

## CAPÍTULO TRES.

### FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA Y COMPORTAMIENTO TRANSITORIO DE SISTEMAS MUESTREADOS.

#### III.1. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA.

En forma análoga a como se define la función de transferencia en un sistema continuo, es posible definir la función de transferencia de un sistema digital.

En un sistema continuo, lineal e invariante en el tiempo la señal de salida del sistema ( $y(t)$  de la figura 3.1), es el resultado de la convolución entre la respuesta impulsional  $g(t)$  y la excitación  $r(t)$ .

$$y(t) = g(t) * r(t) = \int_0^{\infty} r(\tau) g(t - \tau) d\tau . \quad (3-1)$$

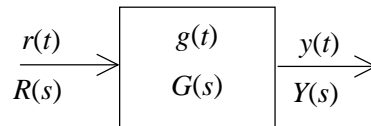


Figura 3.1. Sistema Continuo.

Aplicando la transformada de Laplace a esta ecuación se obtiene:

$$Y(s) = G(s) \cdot R(s) , \quad (3-2)$$

donde la transformada de la respuesta impulsional  $G(s)$  se denomina función de transferencia del sistema.  $G(s)$  no depende de la excitación sino, exclusivamente, de los parámetros característicos del mismo. A partir de su conocimiento se puede conocer la respuesta del sistema a cualquier excitación:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s) \cdot R(s)] . \quad (3-3)$$

En sistemas muestreados, y en particular en sistemas digitales de control, puede definirse un proceso digital como un bloque (D) en el cual ingresan muestras que son procesadas a través de algún algoritmo a partir del cual resulta la secuencia de muestras de salida.

En forma análoga a lo que sucede en sistemas continuos, si se conoce la respuesta impulsional muestreada  $d$  del sistema digital, es posible calcular la respuesta a cualquier excitación  $r$  a partir de ésta. El razonamiento a seguir para hallar la respuesta a la secuencia  $r$ , es considerar a esta última descompuesta en impulsos de Kronecker aislados, hallar cuál es la contribución de cada uno de éstos a la salida y aplicar luego superposición considerando que el sistema es lineal. Para esto se considera un instante  $mT$ , el valor  $yn_{mT}$  es la componente de salida en el instante  $m$  debido al impulso que ocurrió en el tiempo  $n$ . Por lo tanto:

$$yn_{mT} = r_{nT} \cdot d_{(m-n)T} \quad (3-4)$$

donde  $d_{mT}$  es la respuesta del sistema al impulso de Kronecker.

Análogamente, para cada una de las muestras se tendrá la componente de salida que contempla el efecto de todos los impulsos anteriores en el instante  $m$ .

$$y_{mT} = \sum_{n=0}^m r_{nT} \cdot d_{(m-n)T} \quad (3-5)$$

Esta suele denominarse sumatoria de convolución y permite, a través del conocimiento de la respuesta impulsional del sistema digital, obtener la secuencia de respuesta a cualquier entrada.

Por otra parte la transformada  $z$  de esta respuesta será:

$$Y(z) = \sum_{m=0}^{\infty} y_{mT} \cdot z^{-m} . \quad (3-6)$$

Utilizando la ecuación (3-5) y definiendo la transferencia muestreada  $D(z)$  del proceso digital como la transformada de la respuesta al impulso:

$$D(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{nT} \cdot z^{-n} , \quad (3-7)$$

se obtiene:

$$Y(z) = D(z) \cdot R(z) . \quad (3-8)$$

$D(z)$  indica la relación que existe entre la transformada  $z$  de la secuencia de salida y la transformada  $z$  de la secuencia de entrada. La función de transferencia  $D(z)$  resulta un cociente de polinomios en  $z$  :

$$D(z) = \frac{\sum_{i=0}^m B_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{n'} A_i z^{-i}} . \quad (3-9)$$

Si se considera  $A_0=1$ , se reemplaza la ecuación (3-9) en la ecuación (3-8), al antitransformar se obtiene:

$$y_{nT} = \sum_{i=0}^m B_i r_{(n-i)T} - \sum_{i=1}^{n'} A_i y_{(n-i)T} . \quad (3-10)$$

Esta ecuación es de suma importancia, pues relaciona una muestra de la secuencia de salida del proceso digital, con las muestras anteriores de la misma y con las entradas en el mismo instante de tiempo y en los anteriores. Esta ecuación juega un papel similar al de la ecuación diferencial en sistemas continuos.

