

CAPÍTULO UNO.

NOCIONES SOBRE MUESTREO Y RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES.

I.1. INTRODUCCIÓN.

La figura 1.1 representa un clásico esquema de control digital. La señal a controlar, $y(t)$, es muestreada a través de un convertidor analógico digital A/D y comparada con el valor de referencia (o set-point) $r(nT)$ almacenado en una posición de memoria del sistema de microcómputo en el cual se implementa el controlador digital. La información que resulta de esta comparación (señal de error discreta), es procesada por el microcomputador, que mediante un algoritmo recursivo, genera una señal de mando discreta $u(nT)$ que es convertida en analógica a través de un convertidor D/A. Esta secuencia de operaciones es realizada cada T segundos, siendo T el período de muestreo.

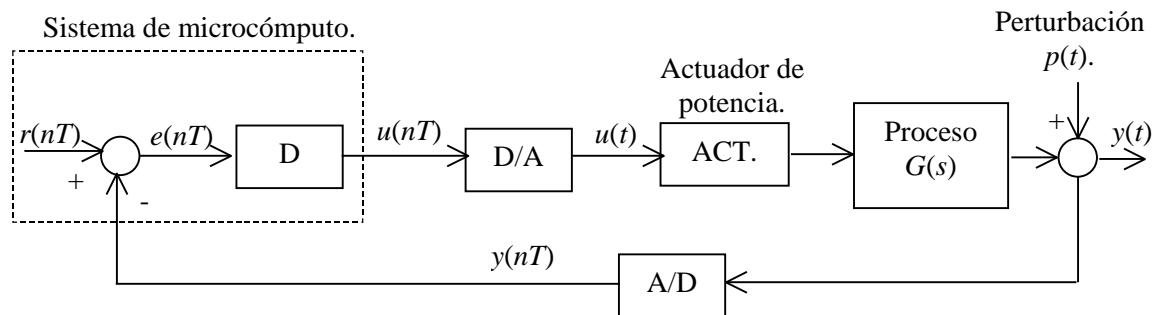


Figura 1.1. Esquema básico de control digital.

En el esquema de la figura pueden distinguirse dos tipos de señales:

- Señales continuas o analógicas. Son aquellas definidas para todo instante de tiempo ($u(t)$, $y(t)$, $p(t)$).
- Señales de tiempo discreto. Son aquellas únicamente definidas en los instantes de tiempo $t = nT$, siendo n un número entero y T el período de muestreo ($r(nT)$, $e(nT)$, $u(nT)$).

A los efectos de simplificar determinadas expresiones, la siguiente notación también será empleada para las señales discretas:

$$f_{nT} = f(nT). \quad (1-1)$$

Desde el punto de vista del análisis y diseño de sistemas de control muestreados, el esquema de la figura 1.1 no difiere del clásico esquema de texto de la figura 1.2.

