CAPÍTULO DOS.

TRANSFORMADA Z.

II.1. INTRODUCCIÓN.

En el capítulo anterior se demostró que la transformada de Laplace de una señal muestreada $f^*(t)$ puede ser expresada en distintas formas:

$$F^*(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{nT}\ e^{-nsT} \tag{2-1}$$

$$F^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s - j\,n\,\omega_T) \tag{2-2}$$

$$F^*(s) = \sum_{\text{en polos de } F(\lambda)} \left[\text{residuos de } F(\lambda)\ \frac{1}{1-e^{-T(s-\lambda)}} \right]. \tag{2-3}$$

La ecuación (2-1) es una forma novedosa de ver una función transformada pues se indica, explícitamente en su estructura, la ubicación temporal de las muestras de la secuencia. Efectivamente, mientras el factor f_{nT} de cada uno de los términos señala el valor de la muestra el factor e^{-nsT} indica su desplazamiento. La ecuación (2-2) es interesante desde el punto de vista didáctico, ya que permite comprender problemas asociados a la reconstrucción de señales muestreadas. La ecuación (2-3) presenta la ventaja de ser una expresión cerrada y particularmente útil para obtener la transformada de la señal muestreada a partir de tablas de transformadas de señales continuas.

II.2. TRANSFORMADA Z.

Observando la ecuación general (2-3) se puede ver que s aparece en el factor e^{sT}. La presencia de s en forma exponencial, en todas las expresiones cerradas de $F^*(s)$, sugiere la posibilidad de un cambio de variable compleja. Se define, entonces, la variable z como:

$$z = e^{sT}\ , \tag{2-4}$$

es decir,

$$s = \frac{1}{T}\ln(z). \tag{2-5}$$

En estas condiciones se define la transformada z unilateral de una señal muestreada f_{nT} como:

$$F(z) = F^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{nT}\ z^{-n}\ . \tag{2-6}$$

La ecuación (2-6) es análoga a la (2-1) y por comparación puede interpretarse a z^{-1} como un operador de retardo de una muestra. Así z^{-n} indica, para cada valor de n, la ubicación relativa en el tiempo de los distintos valores de la secuencia.

Cuando se deben analizar señales definidas para todo tiempo, como son por ejemplo las señales aleatorias, se suele utilizar la transformada z bilateral en la cual el índice de la sumatoria se extiende de -∞ a ∞. En el caso de señales causales, $f(t)$ es nula para tiempos negativos, por lo tanto, el índice de la sumatoria se extiende de 0 a ∞ como lo muestra la ecuación (2-6).

Es importante destacar que la transformación (2-5) se realiza en $F^*(s)$ y no en $F(s)$.

Ejemplo.

Calcular la transformada z unilateral de la secuencia que se obtiene al muestrear un escalón unitario, es decir:

$$f_{nT} = \begin{cases} 1 \text{ si } n \geq 0 \\ 0 \text{ si } n < 0 \end{cases}. \tag{2-7}$$

A partir de la ecuación (2-6) se obtiene:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} , \tag{2-8}$$

que puede expresarse en forma cerrada como:

$$F(z) = \frac{z}{z-1} \qquad \text{para } |z| > 1 . \tag{2-9}$$

II.3. RELACIÓN ENTRE LOS PLANOS "S MUESTREADO" Y Z.

Cada zona del plano $s=\sigma + j\omega$, tiene su correspondiente en el plano $z=M \cdot e^{j\phi}$ siendo $M=e^{\sigma \; T}$ y $\phi=\omega T$. Resulta conveniente definir esta correspondencia para distintas zonas características. Por ejemplo, $s= j\omega$ corresponde a $z=e^{j\omega T}$, donde T representa el período de muestreo y está relacionado con la pulsación de muestreo ω_T a través de:

$$\omega_T = \frac{2\pi}{T} \tag{2-10}$$

Esto significa que la porción del eje $j\omega$ entre $-j\omega_T/2$ y $j\omega_T/2$, se corresponde en el plano z con una circunferencia de radio unitario con centro en el origen de coordenadas.

