

CAPÍTULO CINCO.

COMPENSACIÓN CLÁSICA DE SISTEMAS MUESTREADOS.

V.1. INTRODUCCIÓN.

En este capítulo se discuten algunas de las técnicas clásicas en el diseño de controladores digitales simples. Ellas son:

- Controladores de tiempo mínimo.
- Técnicas de aproximación numérica. Diseño de controladores digitales por aproximación de controladores de tiempo continuo.
- Técnicas del lugar de las raíces.
- Compensación en el dominio w .

En la sección 6 se realiza una breve discusión acerca de algunos aspectos esenciales a tener en cuenta en la elección del período de muestreo.

V.2. CONTROLADORES DE TIEMPO MÍNIMO.

Como se ha comentado en secciones previas, un sistema digital cuya función de transferencia $T(z)$ tiene todos sus polos en $z=0$, presenta la particularidad de tener una respuesta impulsional finita. En otras palabras, su comportamiento transitorio se agota en n períodos de muestreo, siendo n el orden del denominador.

Ejemplo 1.

Considérese la respuesta transitoria a un pulso unitario del sistema de función de transferencia:

$$T(z) = \frac{z^3 + 3z^2 - 2z + 1}{z^3} . \quad (5-1)$$

Su respuesta a un impulso unitario, es:

$$y_{nT} = Z^{-1}\{T(z)\} \quad (5-2)$$

$$y_{nT} = 1 \cdot \delta_{nT} + 3 \cdot \delta_{(n-1)T} - 2 \cdot \delta_{(n-2)T} + 1 \cdot \delta_{(n-3)T} . \quad (5-3)$$

En la figura 5.1 puede observarse que la respuesta transitoria se agota luego de $n = 3$.

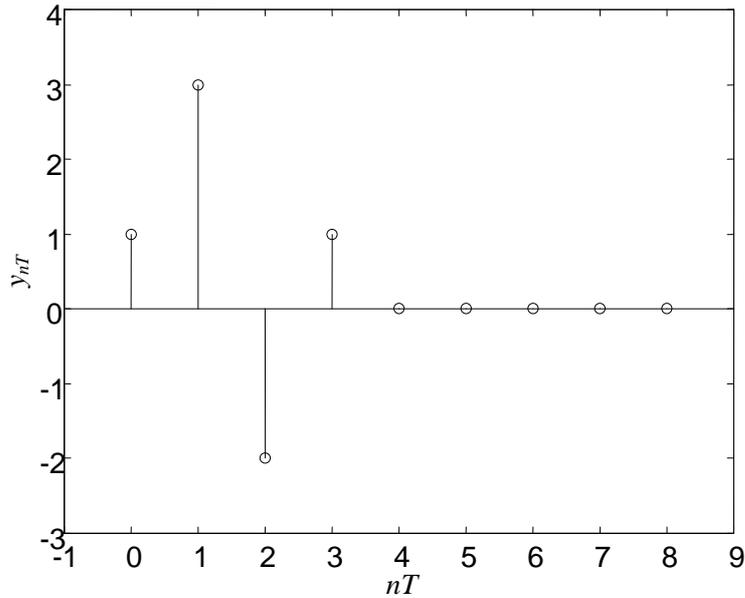


Figura 5.1.

En esta sección se analiza cómo puede diseñarse un compensador digital a los efectos de obtener una función de transferencia de lazo cerrado que presente esta característica.

Se supondrán las siguientes especificaciones para el diseño:

- a) la transferencia de lazo cerrado $T(z)$ debe corresponder a un sistema de respuesta impulsional finita, debiendo extinguirse su respuesta transitoria (correspondiente a los instantes de muestreo) en el menor tiempo posible. Es importante destacar que en principio, el planteo que se propone sólo asegura lo que sucede en los instantes de muestreo,
- b) el error de estado estacionario a una determinada excitación debe estar acotado a $e_{m\acute{a}x}$,
- c) la señal de comando u_{nT} debe estar acotada en un valor $u_{m\acute{a}x}$,

La transferencia del sistema de lazo cerrado es:

$$T(z) = \frac{D(z)(1-z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}}{1 + D(z)(1-z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}} \quad (5-4)$$

A los efectos de simplificar las expresiones definimos:

$$G(z) = (1-z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}, \quad (5-5)$$

luego

$$T(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)} \quad (5-6)$$

Para cumplir con la especificación a), todas las raíces de la expresión $(1+D(z)G(z))$ deben estar en el origen. Es decir, que el denominador de $T(z)$ debe ser de la forma :

$$1 + D(z)G(z) = \frac{z^n}{pol(z)} \quad (5-7)$$

siendo $pol(z)$ un polinomio en z y n un entero que determina el número de muestras en que se agota el transitorio.