La ecuación (3-10) describe al proceso digital (es el algoritmo que ejecuta la computadora), el cual posee diversas características según se anulen algunos de sus coeficientes. Este hecho da lugar a una clasificación de los procesos digitales.

Si todos los coeficientes  $B_i$  excepto el primero, son nulos, el proceso se denomina autorregresivo (AR) (ecuación 3-11).

$$y_{nT} = B_0 r_{nT} - \sum_{i=1}^{n'} A_i y_{(n-i)T} . \quad (3-11)$$

Observando la ecuación (3-9), se concluye que un proceso autorregresivo de grado  $n$  posee solamente polos, en el plano  $z^{-1}$ . En el plano  $z$  tendrá, además de los polos correspondientes, un cero múltiple de grado  $n$  en el origen.

Si en cambio, en la ecuación (3-10) se anulan todos los coeficientes  $A_i$  se obtiene un proceso cuya salida no depende de las salidas anteriores, (ecuación (3-12)) y que se denomina proceso a media móvil (MA).

$$y_{nT} = \sum_{i=0}^m B_i r_{(n-i)T} \cdot \quad (3-12)$$

A partir de la ecuación (3-12), se observa que un proceso a media móvil no posee polos en el plano  $z^{-1}$ . En el plano  $z$ , además de los ceros correspondientes, tendrá un polo múltiple de grado  $m$  en el origen.

En las secciones anteriores se analizaron a las secuencias discretas como caso particular de señales analógicas muestreadas en forma periódica. En tales circunstancias existía una correspondencia entre los polos de la transformada de Laplace de la señal analógica y los polos de la transformada  $z$  de la secuencia discreta.

Teniendo en cuenta la correspondencia entre planos, el origen del plano  $z$  corresponde a  $\text{Re}\{s\}=-\infty$ . Esto significa que un proceso a media móvil no puede obtenerse como consecuencia del muestreo de una señal continua. De ser así, la misma debería haber sido generada como la respuesta al impulso de Dirac de un filtro analógico cuya función de transferencia tuviera únicamente ceros finitos.

La analogía existente entre los procesos continuos y discretos podría inducir a creer, en forma errónea, que un proceso a media móvil, por tener solamente ceros debería poseer un espectro de amplitudes crecientes con la frecuencia. Sin embargo, si se analiza la respuesta en frecuencia de un filtro promediador (ecuación (3-13)) se observa, que a pesar de ser un filtro a media móvil, presenta una característica de amplitud similar a la de un filtro pasabajos.

$$y_{nT} = \frac{(r_{nT} + r_{(n-1)T} + r_{(n-2)T} + \dots + r_{(n-m)T})}{(m+1)} \cdot \quad (3-13)$$

Si se analiza la respuesta impulsional de un proceso digital a media móvil (ecuación (3-12)), se observa que la misma se anula para todo índice  $n$  mayor que  $m$ . Debido a esta propiedad, a los filtros a media móvil también se los suele denominar filtros de respuesta impulsional finita (FIR).

Además, existen filtros digitales cuya respuesta al impulso es de duración infinita. Estos filtros de respuesta impulsional infinita (IIR) poseen en su función de transferencia, por lo menos, un polo que no se encuentra en el origen del plano  $z$ .

Sin embargo, es importante destacar que un filtro digital lineal puede simular a uno analógico pero también, pueden diseñarse filtros digitales cuyas características no son obtenibles con filtros analógicos lineales.

## III.2. INTERCONEXIÓN DE PROCESOS DIGITALES Y ANALÓGICOS.

### III.2.a. Interconexión de procesos digitales.

La interconexión serie de dos procesos digitales se muestra en la figura 3.2.

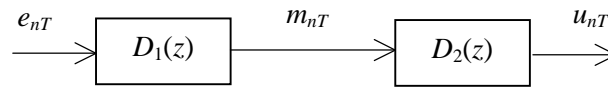


Figura 3.2 Sistemas digitales en cascada.

Dado el diagrama en bloques de la figura 3.2 la función de transferencia total  $D(z)$  que relaciona la transformada  $z$  de la secuencia de salida  $U(z)$  con la transformada  $z$  de la secuencia de entrada  $E(z)$  es la dada en la ecuación (3-14).

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{M(z)}{E(z)} \frac{U(z)}{M(z)} = D_1(z) \cdot D_2(z) \quad (3-14)$$

### III.2.b. Interconexión de procesos digitales y analógicos.

*A lazo abierto:*

En los sistemas de control digital, una parte del sistema es un proceso digital y otra parte del mismo es un proceso continuo.