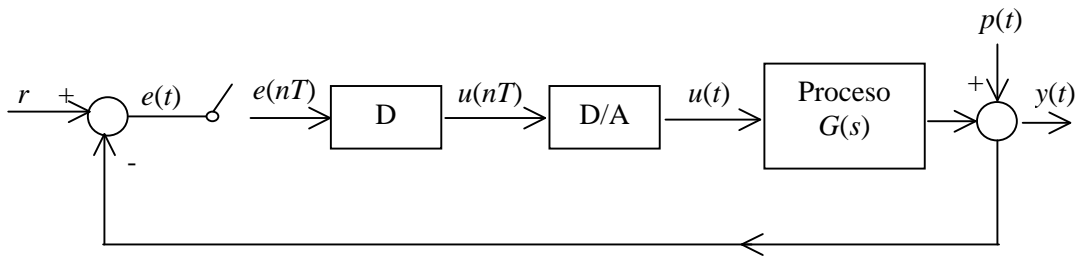


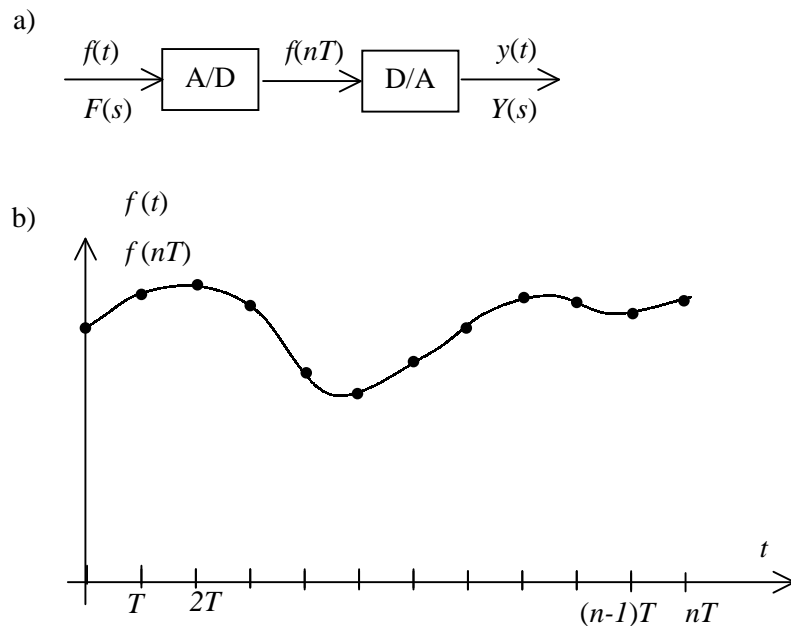
Figura 1.2. Esquema simplificado de control digital.

Si se pretende analizar el comportamiento del sistema de la figura 1.2 (o 1.1), utilizando las herramientas matemáticas que se emplean en sistemas analógicos, se choca con el primer inconveniente: no existe la transformada de Laplace de una señal que sólo está definida en algunos puntos, y por consiguiente no todos los bloques de la figura 1.2 pueden ser modelados con funciones de transferencia.

Para obviar el inconveniente citado en el último párrafo, se planteará un modelo del conjunto **convertidor A/D - controlador digital - convertidor D/A**, que visto desde sus extremos presente el mismo comportamiento que este conjunto y además que las señales en su interior, aunque distintas a las reales, permitan el empleo de nuestros conocimientos referidos a sistemas continuos.

1.2. MODELO DEL MUESTREADOR (CONVERSIONS A/D) Y RECONSTRUCTOR DE SEÑAL (CONVERSIONS D/A).

La figura 1.3 a) muestra el conjunto A/D – D/A a modelar. En las partes b) y c) de la figura 1.3 se indican las señales $f(t)$, $f(nT)$ y $y(t)$ que correspondientes a la parte a).



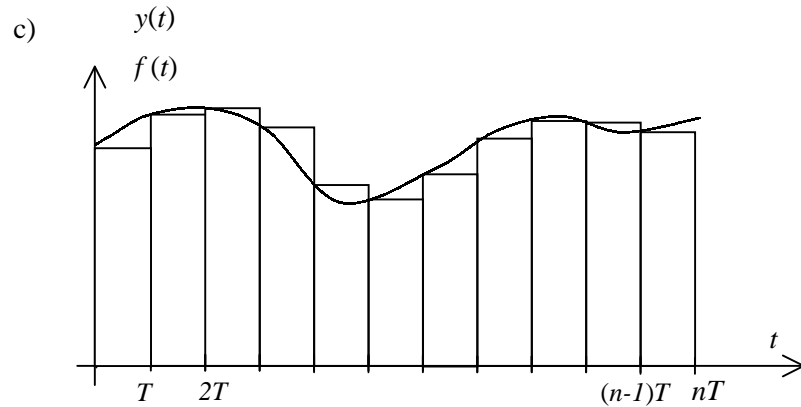


Figura 1.3. a) Conjunto a modelar.
 b) Señal continua $f(t)$, y discreta $f(nT)$.
 c) Señal continua $f(t)$ y reconstruida $y(t)$.

La señal reconstruida $y(t)$ puede ser expresada a partir de una sumatoria de escalones desplazados en el tiempo

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) [\mu(t - nT) - \mu(t - (n + 1)T)], \quad (1-2)$$

donde:

$$\mu(t - nT) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq nT \\ 0 & \text{si } t < nT \end{cases} \quad (1-3)$$

Luego, la transformada de Laplace de la señal reconstruida $y(t)$, resulta:

$$Y(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \frac{e^{-nTs} - e^{-nTs - Ts}}{s} \quad (1-4)$$

operando:

$$Y(s) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) e^{-nTs} \right] \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \right]. \quad (1-5)$$