Si la ecuación (5-7) es reemplazada en la (5-6), se observa que efectivamente $T(z)$ es una transferencia de respuesta impulsional finita.

$$T(z) = \frac{z^n - pol(z)}{z^n}. \quad (5-8)$$

La expresión del controlador puede despejarse de la ecuación (5-7):

$$D(z) = \frac{z^n - pol(z)}{pol(z)} \frac{1}{G(z)}. \quad (5-9)$$

A partir de esta ecuación se pone de manifiesto que para que $D(z)$ pueda ser implementado, el orden de $pol(z)$ no puede ser otro que n (tener presente que, siempre la transferencia digital que corresponde al conjunto reconstructor y el sistema $G(s)$ tiene sólo un polo más que el número de ceros).

A los efectos de determinar el polinomio $pol(z)$ más adecuado pueden evaluarse los siguientes aspectos:

- a) la elección de $pol(z)$ influye sobre el error de estado estacionario
- b) los coeficientes del polinomio $pol(z)$ (con excepción del primero) corresponden a los valores de las muestras de salida durante el comportamiento transitorio (respuesta impulsional)
- c) existe un compromiso entre las especificaciones de comportamiento transitorio, y la acción de control disponible.

Analicemos cómo influye $pol(z)$ sobre el error de estado estacionario. El error está definido por:

$$E(z) = R(z) - Y(z) = R(z) \cdot [1 - T(z)], \quad (5-10)$$

luego, reemplazando (5-8) en (5-10), resulta

$$E(z) = R(z) \frac{pol(z)}{z^n}. \quad (5-11)$$

Para una secuencia de entrada escalón unitario

$$R(z) = \frac{z}{z-1}, \quad (5-12)$$

la transformada de la secuencia de muestras correspondiente al error resulta:

$$E(z) = \frac{z}{z-1} \frac{pol(z)}{z^n}. \quad (5-13)$$

Luego el error de estado estacionario es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{pol(z)}{z^n} \quad (5-14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = \lim_{z \rightarrow 1} pol(z). \quad (5-15)$$

De la expresión anterior resulta obvia la conveniencia de elegir $pol(z)$ de manera que contenga un factor de la forma $(z-1)$. Este análisis puede extenderse sin mayores complicaciones a otros tipos de excitaciones.

El otro factor predominante para elegir $pol(z)$ es el comportamiento transitorio deseado ya que los coeficientes de $pol(z)$ están íntimamente ligados a la respuesta transitoria.

Una vez concluido el primer diseño debe verificarse que, debido a las exigencias en cuanto al comportamiento transitorio, la amplitud de la señal de comando no supere el valor máximo $u_{m\acute{a}x}$ (especificación c). De ser este el caso, se deberían disminuir las demandas en cuanto al comportamiento transitorio eligiendo un n mayor. Dicha verificación puede ser realizada por cálculo o simulación teniendo presente que:

$$U(z) = \frac{D(z)}{1 + D(z)G(z)} R(z) \quad (5-16)$$

Pese a que el diseño propuesto asegura que luego de n muestras, la salida iguala a la referencia en los instantes de muestreo, podría haber la posibilidad de que la señal continua de salida estuviese oscilando a una frecuencia igual a la mitad de la de muestreo. Esta situación puede ser detectada a partir de analizar las muestras de la acción de control u_{nT} (tener presente que la señal $u(t)$ es constante entre las muestras).

Ejemplo 2.

Un motor de corriente continua (ecuación de transferencia (5-17)) es empleado para el control de velocidad de una cinta transportadora. Se pretende diseñar un controlador digital $D(z)$ que permita que el sistema alcance el estado estacionario en el menor tiempo posible, con error de estado estacionario nulo ante excitaciones constantes. El accionador de potencia tiene una ganancia de 10, no pudiendo trabajar con tensiones de entrada superiores a los 5 volts.

Usualmente, desde el punto de vista práctico, el efecto de la constante de tiempo asociada al polo eléctrico puede ser despreciado frente al correspondiente al de la constante de tiempo mecánica, en particular si se hace control de par. Esta simplificación ha sido realizada en la ecuación (5-17).

$$G(s) \cong \frac{K}{J \cdot s + F} = \frac{0.14}{3 \cdot s + 1} \quad (5-17)$$

con:

J = momento de inercia del eje del rotor y de la carga.

F = coeficiente de fricción viscosa del motor y de la carga.

$K = k_f \cdot i_f \cdot k$

k_f = constante de proporcionalidad entre la corriente de campo i_f y el flujo.