La semibanda izquierda correspondiente a σ negativo y limitada por $\pm j\omega_T/2$, resulta en puntos del plano z definidos por $M=e^{\sigma \, T}< 1$ y de argumento ϕ variando entre $-\pi$ y π. Esto significa que toda la semibanda izquierda se transforma en el interior del círculo de radio unitario. En forma análoga, toda la semibanda derecha limitada por $\pm j\omega_T/2$ tiene como superficie transformada todo el exterior del círculo de radio unitario. (Ver figura 2.1).

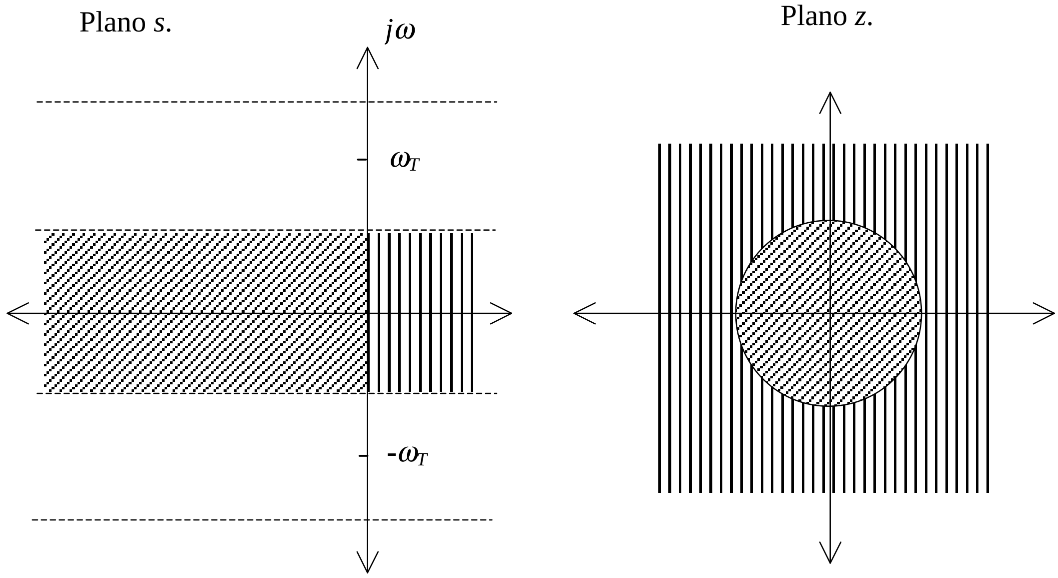

Figura 2.1. Correspondencia de puntos entre los planos *s* y *z*.

Puede verificarse, también, que todas las bandas que están comprendidas en los intervalos $j(2n+1)\omega_T/2$ y $j(2n+3)\omega_T/2$, con n entero y distinto de -1, es decir, todas las bandas de amplitud ω_T a partir de la original $(\pm j\omega_T/2)$, son transformadas según una superficie que coincide con todo el plano *z*. Cuando se transforma una señal analógica en una señal muestreada y se calcula la transformada de Laplace de la secuencia, se obtiene una función periódica, de período ω_T en el plano *s* (ecuación 2-2). Esto significa que, por ejemplo, una señal cuya transformada tiene un polo, al ser muestreada, presenta infinitos polos (ya que el polo original aparece en su posición inicial y repetido en múltiplos de ω_T). En la transformación al dominio *z*, debido a que todas las bandas están superpuestas, esa cantidad infinita de polos se convierte en una cantidad finita, lo cual hace que esta transformación sea más conveniente para analizar una secuencia.

En la ecuación (2-2) puede observarse que $F^*(s)$ repite en forma periódica los polos de $F(s)$ pero no sus ceros, ya que los ceros de $F^*(s)$ son el resultado de la sumatoria de infinitos términos. Por lo tanto, el proceso de muestreo, cambia la posición de los ceros existentes e inclusive puede generar nuevos.

Ejemplo.