El primer factor de la ecuación (1-5), a pesar de ser una expresión en el dominio frecuencial complejo s , da idea de lo que sucede en el tiempo, ya que corresponde a una operación lineal entre los valores de las distintas muestras de la señal $f(nT)$ desplazados en el tiempo en $t = nT$. Luego, si a los efectos de la modelización se asigna este factor a la transformación de Laplace de la señal muestreada $F^*(s)$, el segundo factor de la ecuación (1-5), corresponde a la transferencia del reconstructor de señal que denominaremos $H_o(s)$. Es decir:

$$Y(s) = F^*(s) \cdot H_o(s) \quad (1-6)$$

con:

$$F^*(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) e^{-nTs} \quad (1-7)$$

$$H_o(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (1-8)$$

Para completar el modelo, falta ahora, definir el bloque que relaciona la transformada de Laplace $F(s)$ de la señal continua con la transformada $F^*(s)$ asignada a la señal muestreada (figura 1.4).

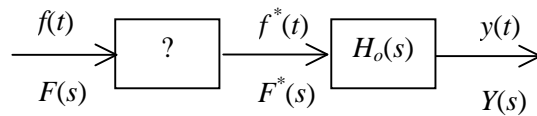


Figura 1.4. Modelización del muestreador y reconstructor.

Teniendo en cuenta que la transformada inversa es también una operación lineal, la anti transformada de $F^*(s)$ resulta:

$$f^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT) \quad (1-9)$$

$$f^*(t) = f(t) \cdot \delta_T(t), \quad (1-10)$$

donde:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (1-11)$$

representa a un tren de impulsos (figura 1.5). Es decir, que la señal $f^*(t)$ puede considerarse como un tren de impulsos modulados por $f(t)$.

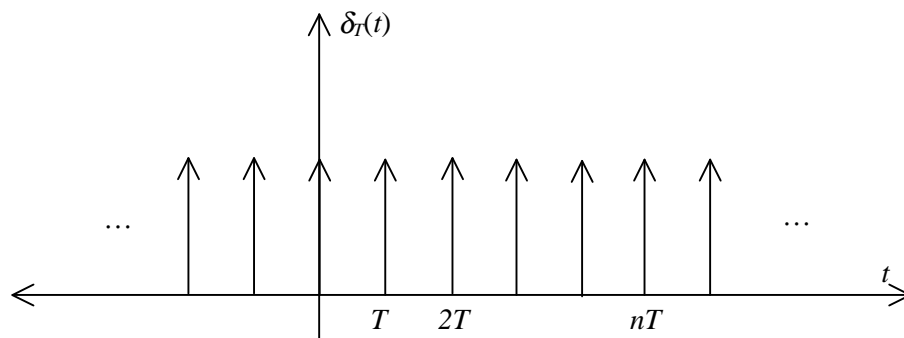


Figura 1.5. Tren de impulsos $\delta_T(t)$.

De este modo, el conjunto muestreador y convertidor D/A modelado por medio de dos bloques elementales. El primero (el muestreador), modula la señal a muestrear con un tren de impulsos. El segundo, normalmente denominado reconstructor de señal de orden cero, entrega en su salida un valor constante igual al peso del último impulso de entrada.

Según la modelización previa, la acción conjunta de los bloques A/D, controlador digital D y convertidor D/A debe interpretarse de la siguiente forma:

- El modelo del convertidor A/D entrega en su salida un tren de impulsos, cada uno de ellos pesado con el valor de la señal analógica en el instante $t = nT$ correspondiente.
- El controlador digital procesa, a través de un algoritmo recursivo, los pesos de los impulsos de entrada y cada T segundos entrega en su salida un impulso ponderado con el resultado de la ecuación recursiva.
- Por último, la acción integral del reconstructor de señal convierte el tren de impulsos entregado por el controlador digital en una señal escalonada.

I.3. CONTENIDO ARMÓNICO DE LA SEÑAL MUESTREADA.

