

CAPÍTULO CUATRO.

ESTABILIDAD EN SISTEMAS DE CONTROL MUESTREADO.

IV.1. INTRODUCCIÓN.

Las técnicas para el estudio de la estabilidad de sistemas muestreados de control son analizadas en este capítulo. En general, los métodos de estudio de la estabilidad de sistemas continuos son también aplicables al análisis de sistemas muestreados, si ciertas modificaciones son realizadas. Estos métodos incluyen el criterio de Routh–Hurwitz, el método del lugar de las raíces y los métodos de análisis frecuencial. También es analizado el criterio simplificado de Jury que es una técnica especialmente desarrollada para analizar la estabilidad de sistemas de tiempo discreto.

Con el fin de enfatizar las similitudes y diferencias entre los sistemas de tiempo continuo y discreto, se compara la estabilidad de un sistema de control continuo con el de su equivalente discreto.

En sistemas continuos, la estabilidad se analiza a partir del denominador (ecuación característica) de la función de transferencia de lazo cerrado:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}. \quad (4-1)$$

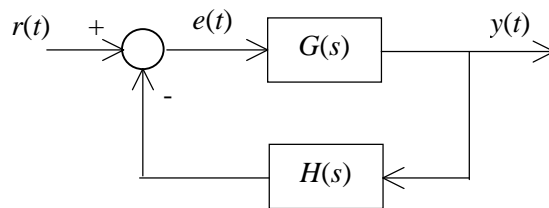


Figura 4.1. Sistema de Control de tiempo continuo.

La posición de las raíces de la ecuación característica $(1 + GH(s))$, determina la estabilidad del sistema. El límite de la región de estabilidad en el plano s es el eje $j\omega$, debido a que polos con parte real negativa implican una respuesta que se amortigua en el tiempo.

Si se muestrea la señal de error y se utiliza un reconstructor de orden cero, se obtiene el sistema de control de tiempo discreto de la figura 4.2.

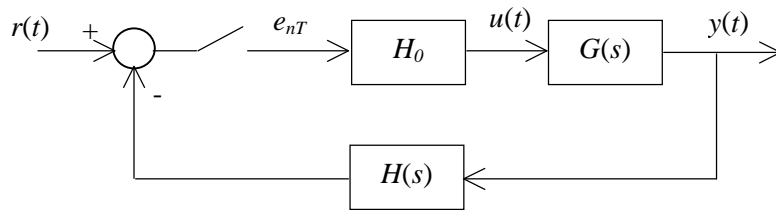


Figura 4.2. Sistema de Control de tiempo discreto.

La función de transferencia entrada-salida correspondiente al diagrama en bloques de la figura 4.2, ha sido deducida en el capítulo 3 y está dada por:

$$T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)}, \quad (4-2)$$

con:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}, \quad (4-3)$$

$$GH(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G(s)H(s)}{s} \right\}. \quad (4-4)$$

Los distintos métodos para el estudio de la estabilidad de un sistema muestreado de control, como asimismo su comparación con su símil de tiempo continuo son analizados mediante un ejemplo.

Ejemplo.

Sea una planta de segundo orden de función de transferencia dada por:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}, \quad (4-5)$$

la cual se realimenta en forma unitaria.

El sistema equivalente de tiempo discreto se obtiene intercalando en el lazo directo un muestreador y un reconstructor de orden cero (figura 4.2). La función de transferencia entrada-salida correspondiente está dada por:

$$T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)}, \quad (4-6)$$

con:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{1}{s^2(s+1)} \right\}. \quad (4-7)$$

Si se elige un período de muestreo de $T = 0,1$ seg. se obtiene:

$$G(z) = \frac{0.00484z + 0.00468}{(z-1)(z-0.905)} \quad ; \quad T = 0.1 \text{ seg.} \quad (4-8)$$

Si se elige un período de muestreo mayor $T = 1$ seg., se obtiene:

$$G(z) = \frac{0.368z + 0.264}{(z-1)(z-0.368)} \quad ; \quad T = 1 \text{ seg.} \quad (4-9)$$

En las partes a) b) y c) de la figura 4.3 se han representado las respuestas al escalón del sistema analógico de lazo cerrado y de su similar muestreado para períodos de muestreo de $T = 0.1$ seg. y $T = 1$ seg. respectivamente.

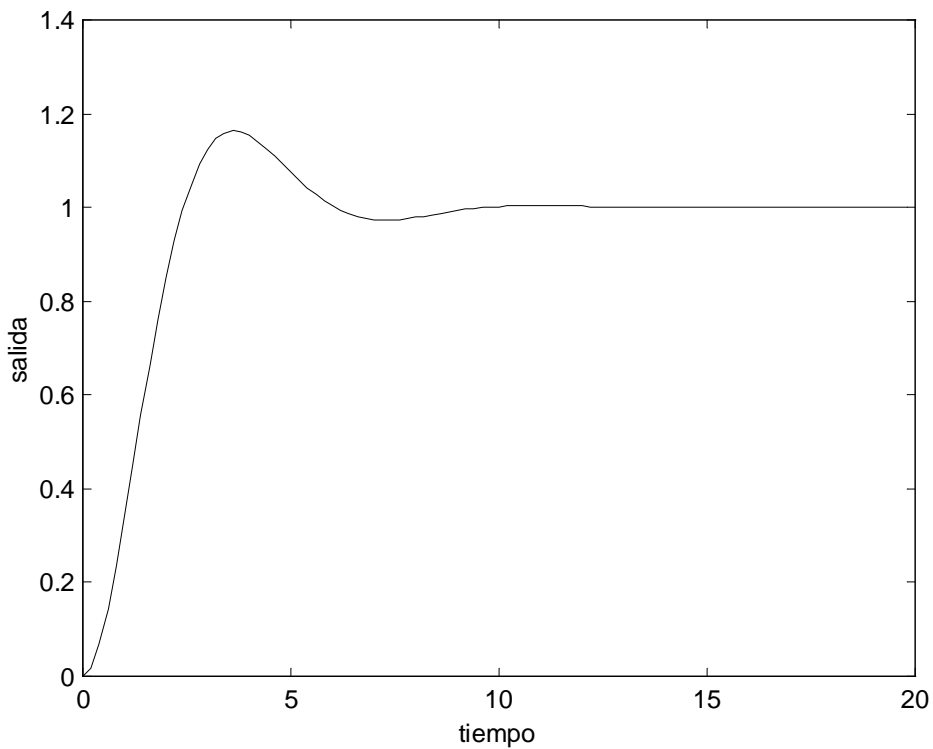


Figura 4.3. a) Respuesta al escalón del sistema analógico en lazo cerrado.