La transferencia digital $G(z)$ (correspondiente al reconstructor, actuador y motor) para $T=0.2$ seg. resulta:

$$G(z) = \frac{0.09}{z - 0.935} \quad (5-18)$$

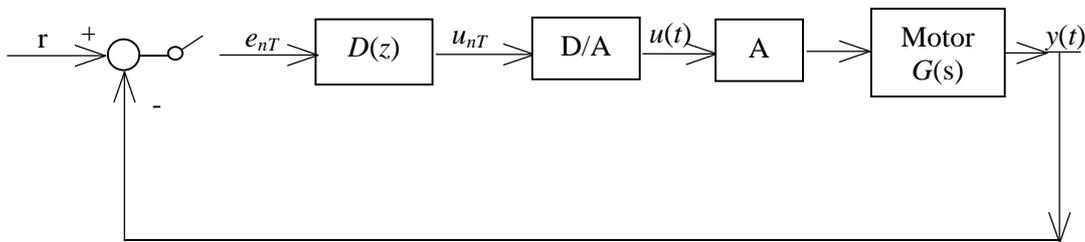


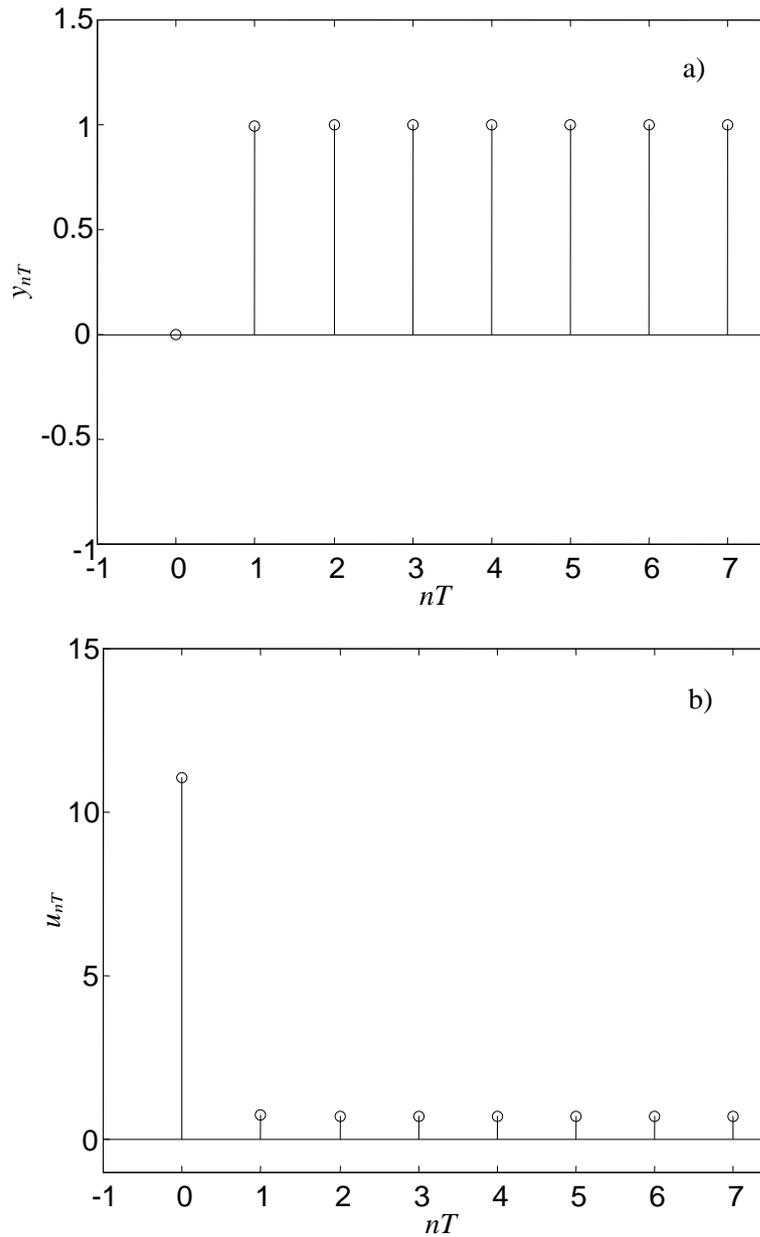
Figura 5.2

De acuerdo a la discusión previa puede elegirse $n=1$ y $pol(z)=(z-1)$ a los efectos de que el estado estacionario se alcance en sólo una muestra y con error nulo. Según la ecuación (5-9) el controlador digital resulta:

$$D(z) = \frac{11.07 (z - 0.935)}{(z - 1)} \quad (5-19)$$

En la figura 5.3a puede observarse que efectivamente, cuando se emplea el controlador de la ecuación (5-19), la variable controlada alcanza el estado estacionario luego de una muestra.

Este comportamiento transitorio óptimo puede alcanzarse sólo si el accionador de potencia es capaz de entregar la energía necesaria. En la figura 5.3b se observa la acción de control u_{nT} , la cual es superior a la permitida en nuestro problema.