Considere que la señal continua

$$f(t) = u(t)\, e^{-t/\tau} \tag{2-11}$$

$$F(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}, \tag{2-12}$$

es muestreada resultando:

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT/\tau}\ \delta(t - nT). \tag{2-13}$$

La transformada de Laplace de la secuencia de impulses que definen a la señal muestreada es:

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nT/\tau} \cdot e^{-nsT} \ , \tag{2-14}$$

$$F^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-T/\tau} \cdot e^{-sT}} \qquad \text{válida para} \qquad \left| e^{T(1/\tau + s)} \right| > 1 . \tag{2-15}$$

Haciendo ahora $\alpha = e^{-T/\tau}$ y $z = e^{sT}$; se tiene la transformada z, que para la forma cerrada es:

$$F(z) = \frac{z}{z - \alpha} . \tag{2-16}$$

Por otra parte, a partir de la ecuación (2-2), se obtiene:

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s + (1/\tau - jn\omega_T)} . \tag{2-17}$$

Factorizando la ecuación (2-17) se observa que posee infinitos polos separados en $j\omega_T$. La expresión (2-16) de la transformada z, en cambio, tiene un sólo polo en $z=\alpha$.

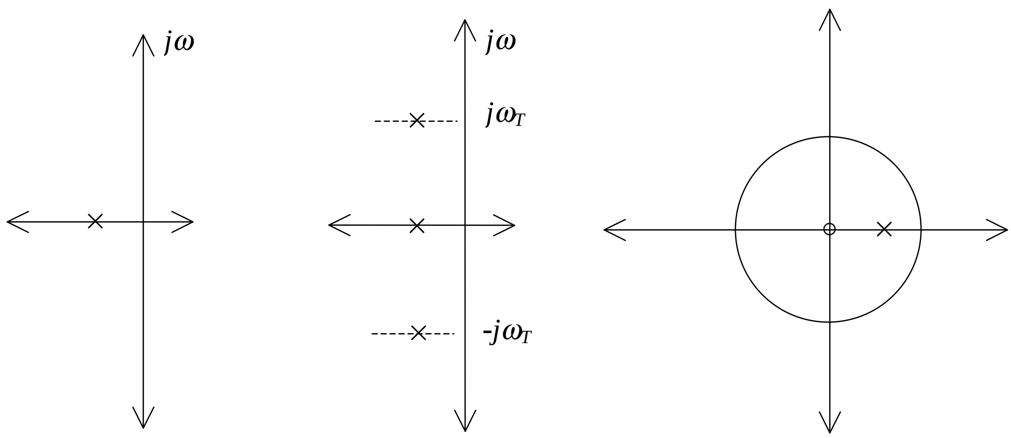

Figura 2.2. Correspondencia entre los planos s y z para un polo real.

La figura 2.2 representa la correlación entre los planos s y z. El polo en $z=\alpha$, corresponde a los infinitos polos en $s = -1/(\tau - jn\omega_T)$ debido al hecho que el plano z puede verse como la superposición de las bandas del plano s plegadas una encima de la otra. De modo que los infinitos polos se superponen dando un único polo en z.

II.4. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z.

A continuación se enuncian las principales propiedades en la aplicación de la transformada z y se analizan las más importantes.

Linealidad:

$$Z\{a \cdot x1_{nT} + b \cdot x2_{nT}\} = a\,Z\{x1_{nT}\} + b\,Z\{x2_{nT}\} \tag{2-18}$$

Desplazamiento a la derecha:

$$Z\{x_{nT-dT}\} = z^{-d} X(z) \qquad ; \quad d > 0 \tag{2-19}$$

Desplazamiento a la izquierda:

$$Z\{x_{nT+dT}\} = z^{d} [X(z) - \sum_{q=0}^{d-1} x_{qT}\, z^{-q}] \quad ; \quad d > 0 \tag{2-20}$$

Amortiguamiento:

$$Z\{x_{nT} e^{-\alpha nT}\} = X\left(z\, e^{\alpha T}\right) \tag{2-21}$$

Teorema del valor inicial:

Da el valor inicial de una señal causal muestreada a partir de la transformada de esa secuencia.

$$f(0) = \lim_{z \to \infty} F(z). \tag{2-22}$$

La ecuación (2-22) se obtiene en forma inmediata aplicando el límite a la ecuación (2-6).

Teorema del valor final:

Da el valor al cual tiende la señal muestreada a partir de su transformada *z*.

$$\lim_{n \to \infty} f_{nT} = \lim_{z \to 1} \left(1 - z^{-1}\right) \cdot F(z). \tag{2-23}$$

Para su demostración, se define la transformada *z* de la secuencia truncada en $n = N$ como:

$$F_N(z) = \sum_{n=0}^{N} f_{nT}\, z^{-n} . \tag{2-24}$$

Retardando la función una muestra y manteniendo el truncamiento en N resulta:

$$\hat{F}_N(z) = z^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_{nT}\, z^{-n} \tag{2-25}$$

Como se sigue truncando la secuencia en N muestras, la última función tiene una muestra menos que la (2-24).