En general se tendrá un esquema como el siguiente:

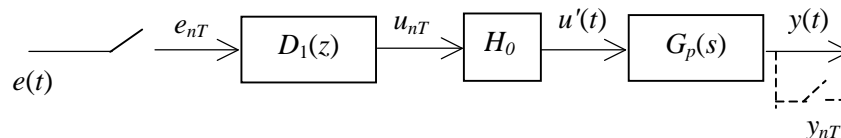


Figura 3.3. Interconexión de sistemas digitales y continuos.

$D_1(z)$  caracteriza al proceso digital. La secuencia de valores de salida representados por  $u_{nT}$  son interpolados por el reconstructor de orden cero  $H_0(s)$ . Luego, la señal resultante (analógica)  $u'(t)$  excita al proceso  $G_p(s)$ .

Se ha visto que un sistema muestreado puede ser analizado mediante el empleo de la transformada  $z$  y uno continuo mediante la transformada de Laplace. Se debe, pues, unificar el tratamiento de algún modo.

Sólo tiene sentido plantear la transformación  $z$  a señales discretas o muestreadas, y por consiguiente no puede plantearse una transferencia digital que vincule la entrada y salida del proceso a controlar  $G_p(s)$ .

A los efectos de poder realizar todo el estudio del sistema empleando sólo la transformación  $z$ , puede analizarse el comportamiento temporal de la variable de salida  $y(t)$  a través de muestras tomadas cada  $T$  segundos. De acuerdo a esto puede considerarse una llave (ficticia), que toma muestras de la salida.

Así pueden plantearse las siguientes funciones de transferencia digitales:

$$D_1(z) = \frac{U(z)}{E(z)}, \quad (3-15)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = Z\{H_0(s) \cdot G_p(s)\}, \quad (3-16)$$

$$T(z) = \frac{Y(z)}{E(z)}. \quad (3-17)$$

Sin embargo, no puede plantearse una transferencia digital que describa exactamente la vinculación entre las salidas del proceso y del reconstructor.

La transferencia digital  $G(z)$  puede ser hallada más explícitamente teniendo en cuenta la transferencia analógica del reconstructor de orden cero:

$$G(z) = Z\{H_0(s) G_p(s)\} = Z\left\{\frac{1 - e^{-sT}}{s} G_p(s)\right\}, \quad (3-18)$$

luego:

$$G(z) = Z\left\{\frac{G_p(s)}{s} - \frac{G_p(s)e^{-sT}}{s}\right\}, \quad (3-19)$$

y teniendo en cuenta las propiedades de linealidad y desplazamiento de la transformada  $z$ , resulta:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) Z\left\{\frac{G_p(s)}{s}\right\}. \quad (3-20)$$

Entonces, la transferencia total  $T(z)$  resulta:

$$T(z) = D_1(z) (1 - z^{-1}) Z\left\{\frac{G_p(s)}{s}\right\}. \quad (3-21)$$

Se analiza ahora, el diagrama en bloques de la figura 3.4.

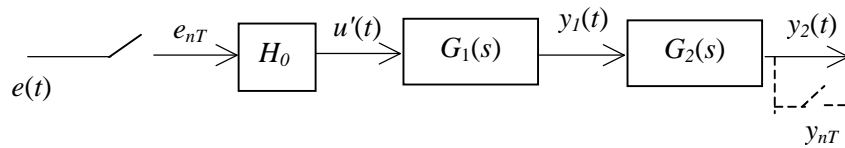


Figura 3.4.

De acuerdo a la discusión previa la transferencia digital  $T(z)$  resulta:

$$T(z) = \frac{Y_2(z)}{E(z)} = (1 - z^{-1}) Z\left\{\frac{G_1(s) G_2(s)}{s}\right\}, \quad (3-22)$$

debiendo quedar claro que:

$$T(z) \neq (1 - z^{-1}) G_1(z) G_2(z). \quad (3-23)$$

Esto se debe a que  $G_2$  es excitado con una señal continua en el tiempo (no por las muestras de  $y_1(t)$ ), dependiendo  $y_2(t)$  de cómo varía la señal  $y_1(t)$  tanto de sus valores en los instantes de muestreo como en los instantes intermedios.

Ejemplo.