Figuras 5.3 a) y_{nT} para ($n=1$). b) u_{nT}

A los efectos de poder cumplir que $u_{nT} < u_{m\acute{a}x}$ el dise\~{n}ador podr\~{a} reducir sus exigencias desde el punto de vista transitorio.

Con esta finalidad puede elegirse $n>1$ y $pol(z)$ otro polinomio (siempre manteniendo un factor de la forma $(z-1)$ para anular el error de estado estacionario). Por ejemplo, si se elige $n=3$ y $pol(z)=(z^3-0.3z^2-0.3z-0.4)$ resulta un controlador:

$$D(z) = \frac{11.11 (0.3z^2 + 0.3z + 0.4)(z - 0.935)}{(z^3 - 0.3z^2 - 0.3z - 0.4)} \quad (5-20)$$

Las variables controladas y de control para este caso pueden ser observadas en las figuras 5.4a y b respectivamente.

Obsérvese la relación entre los valores de las muestras de la señal controlada y los de los coeficientes de $pol(z)$.

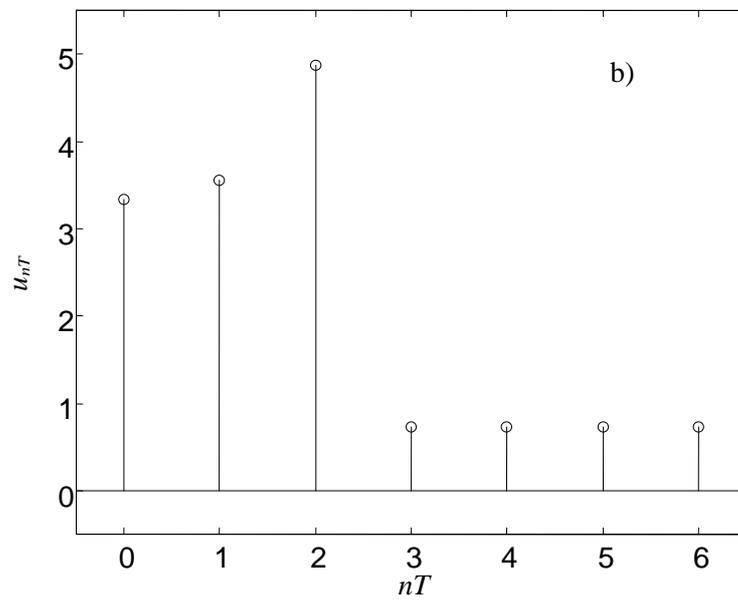
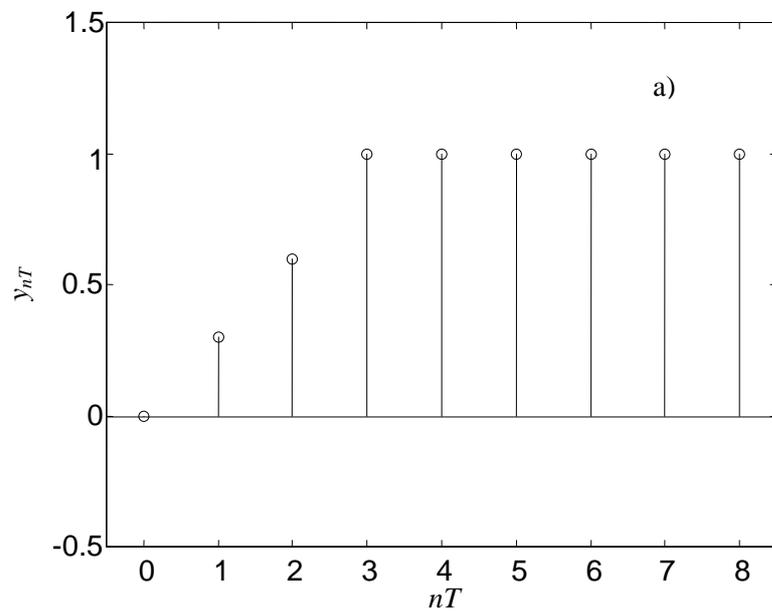


Figura 5.4. a) y_{nT} para ($n=3$). b) u_{nT}

V.3. DISEÑO DE CONTROLADORES DIGITALES POR APROXIMACIÓN DE CONTROLADORES ANALÓGICOS.

El diseño de un controlador digital suele ser realizado empleando técnicas de análisis y diseño propias de sistemas muestreados (como la discutida en la sección previa).