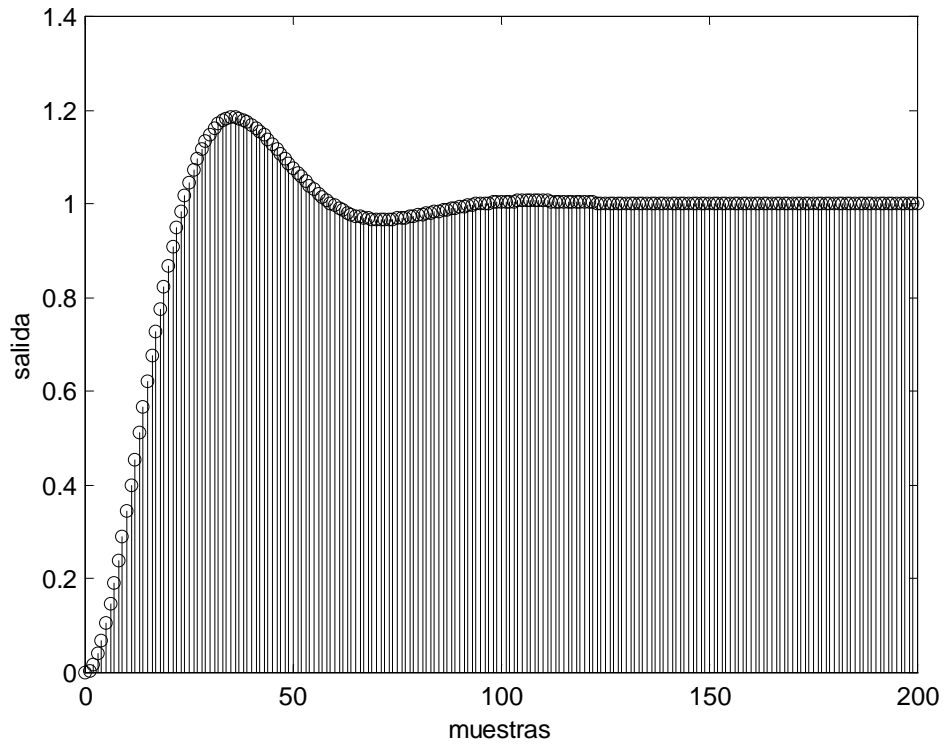


Figura 4.3. b) Respuesta temporal del sistema muestreado de lazo cerrado para $T=0.1$ seg.

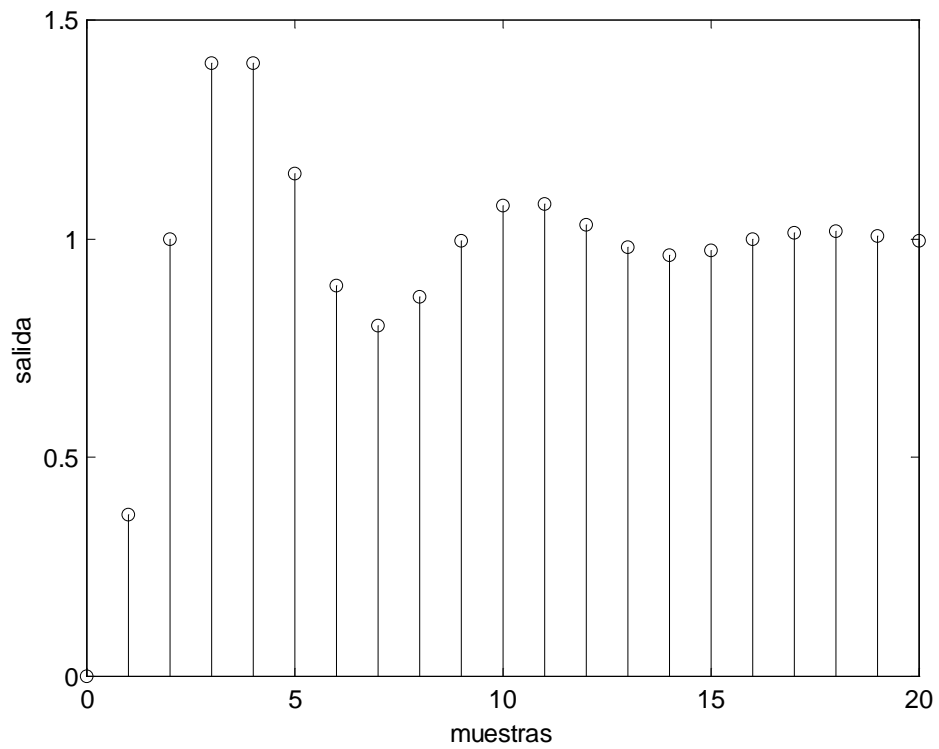


Figura 4.3. c) Respuesta temporal del sistema muestreado de lazo cerrado para $T=1$ seg.

Del análisis de la figura 4.3 se observa que el sistema digital es menos estable que su equivalente analógico, presentando un comportamiento transitorio menos amortiguado. Este resultado, presentado para un ejemplo particular, es general y se debe al retardo equivalente, de medio período de muestreo, introducido por el reconstructor de orden cero. De modo que al aumentar el período de muestreo se deteriora la estabilidad del sistema.

IV.2. ESTABILIDAD DE SISTEMAS MUESTREADOS.

Para analizar la estabilidad de un sistema muestreado, se desea saber dónde deben estar las raíces de la ecuación característica $(1 + GH(z))$ para que el sistema tenga una respuesta transitoria que se extinga en el tiempo. Para ello se calcula la respuesta del sistema en lazo cerrado.

$$Y(z) = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} R(z) = \frac{K \prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)} R(z). \quad (4-10)$$

que mediante el desarrollo en fracciones parciales puede llevarse a la forma:

$$Y(z) = \frac{k_1 z}{z - p_1} + \dots + \frac{k_n z}{z - p_n} + Y_R(z), \quad (4-11)$$

donde $Y_R(z)$ contiene los términos de $Y(z)$ originados en los polos de la excitación $R(z)$.

Los primeros n términos de la expresión (4-11) representan la respuesta transitoria de $Y(z)$. Para que el sistema sea estable, la antitransformada z de estos términos debe tender a cero cuando se incrementa el tiempo. La transformada z inversa del i -ésimo término de la ecuación (4-11) es:

$$Z^{-1} \left\{ \frac{k_i z}{z - p_i} \right\} = k_i (p_i)^{kT}. \quad (4-12)$$

Para que este término se anule al incrementarse k , el módulo de p_i debe ser menor que la unidad. Teniendo en cuenta que los valores p_i corresponden a las raíces de la ecuación característica (ecuación (4-10)) se concluye que para que un sistema realimentado de control de tiempo discreto sea estable, las raíces de su ecuación característica deben estar ubicadas en el interior del círculo de radio unitario.