Sea el diagrama en bloques de la figura 3.4, con:

$$G_{p1}(s) = \frac{1}{s} \quad \text{y} \quad G_{p2}(s) = \frac{a}{s+a}.$$

- Hallar la transformada  $z$  de la conexión en cascada.
- Repetir el cálculo, incorporando un muestreador entre  $G_{p1}$  y  $G_{p2}$ .

Aplicando las expresiones analizadas anteriormente, se obtiene:

a)

$$[G_1 G_2](z) = \frac{z(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})} \quad (3-24)$$

b)

$$G_1(z) \cdot G_2(z) = \frac{z^2 \cdot a}{(z-1)(z - e^{-aT})} \quad (3-25)$$

donde puede verificarse que  $[G_1 G_2](z) \neq G_1(z) \cdot G_2(z)$ .

A lazo cerrado:

La figura 3.5 muestra un esquema general de lazo cerrado que emplea un controlador digital.

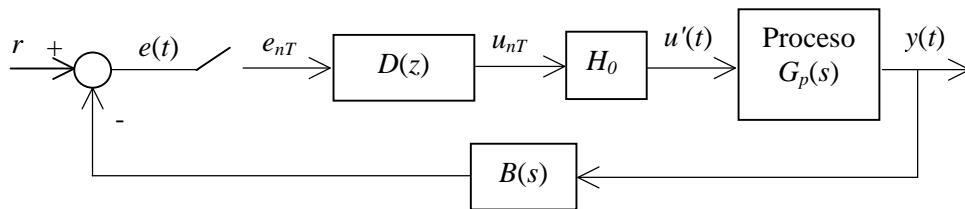


Figura 3.5. Sistema de control digital a lazo cerrado.

En base a la discusión previa y teniendo en cuenta que el muestreador puede ser reemplazado por otros dos, uno que muestrea la variable controlada y otro la referencia, la función de transferencia que relaciona la transformada  $z$  de la secuencia de salida con la transformada  $z$  de la secuencia de referencia está dada por:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{D(z) \cdot G(z)}{1 + D(z) \cdot (GB(z))}, \quad (3-26)$$

con

$$G(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G_p(s)}{s} \right\}, \quad (3-27)$$

$$GB(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G(s) \cdot B(s)}{s} \right\}. \quad (3-28)$$

### III.3. CARACTERISTICAS TEMPORALES DE LA RESPUESTA AL IMPULSO.

Dada una función de transferencia de un sistema continuo de segundo orden (ecuación (3-29)), su comportamiento temporal transitorio está directamente asociado a la ubicación de los polos en el plano  $s$ .

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2}. \quad (3-29)$$

Es sabido, que si la función de transferencia posee polos complejos conjugados, la respuesta temporal será subamortiguada, si son reales y coincidentes, la respuesta es amortiguada crítica y si son reales y distintos, es sobreamortiguada.

Debido a que la ubicación de los polos en el plano  $s$  está definida por los valores de  $\xi$  (coeficiente de amortiguamiento), y  $\omega_n$  (pulsación natural) (o bien por los parámetros  $\sigma = -\xi \cdot \omega_n$  y  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ ) de la ecuación (3-29) es de interés ver cómo se mapean al plano  $z$  las curvas del plano  $s$  que corresponden a valores constantes de estos parámetros:

a)  $\sigma = -\xi \cdot \omega_n = \text{constante}$  (figura 3.6).

La transformación que mantiene la respuesta impulsional está dada por  $z = e^{sT}$ . Por lo tanto, las curvas con  $\sigma = \text{cte}$  (figura 3.6) se mapean al plano  $z$  según la ecuación  $z = e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega T}$  es decir en circunferencias centradas en el origen del plano  $z$  y de radio  $e^{\sigma T}$  (figura 3.7).

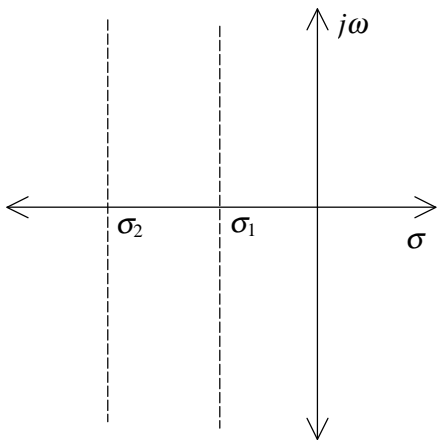


Figura 3.6.