Potencialmente, estas técnicas permiten obtener controles más versátiles que los que se pueden conseguir con compensadores analógicos. Sin embargo, existen aplicaciones donde los controladores analógicos han demostrado trabajar satisfactoriamente, razón por la cual en muchas de estas aplicaciones se prefiere diseñar los controladores digitales como aproximación de los controladores analógicos (figura 5-5). Este es, por ejemplo, el caso del controlador PID (controlador de acción proporcional, integral y derivativa) cuya implementación digital es sólo una aproximación numérica de la ecuación integro-diferencial de su versión analógica (ecuación (5-21)).

$$u(t) = K_p \left\{ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{d e(t)}{d t} \right\}, \quad (5-21)$$

donde:

K_p es la ganancia proporcional (100/Banda proporcional)

T_i es el tiempo integral

T_d es el tiempo derivativo

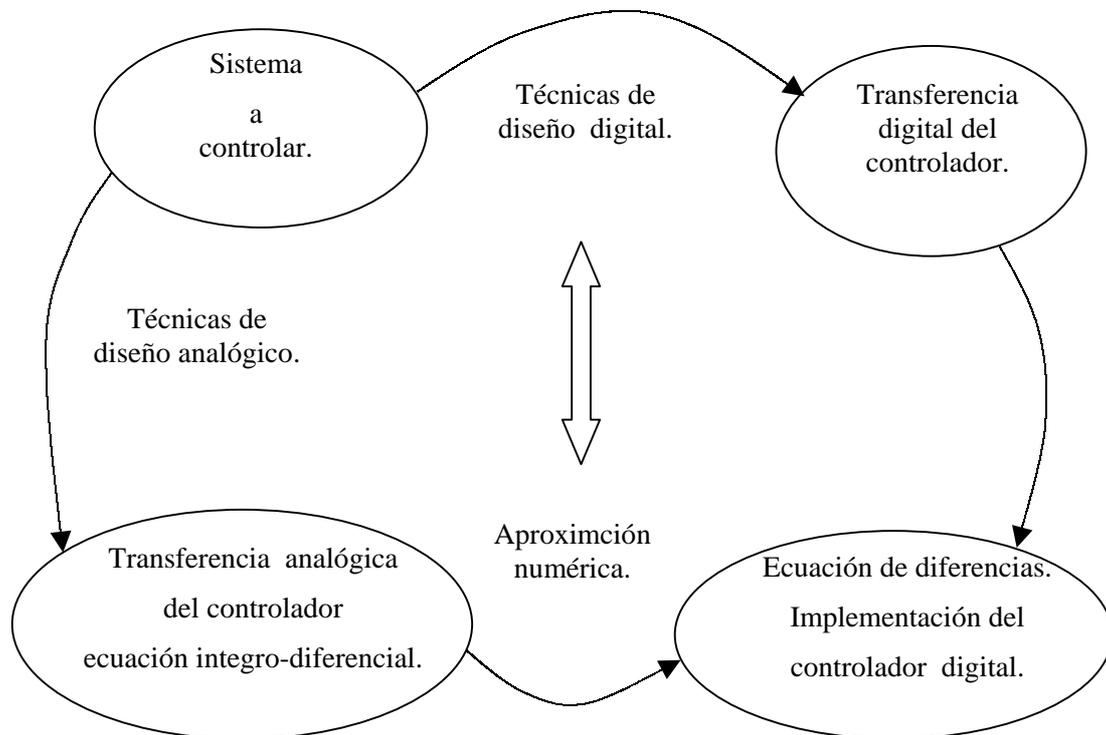


Figura 5-5.

V.3.1. APROXIMACIONES NUMÉRICAS.

A continuación citamos algunas de las aproximaciones numéricas más comúnmente empleadas para aproximar la integración y la diferenciación.

1-integral

a) *Regla rectangular hacia delante.* Según esta regla, la integral (5-22), es decir el arrea bajo la curva $e(t)$ (figura 5-6), puede ser aproximada por la sumatoria (5-23).

$$u(t) = \int_0^t e(t) dt \quad (5-22)$$

$$u_{nT} = T \sum_{i=0}^{n-1} e_{iT} \cdot \quad (5-23)$$

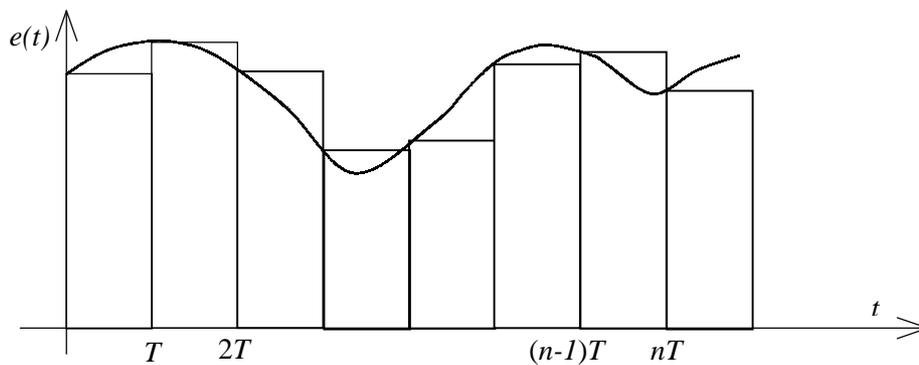


Figura 5-6 Aproximación de la integral por la "regla rectangular a izquierda".