IV.3. TRANSFORMACIÓN BILINEAL.

La mayoría de las técnicas de análisis de la estabilidad de sistemas de tiempo continuo se basan en que el límite de la región de estabilidad en el plano s corresponde al eje imaginario $j\omega$. Estas técnicas no pueden ser aplicadas a sistemas de tiempo discreto, ya que el límite de la región de estabilidad en el plano z corresponde al círculo unitario. Sin embargo, si se emplea la transformación bilineal definida por :

$$w = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1}, \quad (4-13)$$

la circunferencia de radio unitario en z se transforma en el eje imaginario en el nuevo plano w .

En efecto, sobre el círculo unitario se cumple que $z=e^{j\omega T}$ y reemplazando esta expresión en la ecuación 4-13 se obtiene:

$$w = \frac{2}{T} \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = j \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega T}{2}\right). \quad (4-14)$$

Al recorrer el círculo de radio unitario en el plano z , el ángulo ωT varía de $-\pi$ a π y su recorrido equivalente en el plano w corresponde a todo el eje imaginario desde $-j\infty$ a $+j\infty$.

Si nos ubicamos en el plano w en un punto sobre el eje imaginario, ($w = j\omega_w$) la expresión 4-14 permite vincular las frecuencias entre los planos s y w :

$$\omega_w = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega T}{2}\right). \quad (4-15)$$

El agregado del término $2/T$ en la definición de la transformación bilineal (ecuación 4-13) tiene por objeto que en el rango de frecuencias para las cuales $\omega T/2$ es pequeño, las frecuencias en los planos s y w coincidan. En efecto, si se cumple que $\omega T/2 \ll 1$ resulta:

$$\omega_w = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \cong \frac{2}{T} \left(\frac{\omega T}{2}\right) = \omega \quad (4-16)$$

Sin embargo, cuando la frecuencia ω en el plano s se acerca a la mitad de la frecuencia de muestreo ($2/T$), la frecuencia en el plano w (ω_w), tiende a infinito. Esto significa que a la semibanda ubicada en el semiplano izquierdo del plano s comprendida entre $-j2/T$ y $+j2/T$ le corresponde todo el semiplano izquierdo en el plano w .

IV.4. CRITERIO DE ROUTH – HURWITZ.

Este criterio es usado en sistemas de tiempo continuo para determinar si el denominador de la función de transferencia tiene raíces en el semiplano derecho del plano s . Si este criterio es aplicado a la ecuación característica de un sistema de tiempo discreto expresado en la variable z , no puede obtenerse ninguna información sobre la estabilidad del mismo. Sin embargo, si la ecuación característica es expresada como una función de la variable de transformación bilineal w , entonces la estabilidad del sistema puede ser determinada por aplicación directa del criterio de Routh–Hurwitz, de la misma manera que se aplica a los sistemas de tiempo continuo. Esto es posible, pues a través de la transformación w el interior del círculo unitario del plano z se transforma en el semiplano izquierdo del plano w , y el exterior del círculo unitario en el semiplano derecho w .

Ejemplo.

Para analizar la aplicación del criterio de estabilidad de Routh–Hurwitz se utilizará el mismo ejemplo visto previamente (ecuación 4-5):

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)} \quad (4-17)$$

El sistema de control de tiempo continuo (figura 4.1), es estable para todo valor positivo de la ganancia K . En efecto, si se aplica el criterio de Routh–Hurwitz a su ecuación característica:

$$F(s) = 1 + GH(s) = s^2 + s + K \quad (4-18)$$

resulta:

$$\begin{array}{r} s^2 \quad 1 \quad K \\ s^1 \quad 1 \\ s^0 \quad K \end{array} \quad (4-19)$$

El número de cambios de signo de la primer fila del arreglo de Routh–Hurwitz indica el número de raíces del polinomio característico $F(s)$ ubicadas en el semiplano derecho. En este caso no existen cambios de signo de modo que el sistema de tiempo continuo realimentado en forma unitaria es estable para todo valor positivo de la ganancia K .

La función de transferencia entrada–salida para el sistema equivalente de tiempo discreto, para un período de muestreo $T = 0.1$ seg. está dada por (ecuación 4-8):

$$G(z) = K \frac{0.00484 z + 0.00468}{(z-1)(z-0.905)}; \quad T = 0.1 \text{ seg} \quad (4-20)$$

Para aplicar el criterio de Routh–Hurwitz es necesario aplicar previamente la transformación bilineal (ecuación 4-13).

$$G(w) = K \frac{-0.00016w^2 - 0.1872w + 3.81}{3.81w^2 + 3.80w} \quad (4-21)$$

Luego, la ecuación característica en el plano w está dada por:

$$F(w) = 1 + G(w) = (3.81 - 0.00016K) w^2 + (3.80 - 0.1872K) w + 3.81K.$$

La aplicación del criterio de Routh–Hurwitz conduce al siguiente arreglo:

$$\begin{array}{r} w^2 \quad 3.81 - 0.00016K \quad 3.81K \\ w^1 \quad 3.80 - 0.1872K \\ w^0 \quad 3.81K \end{array} \quad (4-22)$$

Para que el sistema sea estable no debe haber cambios de signos en la primera columna del arreglo (arreglo (4-22)), siendo necesario que la ganancia K se halle comprendida en el rango:

$$0 < K < 20.3. \quad (4-23)$$

Si se elige, en cambio, un período de muestreo mayor $T = 1$ seg., se obtiene (ecuación (4-9)):

$$G(z) = K \frac{0.368 z + 0.264}{(z-1)(z-0.368)}; \quad T = 1 \text{ seg.} \quad (4-24)$$

La expresión anterior muestra que al aumentar el período de muestreo el polo de más alta frecuencia se desplaza hacia el origen del plano z .

Aplicando la transformación bilineal, la ecuación característica en el plano w resulta:

$$F(w) = (1 - 0.0381K) w^2 + (0.924 - 0.386K) w + 0.924K = 0,$$

y la aplicación del criterio de Routh–Hurwitz conduce al siguiente arreglo:

$$\begin{array}{r} w^2 \quad 1 - 0.0381K \quad 0.924K \\ w^1 \quad 0.924 - 0.386K \\ w^0 \quad 0.924K \end{array} \quad (4-25)$$

Examinando la primera columna del arreglo (ecuación (4-25)) se observa que para que el sistema sea estable la ganancia K debe hallarse comprendida en el rango:

$$0 < K < 2.39 \quad (4-26)$$

Comparando las expresiones (4-23) y (4-26) se observa que, como era previsible, al aumentar el período de muestreo se reduce el rango de estabilidad del sistema.