Haciendo la diferencia entre las dos y tomando el límite de esta diferencia para z tendiendo a 1, se obtiene la muestra n-ésima:

$$\lim_{z \to 1} \left[F_N(z) - \hat{F}_N(z) \right] = f_{NT} . \tag{2-26}$$

Nótese que cada una de las sumatorias anteriores, en las ecuaciones (2-24) y (2-25), para N tendiendo a infinito, convergen a $F(z)$. De modo que:

$$\lim_{N\to\infty}\left[F_N(z)-\hat{F}_N(z)\right]=\left(1-z^{-1}\right)F(z). \tag{2-27}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (2-26) y (2-27) se obtiene la ecuación (2-23).

II.5. ANTITRANSFORMADA Z.

Hasta aquí se ha visto cómo se transforma una secuencia de muestras en una función de variable compleja z. El problema inverso es la antitransformación. Es decir, dada una función transformada en z, poder extraer la secuencia que le dio origen.

La ecuación (2-6) es la definición de la transformada z unilateral y tiene la forma de una serie de Laurent, cuyos coeficientes son las muestras f_{nT}. Es así, que f_{nT} puede ser definida a través de una integral de Cauchy:

$$f_{nT}=\frac{1}{2\pi j}\oint_C F(z)\,z^{n-1}\,dz. \tag{2-28}$$

La integral de línea, se extiende a una curva cerrada C que debe envolver a todos los polos del integrando y debe estar incluida en la región de convergencia de $F(z)$. La resolución de la integral puede efectuarse por el teorema de los residuos:

$$f_{nT}=\sum \mathrm{Res}\left[F(z)\,z^{n-1}\right]\quad \text{en los polos de } F(z). \tag{2-29}$$

Para una función con un polo simple en $z= z_p$ el residuo resulta:

$$\mathrm{Res}=\left(z-z_p\right)F(z)\,z^{n-1}\Big|_{z=z_p}. \tag{2-30}$$

De modo que, conocida $F(z)$, se calculan los residuos del integrando y luego aplicando la ecuación (2-29) se puede hallar f_{nT}, que es la secuencia temporal resultante del muestreo que dio origen a $F(z)$.

Ejemplo.

Sea $$F(z)=\frac{A}{1-\alpha\cdot z^{-1}}\quad \text{donde } \alpha<1. \tag{2-31}$$

Si se aplica (2-29) para obtener la antitransformada de $F(z)$ resulta

$$\mathrm{Res}=F(z)\,z^{n-1}\Big|_{z=\alpha}=A\cdot\alpha^n. \tag{2-32}$$

Es decir

$$f_{nT}=A\cdot\alpha^n. \tag{2-33}$$

Aplicando el teorema del valor inicial se obtiene $f(0) = A$ y aplicando el teorema del valor final $f(\infty) = 0$.

Del mismo modo que para la transformada de Laplace, existen tablas para la transformada z. Así es posible antitransformar una función expresándola como una suma de funciones más elementales cuyas antitransformadas se encuentran en las tablas.

Ejemplo.

Considere la transformada:

$$F(z)=\frac{z}{(z-1)\,(z-e^{-\alpha T})}\,. \tag{2-34}$$

$F(z)$ puede expresarse de la siguiente forma:

$$F(z)=\frac{1}{1-e^{-\alpha T}}\left[\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{e^{-\alpha T}}{1-e^{-\alpha T}\cdot z^{-1}}\right]. \tag{2-35}$$

Si se consulta una tabla se ve que el primer término dentro del corchete corresponde a una secuencia u_{nT} (escalón), y el segundo, a $e^{-\alpha nT}$, (serie exponencial decreciente). De modo que:

$$f_{nT}=\frac{1}{1-e^{-\alpha T}}\left[1-e^{-\alpha(n+1)T}\right] \tag{2-36}$$

INVERSIÓN NUMÉRICA.