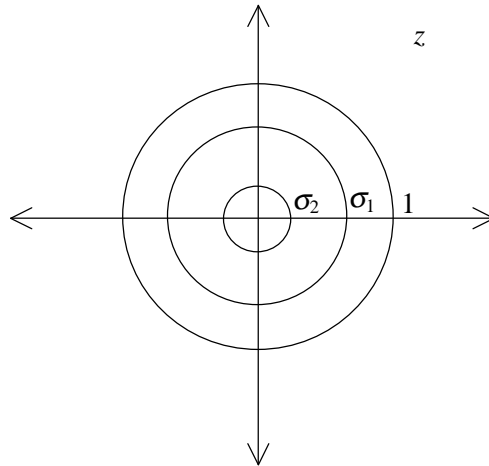


Figura 3.7.

b)  $\omega_d = \text{constante}$  (figura 3.8).

En esta situación la transformación  $z=e^{sT}$  resulta  $z=e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega_d T}$ . Es decir que la fase de los puntos  $z$  (correspondiente a puntos  $s$  con  $\omega_d$  constante) es constante e igual a  $\omega_d \cdot T$ , mientras que el módulo varía con  $\sigma$  (figuras 3.8 y 3.9).

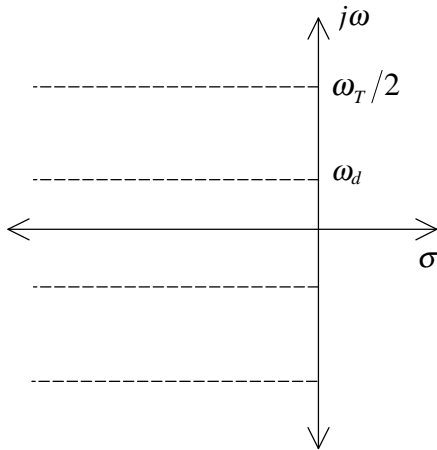


Figura 3.8.

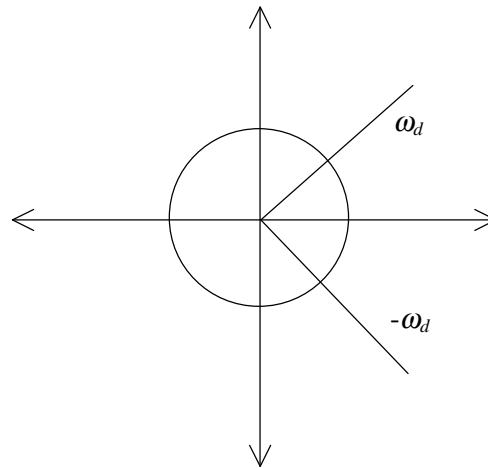


Figura 3.9.

c)  $\xi = \text{constante}$  (figura 3.10).

En este caso las curvas se mapean como  $z=e^{-\xi\omega T} \cdot e^{j\omega T} = K^{\omega T} \cdot e^{j\omega T}$  dando origen en el plano  $z$  a espirales que comienzan en  $z=1$  y terminan en  $z=0$  (figura 3.11).

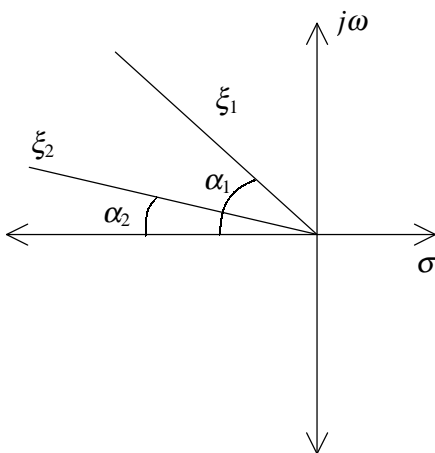


Figura 3.10.

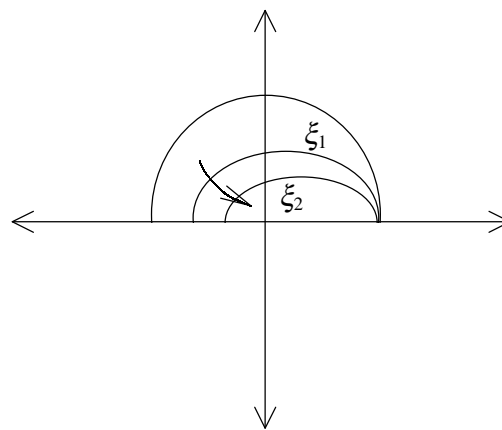


Figura 3.11.

d)  $\omega_n = \text{constante}$  (figura 3.12).