IV.5. CRITERIO DE ESTABILIDAD DE JURY.

Este criterio de estabilidad tiene la particularidad de poder ser empleado directamente sobre sistemas de tiempo discreto expresados en la variable z .

Sea la ecuación característica de un sistema discreto:

$$F(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0; \quad a_n > 0 \quad (4-27)$$

A partir de la ecuación anterior puede construirse el siguiente arreglo:

$$\begin{array}{cccccccc} z^0 & z^1 & z^2 & \dots & z^{n-k} & \dots & z^{n-1} & z^n \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-k} & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_k & \dots & a_1 & a_0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-k} & \dots & b_{n-1} & \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_{k-1} & \dots & b_0 & \\ c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-k} & \dots & & \\ c_{n-2} & c_{n-3} & c_{n-4} & \dots & c_{k-2} & \dots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ l_0 & l_1 & l_2 & l_3 & & & & \\ l_3 & l_2 & l_1 & l_0 & & & & \\ m_0 & m_1 & m_2 & & & & & \end{array} \quad (4-28)$$

con

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix} \quad c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}$$

$$d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-2-k} \\ c_{n-2} & c_k \end{vmatrix}$$

La condición necesaria y suficiente para que el polinomio $F(z)$ no tenga raíces fuera o sobre el círculo unitario, con $a_n > 0$, son:

$$\begin{aligned}
 F(1) &> 0 \\
 (-1)^n \cdot F(-1) &> 0 \\
 |a_0| &< a_n \\
 |b_0| &> |b_{n-1}| \\
 |c_0| &> |c_{n-2}| \\
 |d_0| &> |d_{n-3}| \\
 &\vdots \\
 |m_0| &> |m_2|
 \end{aligned} \tag{4-29}$$

Note que un sistema de segundo orden contiene una sola fila en el arreglo. Por cada orden adicional, dos filas adicionales son agregadas. Además, para un sistema de orden n , hay un total de $n+1$ restricciones.

Ejemplo.

Supóngase el mismo ejemplo ya analizado. El criterio de Jury se aplica directamente a la ecuación característica del sistema a lazo cerrado $(1+GH(z))$. De la ecuación (4-24) (período de muestreo $T = 1$ seg.), la ecuación característica $F(z)$ está dada por:

$$F(z) = 1 + G(z) = z^2 + (0.368 K - 1.368) z + (0.368 + 0.264 K) = 0.$$

Dado que se trata de una ecuación de segundo orden, el arreglo de Jury se reduce a:

$$\begin{array}{ccc}
 z^0 & z^1 & z^2 \\
 0.368 + 0.264 K & 0.368 K - 1.368 & 1
 \end{array} \tag{4-30}$$

La aplicación de las condiciones dadas por la expresión (4-29) conduce a:

a) $F(1) = 1 + (0.368 K - 1.368) + (0.368 + 0.264 K) > 0$

Esta condición es satisfecha para todo $K > 0$.

b) $(-1)^2 F(-1) = 1 - (0.368 K - 1.368) + (0.368 + 0.264 K) > 0$

Esta condición es satisfecha para $K < 26.3$.

c) $|a_0| = |0.368 + 0.264 K| < a_2 = 1$

Esta condición es satisfecha para $K < 2.39$.

Por lo tanto el sistema es estable para valores de la ganancia comprendidos entre $0 < K < 2.39$. Resultado coincidente con el obtenido previamente (ecuación (4-26)).

Para el valor de K correspondiente al límite del rango de estabilidad, $K = 2.39$, la ecuación característica vale:

$$z^2 - 0.49z + 1 = 0, \quad (4-31)$$

siendo sus raíces

$$z = 0.244 \mp j0.97 = 1 \angle \mp 1.32 \text{ rad} = 1 \angle \mp \omega T. \quad (4-32)$$

La expresión anterior indica que para un período de muestreo $T = 1$ seg. y una ganancia de $K = 2.39$, el sistema en lazo cerrado oscilará a una frecuencia de $(1.32/2\pi)$ 1/seg.

IV.6. MÉTODO DEL LUGAR DE LAS RAÍCES.

Suponiendo que el sistema es lineal y con parámetros invariantes en el tiempo, la transferencia de lazo abierto $GH(z)$ puede expresarse como un cociente de dos polinomios en z afectados por una ganancia K .

$$GH(z) = \frac{K \prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)}; \quad n \geq m \quad (4-33)$$

Puede verse que $GH(z)$ es de la misma forma que $G(s)H(s)$ para sistemas continuos. Por lo tanto las reglas de construcción del diagrama del lugar de las raíces, desarrolladas para el plano s son también válidas para el plano z .

Para que un punto del plano z pertenezca al lugar de las raíces, $GH(z)$ debe cumplir las siguientes condiciones:

- 1) Condición de amplitud : Módulo de $GH(z) = 1$
- 2) Condición de fase : Argumento de $GH(z) = (2n + 1)\cdot\pi$

Ejemplo:

Si nuevamente se plantea el sistema del ejemplo analizado previamente, a partir de la expresión (4-7) se obtiene:

$$G(z) = K \frac{a T (z - z_1)}{(z - 1)(z - p_1)}, \quad (4-34)$$

donde:

$$p_1 = e^{-T}; \quad z_1 = \frac{-1 + (1+T)e^{-T}}{T - 1 + e^{-T}}; \quad a = \frac{T - 1 + e^{-T}}{T}.$$

Si se reemplaza a la variable z por $z = x + jy$, en la condición de fase de $GH(z)$ se obtiene la ecuación de una circunferencia con centro en $(z_1, 0)$ y cuyo radio es la media geométrica de las distancias de los polos al cero z_1 .

$$(x - z_1)^2 + y^2 = (1 - z_1)(p_1 - z_1). \quad (4-35)$$

Además, fácilmente, puede verse que los puntos sobre el eje real entre el polo p_1 y 1 pertenecen al lugar de raíces, lo mismo que los puntos sobre el eje real a la izquierda del cero z_1 .

En la figura 4.4 se ha representado el diagrama del lugar de las raíces para un período de muestreo de $T = 1$ seg.