El tren de impulsos $\delta_T(t)$ es una función periódica que puede ser desarrollada en serie de Fourier, siendo:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_r t}, \quad (1-12)$$

donde:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jn\omega_r t} dt. \quad (1-13)$$

De la figura 1.5, se observa que dentro del intervalo de integración $(-T/2, T/2)$, la función $\delta_T(t)$ sólo está definida para $t = 0$. Esto significa que c_n es igual a $1/T$ e independiente del valor n . Luego, reemplazando la ecuación (1-13) en (1-12) resulta una nueva expresión para el tren de impulsos

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_r t}, \quad (1-14)$$

que reemplazada en (1-10), permite obtener una expresión alternativa para la señal de salida del muestreador (ecuación (1-9)):

$$f^*(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{jn\omega_r t}. \quad (1-15)$$

Aplicando el teorema del desplazamiento temporal de la transformada de Laplace :

$$\mathcal{L}\{f(t) e^{\lambda t}\} = F(s - \lambda) \quad (1-16)$$

a la expresión (1-15) se obtiene

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s - jn\omega_r). \quad (1-17)$$

A partir de esta ecuación se observa que:

- La transformada $F^*(s)$ de la señal muestreada $f^*(t)$ tiene infinitos polos y ceros.
- La transformada $F^*(s)$ contiene, entre otros, los polos de la transformada de la señal continua $F(s)$.
- Los polos de la transformada $F^*(s)$ se repiten periódicamente en ω_T .
- En principio no puede decirse nada acerca de los ceros, los cuales se obtienen de la factorización de la expresión (1-17).

Sin mayores dificultades puede plantearse una expresión cerrada de la transformada $F^*(s)$ (ecuaciones (1-7) o (1-17)):

$$F^*(s) = \sum_{\text{en polos de } F(\lambda)} \left[\text{residuos de } F(\lambda) \frac{1}{1 - e^{-T(s-\lambda)}} \right]. \quad (1-18)$$

Ejemplo.

Determinar la transformada de Laplace de la señal que se obtiene al muestrear la señal continua $f(t)=1-e^{-t}$. Teniendo presente que

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)},$$

$F^*(s)$ puede calcularse empleando la ecuación (1-18)

$$F^*(s) = \sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda=-1}} \left[\text{residuos de } \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} \frac{1}{1 - e^{-T(s-\lambda)}} \right]$$

$$F^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-T \cdot s}} - \frac{1}{1 - e^{-T(s+1)}}.$$

Las figuras 1.6 a) y b) muestran la locación de polos y ceros de las transformadas $F(s)$ y $F^*(s)$ de las señales analógica y muestreada respectivamente. Se observa que es posible definir una región del plano s , normalmente denominada banda base, limitada por dos rectas horizontales definidas por:

$$\omega = \pm \frac{\omega_T}{2},$$

que se repite periódicamente cada ω_T . Se observa también, como ya fue comentado, que la locación de los polos de $F^*(s)$ en la banda base coincide con la de los polos de $F(s)$.

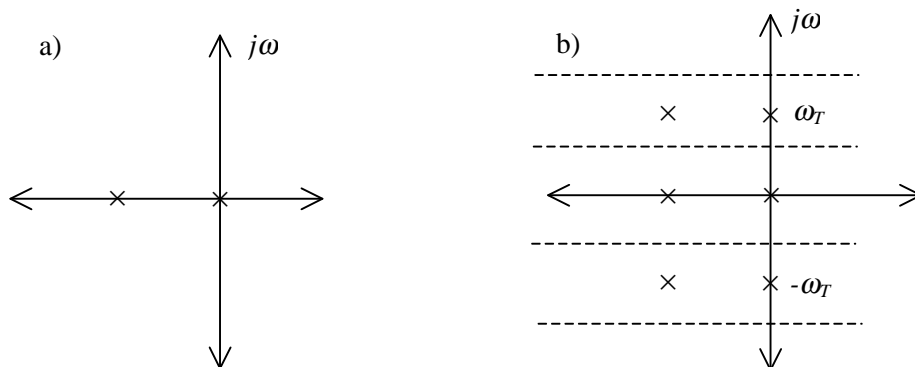


Figura 1.6. a) Diagrama cero-polar de $F(s)$.

b) Diagrama cero-polar de $F^*(s)$.

Si se desea calcular el contenido armónico de la señal muestreada $f^*(t)$ basta con evaluar el aporte de los polos y ceros de $F^*(s)$ en $s=j\omega$. Haciendo este reemplazo en (1-17) el espectro resulta:

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j\omega + jn\omega_r), \quad (1-19)$$

Debido a la repetición periódica de los polos y ceros de la banda base a lo largo de todo el plano s , también es periódico el contenido armónico de $f^*(t)$.