La ecuación (5-23) (conocida como "algoritmo de posición") no es útil para su aplicación directa ya que requiere almacenar todas las muestras pesadas de una señal para aproximar la integral en el instante $t=nT$. Normalmente se emplea el algoritmo recursivo denominado "de velocidad" en el que sólo es necesario almacenar algunas muestras. A partir de la ecuación (5-23) es:

$$u_{nT} = T \sum_{i=0}^{n-2} e_{iT} + T e_{(n-1)T} \cdot \quad (5-24)$$

Esta expresión puede reducirse aplicando nuevamente la ecuación (5-23) a:

$$u_{nT} = u_{(n-1)T} + T e_{(n-1)T} \quad (5-25)$$

La ecuación (5-25) es de aplicación inmediata y requiere solamente la utilización de la última muestra de la señal $e_{(n-1)T}$ y del resultado de la integral en el paso previo $u_{(n-1)T}$.

Según esta regla de aproximación numérica, la transferencia digital de un integrador resulta:

$$\frac{U(z)}{E(z)} \cong \frac{T z^{-1}}{1 - z^{-1}}, \quad (5-26)$$

que si se vincula con la función de transferencia de un integrador analógico, implicaría que existe una transformación entre planos dada por:

$$s \cong \frac{1 - z^{-1}}{T z^{-1}}. \quad (5-27)$$

b) *Regla rectangular hacia atrás.* Según esta regla, la integral (5-22) es aproximada por la ecuación (5-28) (figura 5-7).

$$u_{nT} = T \sum_{i=1}^n e_{iT}, \quad (5-28)$$

luego

$$u_{nT} = T \sum_{i=1}^{n-1} e_{iT} + T e_{nT} \quad (5-29)$$

$$u_{nT} = u_{(n-1)T} + T e_{nT}. \quad (5-30)$$

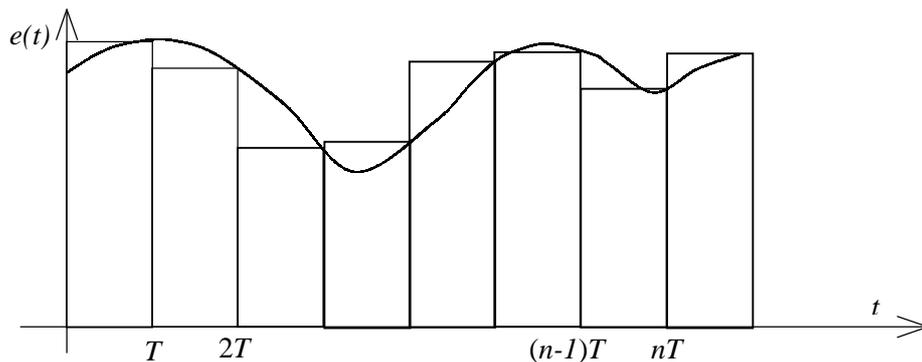


Figura 5.7. Aproximación de la integral por la "regla rectangular a la derecha".

La diferencia con el caso anterior (ecuación (5-25)) radica en que se utiliza la muestra actual de la señal e_{nT} en lugar de la muestra anterior $e_{(n-1)T}$. Luego la función de transferencia digital de un integrador es aproximada por:

$$\frac{U(z)}{E(z)} \cong \frac{T}{1-z^{-1}}.$$

Expresión que si se vincula con la correspondiente a la función de transferencia de un integrador analógico resulta:

$$s \cong \frac{1-z^{-1}}{T}. \quad (5-31)$$

c) *Regla trapezoidal.* Según esta regla, la integral (5-2) es aproximada por la ecuación (5-32) (figura 5.8).

$$u_{nT} = \frac{T}{2} \sum_{i=1}^n (e_{(i-1)T} + e_{iT}), \quad (5-32)$$

luego:

$$u_{nT} = u_{(n-1)T} + \frac{T}{2} (e_{nT} + e_{(n-1)T}). \quad (5-33)$$

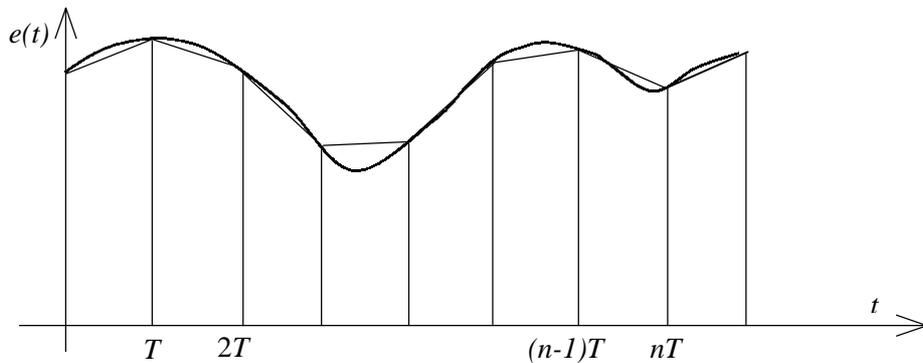


Figura 5.8. Aproximación de la integral por la "regla trapezoidal".