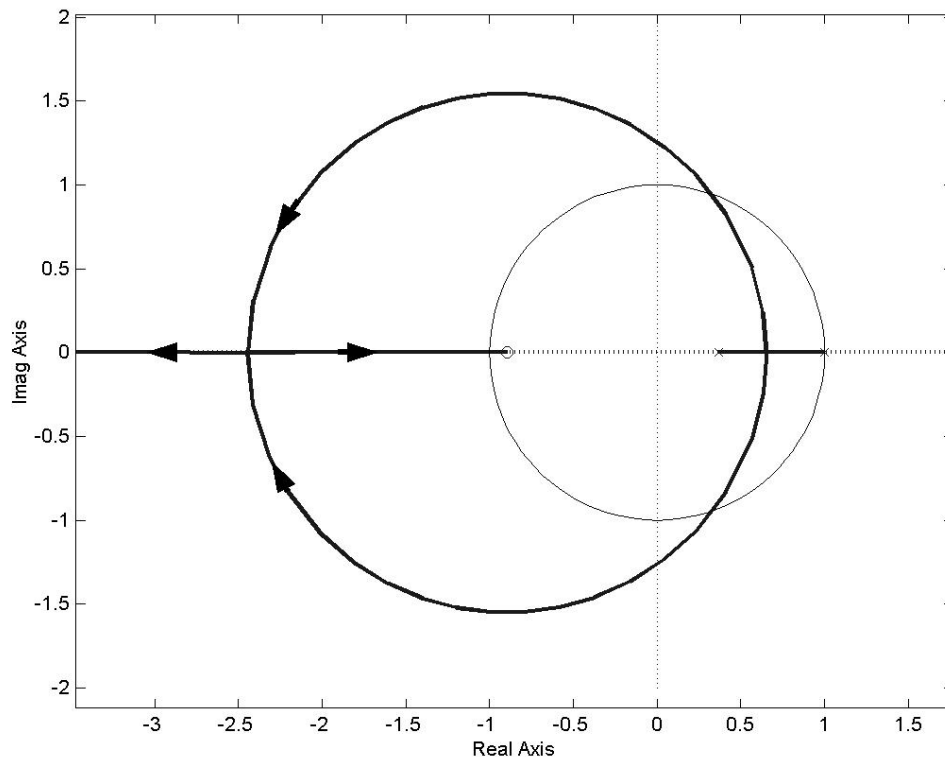


Figura 4.4. Diagrama del lugar de las raíces para $T=1$ seg.

Para $K = 0$ las raíces coinciden con las raíces del sistema a lazo abierto. Cuando K aumenta las raíces se vuelven complejas conjugadas y comienzan a describir una circunferencia para luego volver a ser reales. Por último para $K \rightarrow \infty$ una raíz coincide con el cero z_1 y la otra está en $z \rightarrow \infty$. El sistema es estable hasta un valor de K para el cual se produce la intersección del lugar de raíces con la circunferencia de radio unitario.

Se trata ahora de obtener una expresión del valor máximo de K para el cual el sistema está en el límite de estabilidad. Para ello se iguala la expresión de la circunferencia del lugar de raíces a la ecuación de la circunferencia de radio unitario y se obtiene la abscisa x que corresponde al límite de estabilidad:

$$x = [(1 - p_1) + z_1 (1 + p_1)] / 2 z_1. \quad (4-36)$$

Si el período de muestreo es de $T = 1$ seg., de la expresión anterior se obtiene: $x = 0.244$. Reemplazando este valor en la ecuación de la circunferencia (expresión (4-35)) se obtiene el correspondiente valor de y ($y = \pm 0.97$). Los valores de x e y obtenidos para el valor límite de $K = 2.39$ coinciden con los obtenidos previamente por aplicación del método de Jury (ecuación (4-32)).

IV.7. DIAGRAMAS DE BODE.

El análisis de estabilidad de sistemas de tiempo discreto puede realizarse, como en sistemas analógicos, en base al margen de fase MF y al margen de ganancia MG definidos a partir de la respuesta en frecuencia del sistema de lazo abierto. En sistemas de tiempo continuo la respuesta en frecuencia puede ser obtenida en forma aproximada a través de los diagramas de Bode. En efecto, basándose en el hecho de que la respuesta en frecuencia de un sistema continuo se obtiene al evaluar la función de transferencia en $s = j\omega$, pueden obtenerse, a través de propiedades geométricas, aproximaciones por líneas rectas de la respuesta en frecuencia.

En el dominio z , la respuesta en frecuencia se obtiene a partir de evaluar la función de transferencia en $z = e^{j\omega}$, es decir sobre puntos de la circunferencia unitaria. Evidentemente, la evaluación aproximada de Bode, por líneas rectas, no es aplicable. Sin embargo, si se emplea la transformación bilineal para pasar del plano z al plano w , las aproximaciones de Bode por líneas rectas pueden ser utilizados para analizar el comportamiento en frecuencia de sistemas muestreados.

Ejemplo.

Supóngase el mismo ejemplo ya analizado. Los diagramas de Bode del sistema de tiempo continuo dado por la ecuación (4-5) se han representado en la figura 4.5.

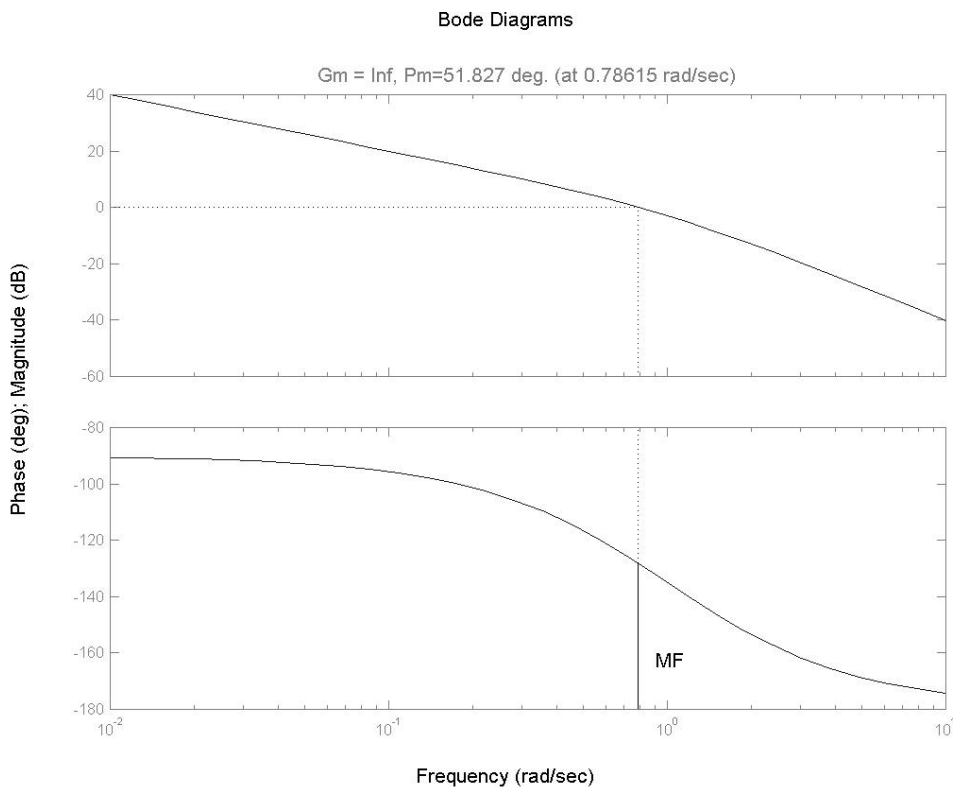


Figura 4.5. Diagramas de Bode del sistema analógico.

