/2\pi)$

   c) $r_{xx} = |X(f)|^2$

   d) $f(x)$ no, $g(x)$ sí.

   e) $C = B$, $T = T'$ y $|B| < A/2$

   f) $\mathcal{F}\{r_{xy}(t)\} = |X(f)|^2 H(f)^*$ y $\mathcal{F}\{r_{yy}(t)\} = |X(f)|^2|H(f)|^2$