Esta regla (ecuación (5-33)) utiliza para el cálculo de la integral en el instante nT el resultado de la integral en el paso previo ($u_{(n-1)T}$) y los valores actual (e_{nT}) y previo ($e_{(n-1)T}$) de la señal. Luego, a través de esta aproximación, la función de transferencia de un integrador digital resulta:

$$\frac{U(z)}{E(z)} \cong \frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}.$$

De acuerdo a la aproximación empleada sería válida la siguiente transformación:

$$s \cong \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \quad (5-34)$$

- diferenciación

Diferenciación hacia atrás. Esta es la diferenciación más difundida para aproximar la derivada de una señal. La misma está dada por:

$$\frac{d e(t)}{dt} \cong \frac{e(t) - e(t-T)}{T} \quad (5-35)$$

$$\left. \frac{d e(t)}{dt} \right|_{t=nT} \cong \frac{e_{nT} - e_{(n-1)T}}{T}. \quad (5-36)$$

La expresión (5-36) sólo requiere, para aproximar el valor de la derivada de una señal en un dado instante de tiempo (nT) el conocimiento del valor de la señal en dicho instante (e_{nT}) y en el instante de muestreo previo ($e_{(n-1)T}$) (figura 5.9).

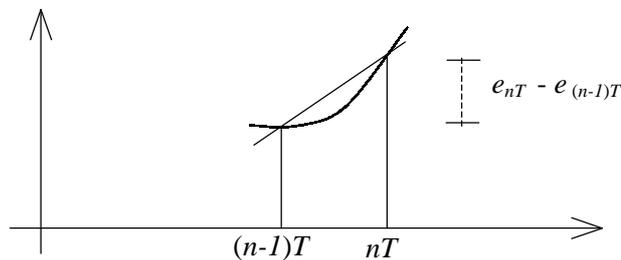


Figura 5.9. Aproximación de la derivada.

Luego, esta aproximación implica:

$$s \cong \frac{1 - z^{-1}}{T}. \quad (5-37)$$

expresión coincidente con la ecuación (5-31).

Las aproximaciones anteriores son las más empleadas para discretizar la ecuación integro-diferencial del controlador. Obviamente, todas tienen un comportamiento apto en la medida que el período de muestreo sea chico frente a la dinámica del proceso bajo control, condición que generalmente se verifica en procesos industriales.

Ejemplo 3.

La ecuación integro-diferencial del controlador PID analógico es:

$$u(t) = K_p \left\{ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{d e(t)}{dt} \right\}. \quad (5-38)$$

Si para su discretización se utiliza la expresión (5-25) para la acción integral y la (5-36) para la acción derivativa, se obtiene:

$$u_{nT} = u_{(n-1)T} + k_1 \cdot e_{nT} + k_2 \cdot e_{(n-1)T} + k_3 \cdot e_{(n-2)T}, \quad (5-39)$$

con

$$\begin{aligned} k_1 &= K_p \left(1 + \frac{T_d}{T} \right) \\ k_2 &= -K_p \left(1 + \frac{2T_d}{T} - \frac{T}{T_i} \right) \\ k_3 &= K_p \frac{T_d}{T}. \end{aligned} \quad (5-40)$$

Observe que en la ecuación (5-39) el término $u_{(n-1)T}$ incluye las acciones proporcional y derivativa calculadas en el instante $(n-1)T$.

Si, para discretizar la ecuación del PID, en lugar de la ecuación (5-25) se emplea para la acción integral la ecuación (5-33) resulta:

$$u_{nT} = u_{(n-1)T} + k_1^* \cdot e_{nT} + k_2^* \cdot e_{(n-1)T} + k_3^* \cdot e_{(n-2)T}, \quad (5-41)$$

con:

$$\begin{aligned} k_1^* &= K_p \left(1 + \frac{T_d}{T} + \frac{T}{2T_i} \right) \\ k_2^* &= -K_p \left(1 + \frac{2T_d}{T} - \frac{T}{2T_i} \right) \\ k_3^* &= K_p \frac{T_d}{T}. \end{aligned} \quad (5-42)$$

Aún bajo la suposición de que la aproximación del controlador digital es lo suficientemente buena, el comportamiento del sistema de lazo cerrado compensado digitalmente puede diferir del correspondiente al sistema de lazo cerrado puramente analógico. Esto es debido al efecto del muestreador y reconstructor de señal, los cuales no han sido incluidos en la aproximación.