Del análisis de la figura se deduce que el sistema analógico a lazo cerrado será estable para todo valor positivo de la ganancia K ya que el margen de ganancia es infinito. Para el valor elegido de la ganancia $K=1$, el margen de fase vale $MF= 52^\circ$.

La estabilidad del sistema muestreado puede estudiarse directamente a partir de su función de transferencia $G(z)$. Las funciones de transferencia $G(z)$ para períodos de muestreo de $T=0.1$ seg. y $T=1$ seg. han sido obtenidas previamente (ecuaciones (4-8) y (4-9)):

$$G(z) = \frac{0.00484z + 0.00468}{(z-1)(z-0.905)} \quad ; \quad T = 0.1 \text{ seg.} \quad (4-37)$$

$$G(z) = \frac{0.368z + 0.264}{(z-1)(z-0.368)} \quad ; \quad T = 1 \text{ seg.} \quad (4-38)$$

El análisis de la estabilidad se realiza reemplazando la variable z a partir de su definición ($z = e^{j\omega T}$) y graficando el módulo y la fase de la función de transferencia para los valores de ωT comprendidos entre 0 y π . En las figuras 4.6 y 4.7. se han representado los diagramas del sistema muestreado correspondientes a un período de muestreo de $T = 0.1$ seg. y 1 seg. respectivamente.

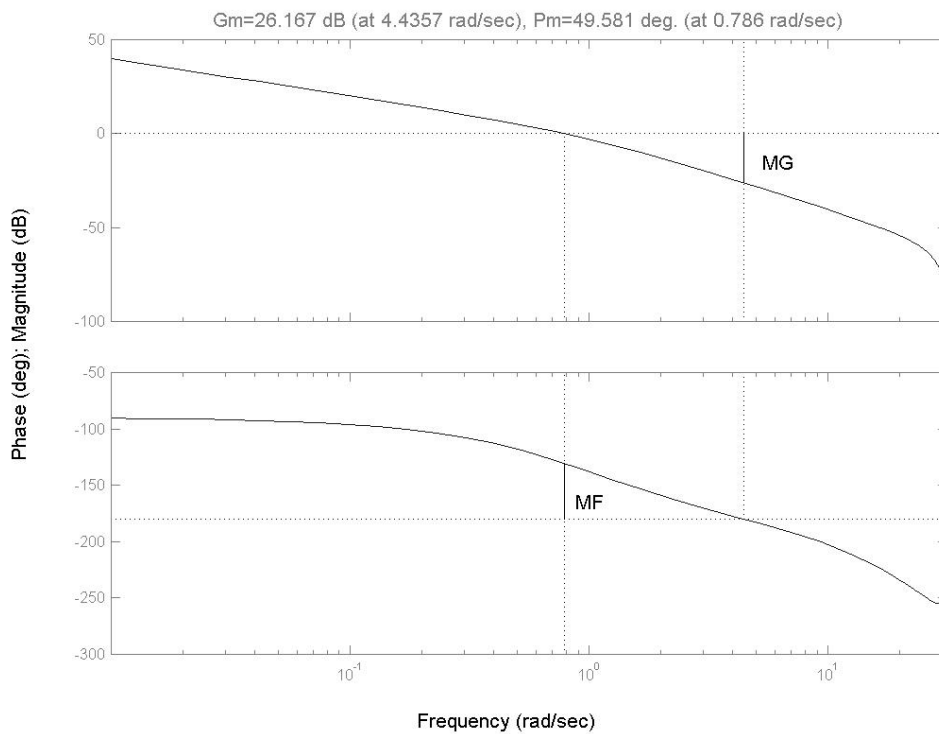


Figura 4.6. Diagrama en función de la frecuencia del sistema digital para $T=0.1$ seg.

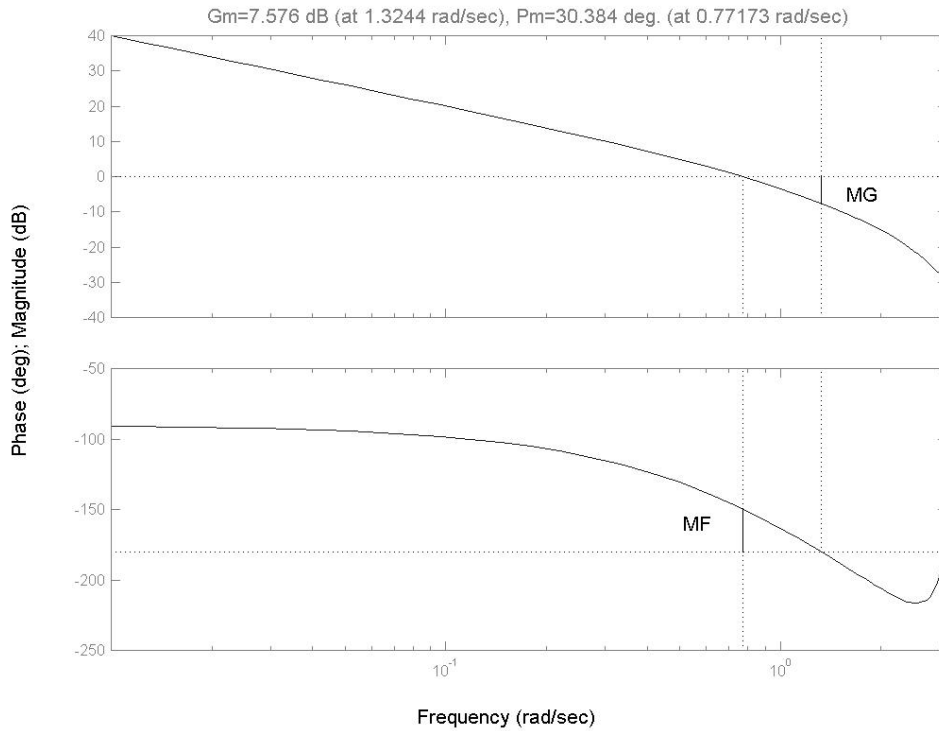


Figura 4.7. Diagrama en función de la frecuencia del sistema digital para $T=1$ seg.