El mapeo de estas curvas al plano  $z$  se observa en la figura 3.13.



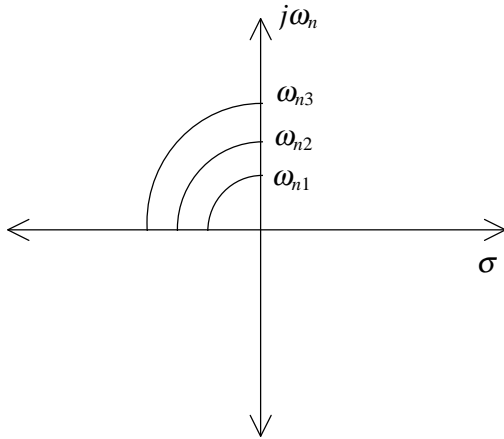


Figura 3.12.

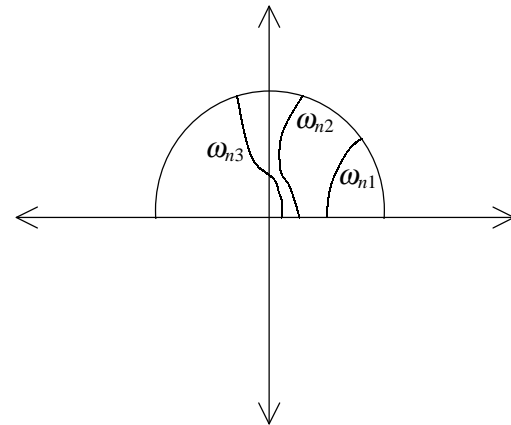


Figura 3.13.

Debido a que la transformación propuesta mantiene la respuesta impulsional se analizará la respuesta al impulso de Kronecker.

Para el sistema digital proveniente del sistema analógico de la ecuación 3-29, la función de transferencia en  $z$  es:

$$G(z) = \frac{\omega_n^2 z (e^{s_1 T} - e^{s_2 T})}{(s_1 - s_2) [z^2 - (e^{s_1 T} + e^{s_2 T}) z + (e^{s_1 T} e^{s_2 T})]}, \quad (3-30)$$

donde  $s_1 \neq s_2$  son las raíces del polinomio denominador de la ecuación (3-29). Puede verificarse que la locación de los polos (exclusivamente de los polos) en el plano  $z$  puede ser calculada a partir de los polos de la señal analógica mediante la transformación  $z = e^{sT}$ .

A partir de la ecuación anterior se puede encontrar la respuesta al impulso del sistema digital para diferentes posiciones de sus polos.

Caso A: Polos complejos conjugados con parte real negativa.

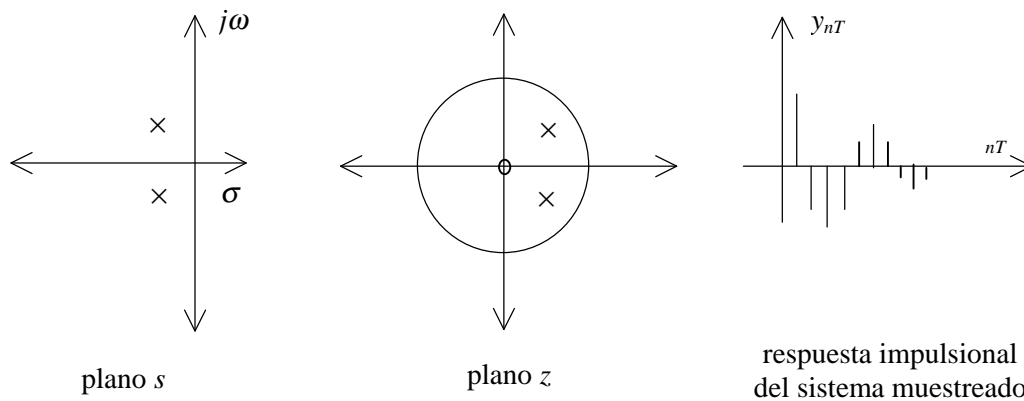


Figura 3.14.

Caso B: Polos complejos conjugados con parte real nula.