Se ve así, claramente, que el muestreo introduce un cambio sustancial en el espectro de la señal $f(t)$, que determina una distorsión debido a la aparición de componentes que no estaban en la entrada.

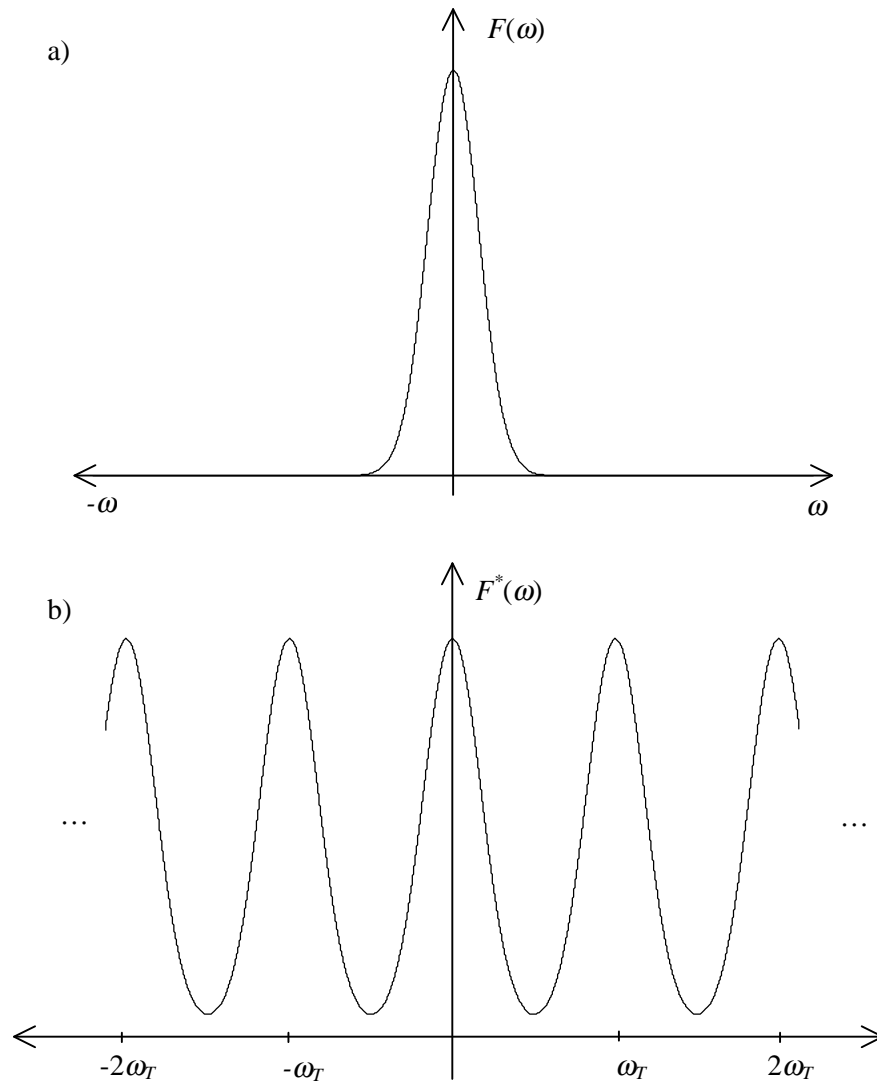


Figura 1.7. a) Contenido armónico de $f(t)$.
b) Contenido armónico de $f^*(t)$.

De acuerdo al teorema del muestreo: una señal analógica con componentes armónicos limitados por una frecuencia f_{max} puede ser reconstruida a partir de sus muestras siempre que éstas se tomen a intervalos de tiempo $T < 1/(2 \cdot f_{max})$. No obstante el enunciado del teorema implica una cierta idealización pues en realidad:

1. La mayoría de las señales no están estrictamente limitadas en frecuencia, si bien la amplitud de sus armónicos decae para frecuencias elevadas.
2. Aún en el caso de tener $T < 1/(2 \cdot f_{max})$ sería necesario emplear un filtro pasa bajos ideal para reconstruir la señal analógica, y este filtro no es realizable.