Del análisis de las figuras se observa que el sistema muestreado es más inestable que el de tiempo continuo y que además el grado de inestabilidad aumenta al incrementar el período de muestreo. Los márgenes de ganancia (MG) y fase (MF), para el sistema muestreado para $T = 0.1$ seg. y $T = 1$ seg. valen:

$$\begin{aligned}
 T = 0.1 \text{ seg}; \quad & \text{MG} = 26 \text{ dB}; \quad \text{MF} = 50^\circ \\
 T = 1 \text{ seg}; \quad & \text{MG} = 7.6 \text{ dB}; \quad \text{MF} = 30^\circ
 \end{aligned}
 \tag{4-39}$$

Como se ha puntualizado, si se emplea la transformación bilineal, la respuesta en frecuencia puede ser aproximada por los diagramas de Bode, es decir, sus aproximaciones por líneas rectas pueden ser directamente utilizadas para analizar la estabilidad de los sistemas muestreados. En efecto, empleando la transformación bilineal, las expresiones (4-37) y (4-38) se transforman en:

$$G(w) = \frac{-0.00016 w^2 - 0.1872 w + 3.81}{3.81 w^2 + 3.80 w}; \quad T = 0.1 \text{ seg.} \tag{4-40}$$

$$G(w) = \frac{-0.0381 (w - 2) (w + 12.14)}{w (w + 0.924)}; \quad T = 1 \text{ seg.} \tag{4-41}$$

En las figuras 4.8 y 4.9, se han representado los diagramas de Bode en el plano w correspondientes a las expresiones (4-40) y (4-41).

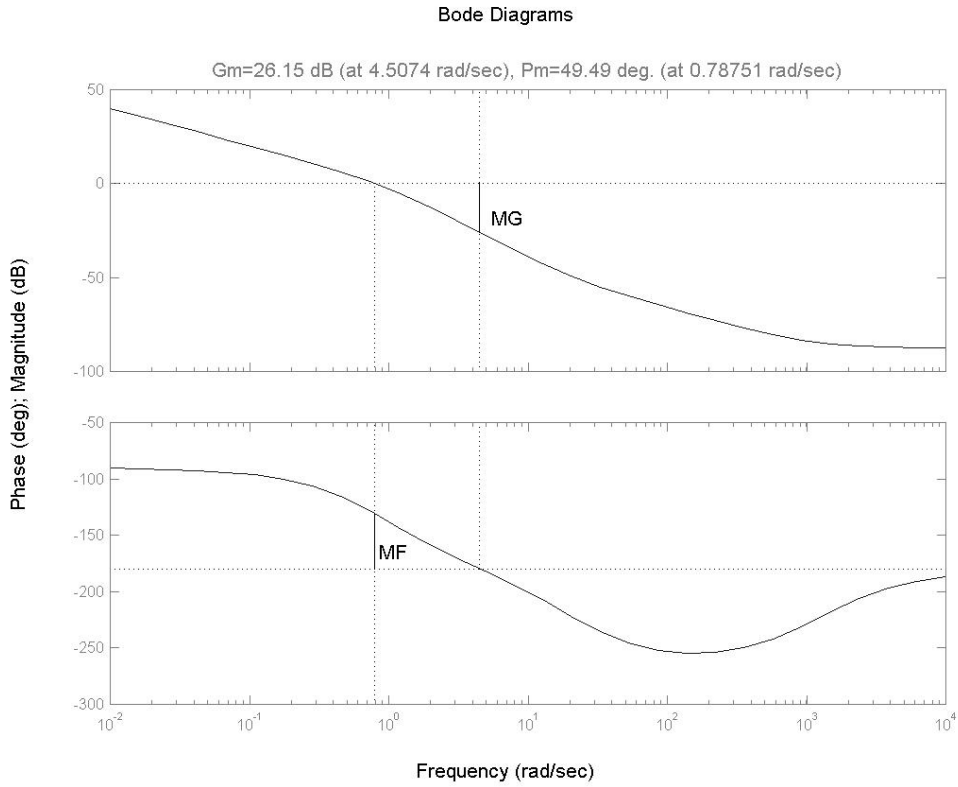


Figura 4.8. Diagramas de Bode del sistema digital en el plano w , para $T=0.1$ seg.

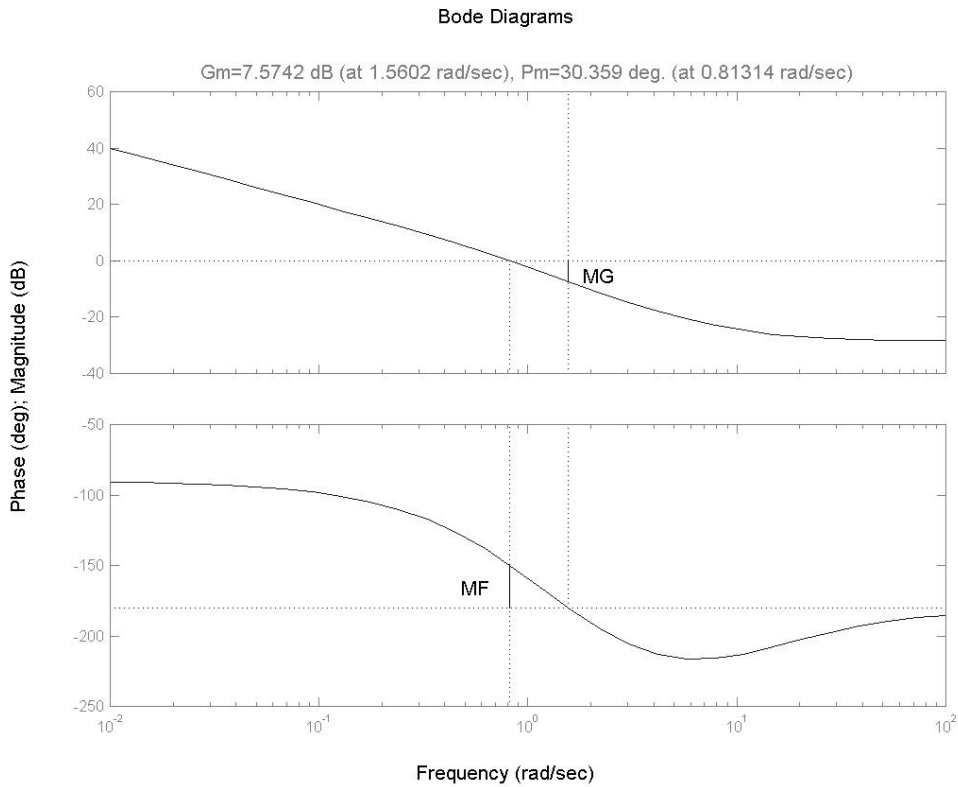


Figura 4.9. Diagramas de Bode del sistema digital en el plano w , para $T=1$ seg.