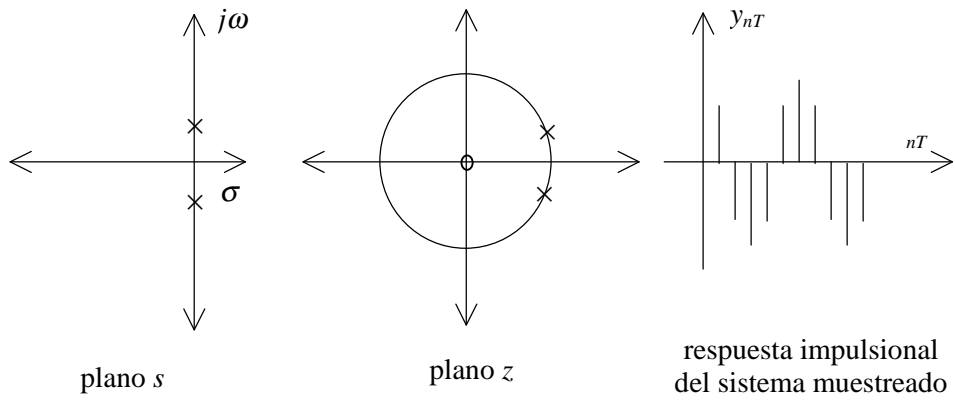


Figura 3.15.

Caso C: Polos complejos conjugados con parte real positiva.

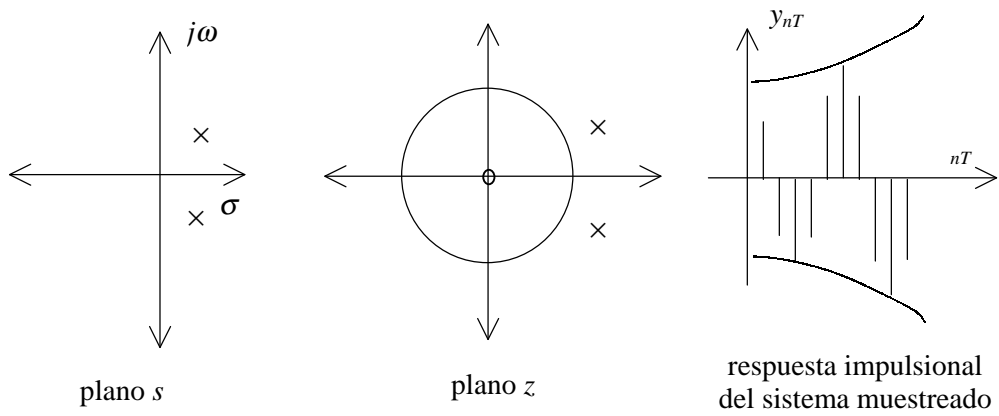


Figura 3.16.

Caso D: Polos complejos conjugados con parte real negativa y parte imaginara  $\omega_T/2$ .

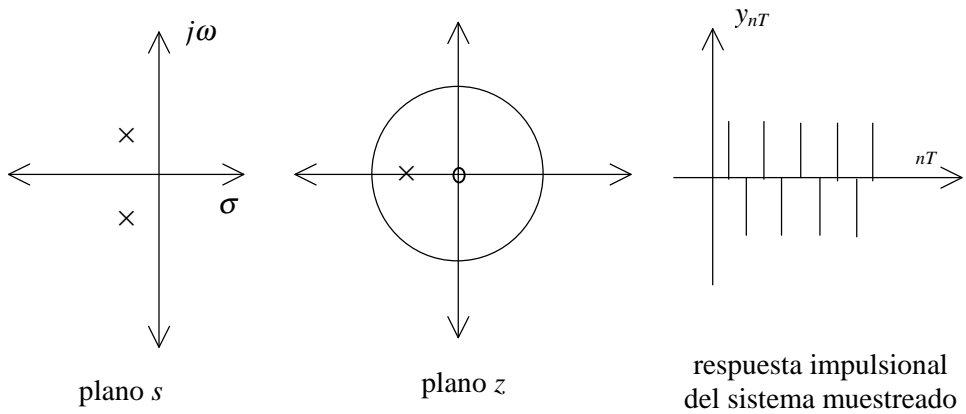


Figura 3.17.

Caso E: Polos reales y distintos con parte real negativa.