Por estos motivos el proceso de muestreo introduce una distorsión irreversible (aliasing), y por ende, no es posible recuperar la señal original en forma exacta. Cuanto menor sea el grado de cumplimiento de las condiciones del teorema, mayor será la superposición de espectros contiguos, como puede verse en la figura 1.8. Aún considerando un filtro ideal, la zona rayada aparecerá, rebatida a frecuencias menores (zona ennegrecida). Si el período de muestreo es elegido en forma incorrecta, la onda que se recupera puede diferir apreciablemente de la original. Para reducir al mínimo el solapamiento de espectros y a su vez evitar la influencia del ruido y otras señales espúreas, se suele efectuar un prefiltrado analógico antes del muestreo (filtrado antialiasing).

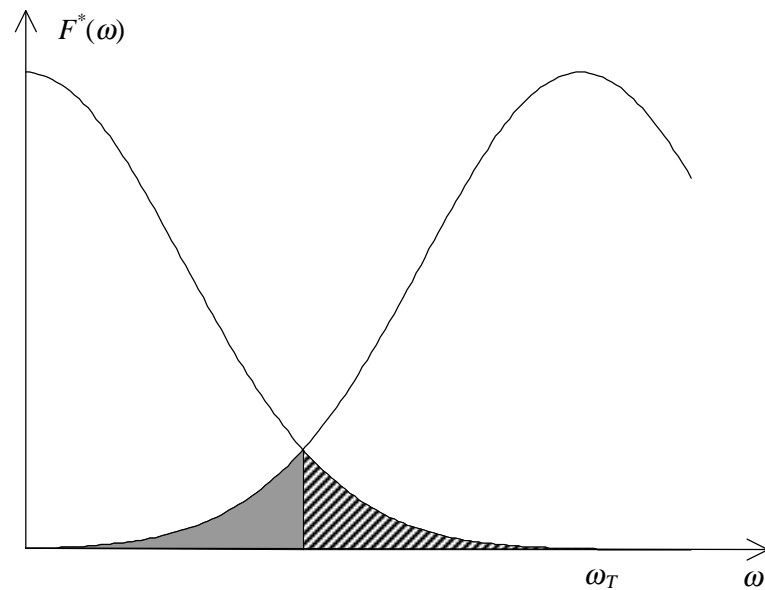


Figura 1.8. Superposición de espectros.

I.4. RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES.

Existen diversas maneras de interpolar y extrapolar una señal discreta a los efectos de obtener una señal analógica. Aquí, sólo se considera el reconstructor de orden cero, que es aquel que mantiene constante, en su salida, el último valor de la muestra de entrada. Este reconstructor es el más empleado en aplicaciones de control automático.

Reconstructor de orden cero.

La expresión de la función de transferencia de un reconstructor de orden cero fue planteada en la sección I.3 (ecuación (1-8)). Una alternativa para calcular esta función de transferencia es, directamente calcular la transformada de Laplace de la respuesta impulsional ($h(t)$) del reconstructor ante una excitación impulsional (figura 1.9).

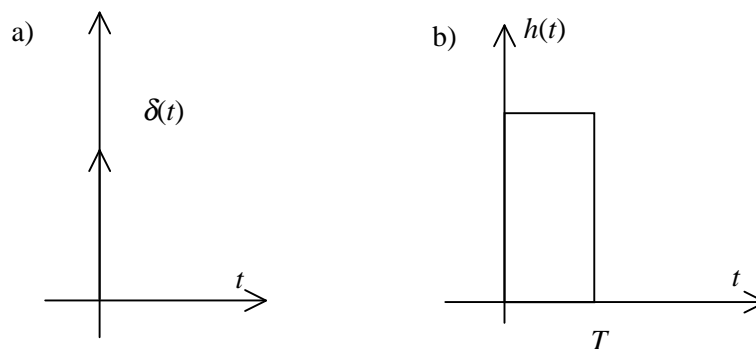


Figura 1.9. a) Excitación Impulsional.
b) Respuesta del reconstructor de orden cero.