Del análisis de las figuras se desprende que los márgenes de ganancia y fase prácticamente corresponden a los obtenidos previamente (ecuación (4-39)). La única diferencia con los diagramas de las figuras 4.6 y 4.7 es que la calibración en frecuencia se ha modificado (ecuación 4-15), permitiendo el uso de las aproximaciones por líneas rectas.

IV. 8. CRITERIO DE ESTABILIDAD DE NYQUIST.

Como en los casos del criterio de Routh–Hurwitz y de los diagramas de Bode, el criterio de estabilidad de Nyquist, desarrollado para sistemas continuos, puede aplicarse directamente a sistemas discretos mediante el empleo de la transformada bilineal.

Sin embargo el criterio de estabilidad de Nyquist puede ser desarrollado a partir de la función de transferencia del sistema muestreado en el plano z . Como en el caso de tiempo continuo, el desarrollo del criterio se basa en la aplicación del Principio de Cauchy, pero, en el caso discreto, en lugar de rodear todo el semiplano izquierdo s , el camino de Nyquist para analizar la estabilidad en el plano z es el círculo unitario rodeado en sentido antihorario.

La función característica del sistema muestreado $F(z)$ puede ser factorizada como:

$$F(z) = 1 + GH(z) = \frac{K \prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)}. \quad (4-42)$$

Al recorrer el círculo unitario del plano z en sentido antihorario, el criterio de Nyquist establece que:

$$N = Z - P, \quad (4-43)$$

donde:

N representa el número de giros en sentido horario de la función $F(z)$ alrededor del punto -1 .

Z el número de ceros de la ecuación característica ($F(z)$), situados fuera del círculo unitario.

P el número de polos de la función de transferencia a lazo abierto ($GH(z)$) o de la ecuación característica ($F(z)$) situados fuera del círculo unitario.

Ejemplo:

Supóngase el mismo ejemplo analizado previamente. El estudio de la estabilidad del sistema muestreado mediante el empleo del criterio de estabilidad de Nyquist puede realizarse a partir de los planos z o w . Si partimos del plano z , para un período de muestreo de $T = 1$ seg., resulta:

$$G(z) = \frac{0.368 z + 0.264}{(z - 1)(z - 0.368)}; \quad T = 1 \text{ seg.} \quad (4-44)$$

Dado que la función de transferencia $G(z)$ tiene un polo sobre el círculo unitario ubicado en $z=1$, el camino de Nyquist debe esquivar dicho punto. La desviación de la trayectoria de Ny-

quist alrededor del punto $z=1$ se realiza usualmente siguiendo el camino $z=1+\rho e^{j\theta}$, con $\rho \rightarrow 0$ y θ variando de $-\pi/2$ a $\pi/2$.

El diagrama de Nyquist resultante se ha representado en la figura 4.10.

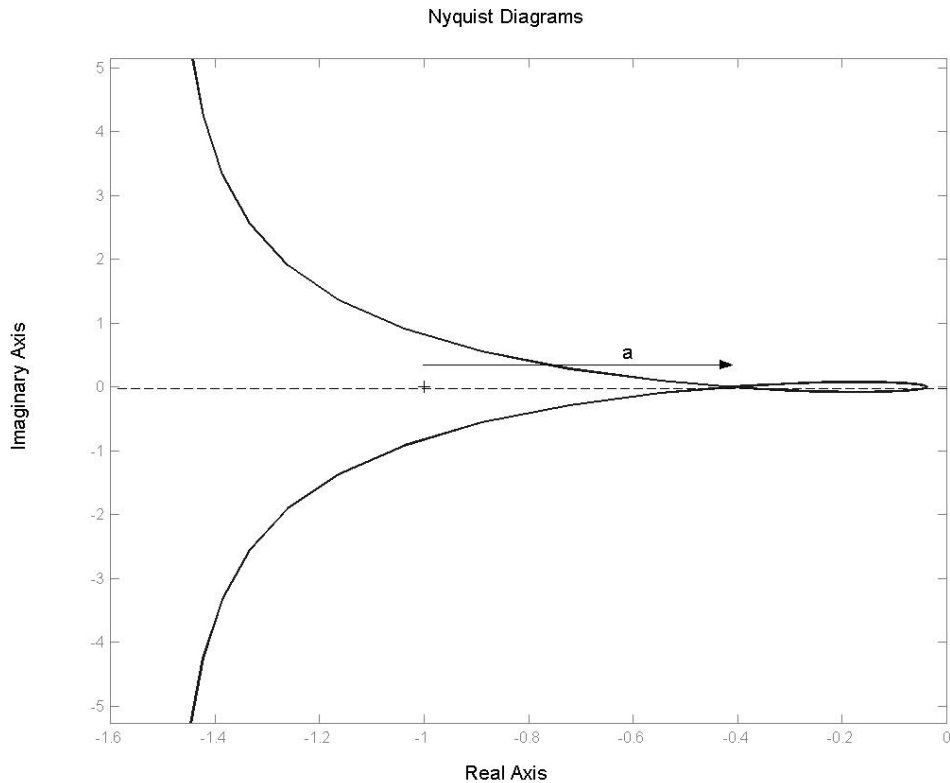


Figura 4.10. Diagrama de Nyquist del sistema digital para $T=1$ seg.

Los márgenes de ganancia y fase obtenidos de la figura coinciden con los hallados previamente:

$$MG = 1/(1-a) = 2.4$$

$$MF = 30^\circ \text{ (Tener en cuenta las escalas de la figura)}$$

Si la aplicación del criterio de Nyquist se realiza en el plano w , para un período de muestreo $T = 1$ seg. la función de transferencia del sistema muestreado en el plano w está dada por:

$$G(w) = \frac{-0.0381 (w - 2) (w + 12.14)}{w (w - 0.924)}; \quad T = 1 \text{ seg.} \quad (4-45)$$

Como la función de transferencia tiene un polo en el origen, dicha discontinuidad debe ser evitada. Para ello el contorno de Nyquist sigue usualmente una trayectoria circular, alrededor del origen, de radio infinitesimal. El diagrama de Nyquist resultante coincide con el representado en la figura 4.10 ya que la única diferencia entre ambos diagramas radica en la calibración en frecuencia del mismo.