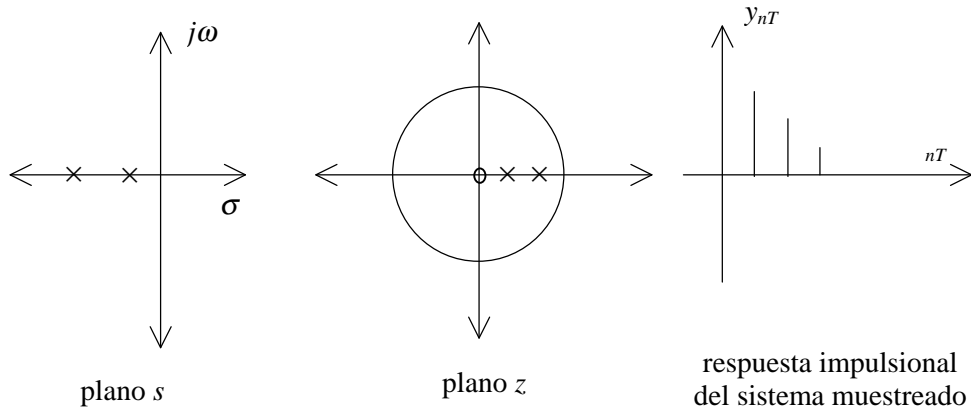


Figura 3.18.

### III.4. ERROR DE ESTADO ESTACIONARIO.

Una característica importante de un sistema de control es su capacidad para seguir ciertos tipos de entrada con un mínimo error. Debido a esto es que el comportamiento de estado estacionario de un sistema de control a lazo cerrado suele evaluarse analizando el valor de estado estacionario de la señal de error cuando se excita el sistema con señales de referencia particulares tales como: escalón, rampa y parábola.

Este criterio se puede emplear en un sistema de control digital de lazo cerrado si se analiza el valor de estado estacionario de la secuencia de error.

Si se considera un sistema de control digital con realimentación unitaria, la función de transferencia de lazo cerrado es:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{D(z) G(z)}{1 + D(z) G(z)}, \quad (3-31)$$

donde

$$G(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}. \quad (3-32)$$

La función de transferencia de lazo abierto  $D(z) \cdot G(z)$  se puede expresar como:

$$D(z) G(z) = \frac{K \cdot \prod_{i=1}^m (z - z_i)}{(z - 1)^N \prod_{j=1}^p (z - z_j)}, \quad (3-33)$$

donde  $N$  es un número entero y define, en forma análoga a lo que sucede en sistemas continuos, el tipo de sistema. Como se ve a continuación, el error de estado estacionario del sistema de lazo cerrado, a distintos tipos de excitación, está íntimamente asociado a  $N$ .

Se definirá, por conveniencia, el valor  $K_c$ :

$$K_c = \left. \frac{K \cdot \prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{j=1}^p (z - z_j)} \right|_{z=1}. \quad (3-34)$$

La secuencia error del sistema se define como la diferencia entre la secuencia de entrada al sistema y la secuencia de salida:

$$E(z) = R(z) - Y(z). \quad (3-35)$$

Combinando las ecuaciones (3-32) y (3-35) se obtiene:

$$E(z) = \frac{R(z)}{1 + D(z) G(z)}. \quad (3-36)$$

El valor de estado estacionario  $e_{ss}$  se puede obtener utilizando el teorema del valor final:

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{R(z)}{1 + D(z) G(z)}. \quad (3-37)$$

Se analizarán ahora los casos particulares en que la entrada es un escalón o una rampa.

1) Entrada: secuencia escalón unitario.

Si la secuencia de entrada es un escalón  $R(z) = \frac{z}{z-1}$ ; reemplazando  $R(z)$  en la ecuación (3-37) se obtiene:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} D(z) G(z)}. \quad (3-38)$$

Si se define la constante de error de posición como:

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} D(z) G(z), \quad (3-39)$$

entonces si  $N=0$ ,  $K_p = K_c$  y

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_c}. \quad (3-40)$$

Para  $N \geq 1$ ,  $K_p = \infty$  y el error de estado estacionario a una excitación en escalón es cero.

2) Entrada: secuencia rampa.

Si la secuencia de entrada es una rampa  $R(z) = \frac{T \cdot z}{(z-1)^2}$ , entonces:

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}, \quad (3-41)$$

siendo  $K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{T} (z-1) D(z) G(z)$ .

Entonces si  $N=0$ ,  $K_v=0$  y el error de estado estacionario a la rampa resulta infinito. Lo cual pone de manifiesto la incapacidad de un sistema de tipo cero para seguir este tipo de excitación.

$$\text{Si } N=1, K_v = \frac{K_c}{T} \text{ y } e_{ss} = \frac{T}{K_c}.$$

Para  $N \geq 2$ ,  $K_v = \infty$  y  $e_{ss} = 0$ .