Este método resulta útil cuando la transformada z es relativamente compleja, no siendo fácilmente distinguibles sus polos. La función $F(z)$ puede ser expresada como cociente de polinomios:

$$F(z)=\frac{\sum_{i=0}^{m}\alpha_i\ z^i}{\sum_{i=0}^{n}\beta_i\ z^i}\,. \tag{2-37}$$

Para el caso en donde los coeficientes vengan dados en forma numérica puede hacerse directamente la división de los polinomios tal como lo indica la expresión. De esta forma surgirá un nuevo polinomio:

$$F(z)=C_0+C_1\ z^{-1}+C_2\ z^{-2}+\cdots+C_n\ z^{-n}+\cdots \tag{2-38}$$

Por comparación con la definición de transformada z, (ecuación (2-6)), se obtienen los valores de f_{nT}.

Luego, efectuando la división de los polinomios componentes de $F(z)$ puede obtenerse, en consecuencia, la secuencia originaria de esa transformación.

Ejemplo.

Sea

$$F(z)=\frac{z}{z^2-1{,}414\cdot z+1}\,. \tag{2-39}$$

Realizando el cociente de los polinomios numerador y denominador se obtiene:

$$F(z)=z^{-1}+1{,}414\cdot z^{-2}+z^{-3}+z^{-5}-1{,}414z^{-6}-\cdots \tag{2-40}$$

De modo que:

$$
\begin{aligned}
f(0) &= f(4) = f(8) = \cdots = 0 \\
f(1) &= f(3) = f(9) = \cdots = 1 \\
f(2) &= f(10) = \cdots\cdots \quad = 1.414 \\
f(5) &= f(7) = f(13) = \cdots = -1 \\
f(6) &= f(14) = \cdots\cdots \quad = -1.414
\end{aligned}
$$

Si se representan gráficamente los valores anteriores puede intuirse que corresponden a una función seno muestreada (figura 2.3).

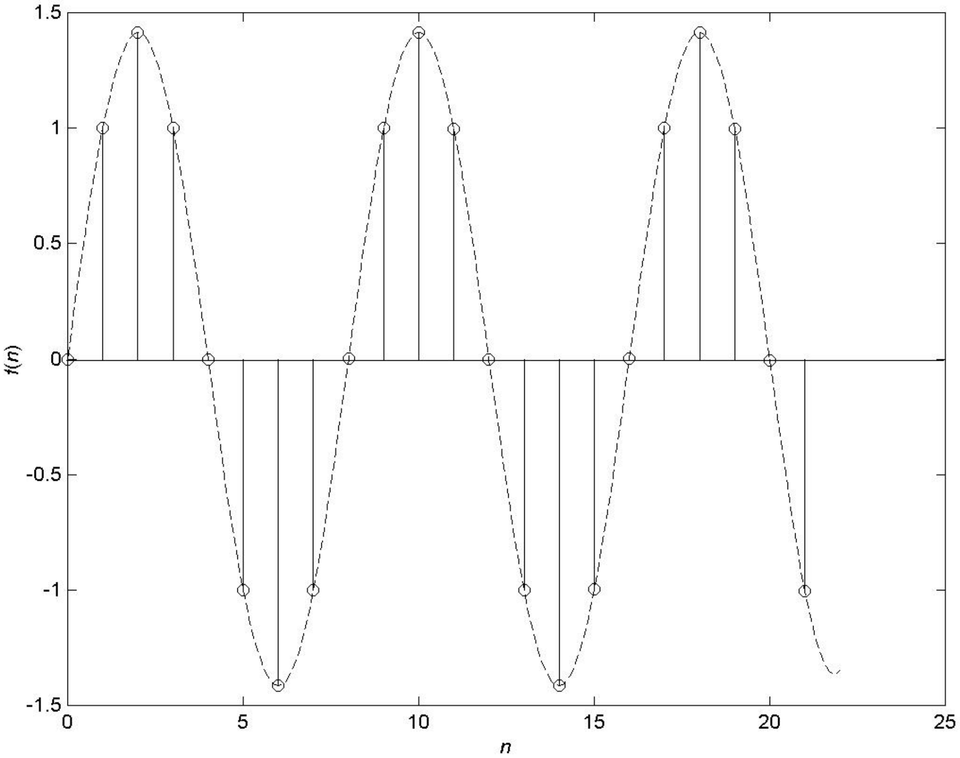

Figura 2.3. Muestras de la función seno cada *T* segundos.