Luego:

$$H_o(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{\mu(t) - \mu(t - T)\} \quad (1-20)$$

$$H_o(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad (1-21)$$

La respuesta en frecuencia del reconstructor de orden cero puede ser obtenida a partir del siguiente desarrollo:

$$H_o(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = \frac{2 e^{-j\omega T/2}}{\omega} \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{2j}, \quad (1-22)$$

luego:

$$H_o(j\omega) = T \frac{\text{sen}(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{-j\omega T/2}, \quad (1-23)$$

y teniendo presente que:

$$\frac{\omega T}{2} = \frac{\pi \omega}{\omega_T}, \quad (1-24)$$

resulta:

$$H_o(j\omega) = T \frac{\text{sen}(\pi \omega / \omega_T)}{\pi \omega / \omega_T} e^{-j\pi \omega / \omega_T} \quad (1-25)$$

siendo:

$$|H_o(j\omega)| = T \left| \frac{\text{sen}(\pi \omega / \omega_T)}{\pi \omega / \omega_T} \right| \quad (1-26)$$

$$\angle H_o(j\omega) = -\frac{\pi \omega}{\omega_T} + \theta \quad \theta = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{sen}(\pi \omega / \omega_T) > 0 \\ \pi & \text{si } \text{sen}(\pi \omega / \omega_T) < 0 \end{cases}$$

La figura 1.10 muestra las curvas de módulo y fase de la respuesta en frecuencia. Se observa la característica pasabajos que presenta el reconstructor de orden cero, esta característica hace que a la salida del reconstructor predominen las componentes de baja frecuencia de la señal muestreada (es decir básicamente las que corresponden a la banda base). Debido a que la ganancia no es constante en el rango de frecuencias $0 < \omega < \omega_T$ y a que la atenuación no es infinita para las frecuencias de las bandas superiores, es que la señal reconstruida difiere de la muestreada (figura 1.3).

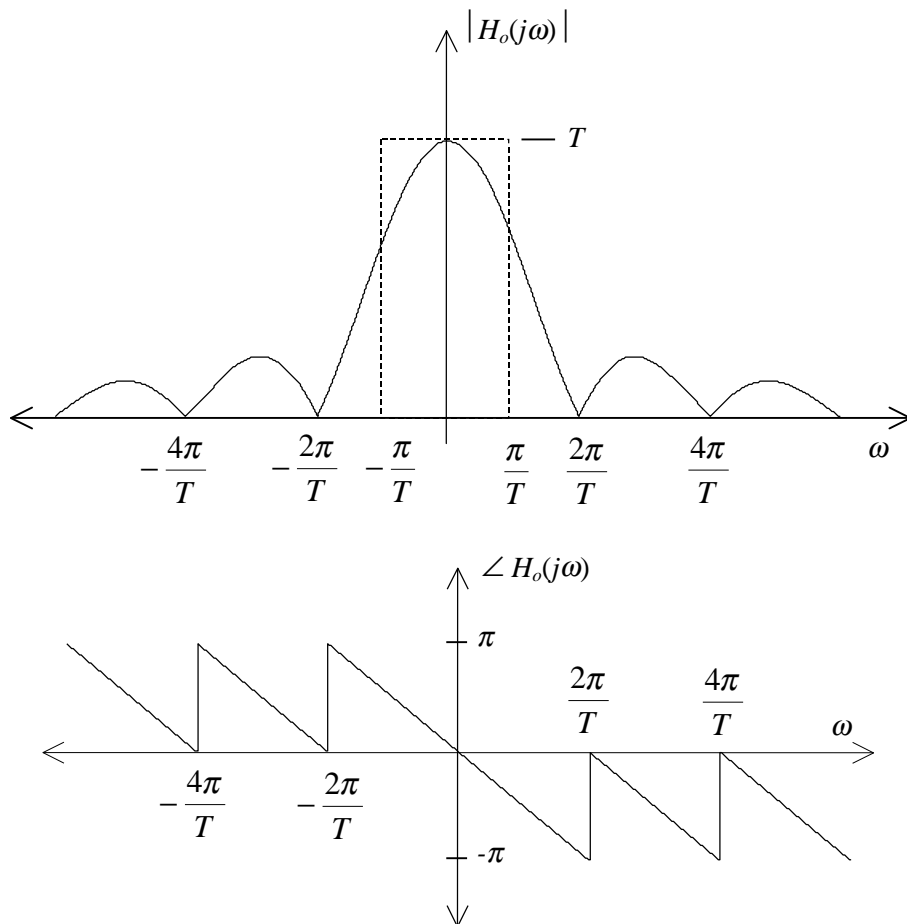


Figura 1.10. Respuesta en frecuencia del reconstructor de orden cero.

- a) Curva de módulo.
- b) Curva de fase.