En una sección previa se demostró que es posible modelar el conjunto muestreador re-constructor de señal por un retardo puro de medio período de muestreo. A su vez este retardo puede ser aproximado por una serie truncada del desarrollo en serie de la exponencial $e^{-sT/2}$. Así por ejemplo, el conjunto muestreador re-constructor podría modelarse por:

$$e^{-sT/2} \cong \frac{1}{\frac{sT}{2} + 1}. \quad (5-43)$$

Si la locación de este polo, se encuentra lejana con respecto a la de los polos dominantes del sistema a compensar, no habrá diferencias significativas entre las repuestas de los dos lazos de control. Si en cambio, este polo se encuentra próximo a los polos del sistema a lazo abierto, habrá que diseñar el controlador analógico teniendo en cuenta este polo.

V.4. COMPENSACIÓN MEDIANTE LA TÉCNICA DEL LUGAR DE RAÍCES.

V.4.1 COMPENSADOR POR RETRASO DE FASE.

El compensador por retraso de fase es empleado, en forma análoga a sistemas continuos, para reducir el error de estado estacionario. Su estructura es de la forma:

$$D(z) = K_d \frac{z - z_0}{z - z_p}, \quad (5-44)$$

con $z_0 < z_p$ y $0 < z_p \leq 1$.

Luego, la ganancia de lazo abierto es de la forma:

$$D(z)G(z) = K_d \frac{z - z_0}{z - z_p} G(z). \quad (5-45)$$

Como ha sido comentado en secciones previas, el error de estado estacionario se encuentra asociado en forma inversa al límite de la ecuación (5-45) cuando $z \rightarrow 1$ (es decir $\omega \rightarrow 0$).

Resulta obvio que si se elige el polo del compensador en $z=1$, se aumenta en uno el tipo del sistema, se anula el error de estado estacionario a una determinada excitación y se reduce el correspondiente a una excitación de mayor orden. Esto, en un sistema analógico, corresponde a poner una acción integral pura en el controlador, es decir un polo en $s=0$. A diferencia de lo que sucede en sistemas continuos, donde un integrador ideal no puede ser implementado, en sistemas discretos no existe dificultad para implementar una transferencia digital con un polo en $z=1$, ya que esto se reduce a poner el coeficiente adecuado en una ecuación recursiva.

A los efectos de que la inclusión del polo en $z=1$ del controlador no afecte la estabilidad relativa del sistema de lazo cerrado debe localizarse el cero del controlador en las proximidades de este polo.

V.4.2. COMPENSADOR POR ADELANTO DE FASE.

Este compensador es de la misma forma que el compensador por retraso de fase (ecuación (5-44)) pero con la condición que $0 < z_p < z_0 \leq 1$. Es empleado cuando se quiere mejorar el comportamiento transitorio, no difiriendo la metodología de diseño de la del caso analógico. Efectivamente, el diseño se reduce a:

a) de acuerdo a las especificaciones temporales, se elige la locación de los polos dominantes (z_1, z_2) del sistema a lazo cerrado,

b) se verifica si el lugar de raíces pasa por dichos puntos, a los efectos de ver si es posible cumplir las especificaciones con un controlador de acción únicamente proporcional,

c) si no se verifica la condición anterior, se determina el aporte de fase necesario que debe introducir el compensador a los efectos de que el lugar de raíces pase por los puntos z_1 y z_2 :

$$\angle D(z_1) = -180^\circ - \angle G(z_1), \quad (5-46)$$

d) se elige la localización del par polo-cero para verificar la condición anterior,

e) se ajusta la ganancia del controlador para verificar la condición de módulo

$$|D(z_1)G(z_1)| = 1. \quad (5-47)$$

Ejemplo 4.

Supóngase el sistema:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}. \quad (5-48)$$

Basados en especificaciones de respuesta temporal, se desea que el sistema a lazo cerrado presente dos polos dominantes con coeficiente de amortiguamiento $\xi = 0,7$ y pulsación natural $\omega_n = 2$ rad/seg.

Si se elige $T = 0,1$ seg., resulta:

$$T = 0,1 \text{ seg. ; } \quad G(z) = \frac{0,00484 z + 0,00468}{(z-1)(z-0,905)} \quad (5-49)$$

Para el diseño se procede a:

a) De acuerdo a las especificaciones, los polos de lazo cerrado deben localizarse en:

$$z_1, z_2 = 0,86 \pm j 0,125$$

b) En la figura 5.10 se muestra el diagrama del lugar de raíces para el caso en que se emplea un controlador proporcional puro.

Como este diagrama no pasa por los puntos z_1 y z_2 , se diseña un controlador por adelanto de fase a los efectos de verificar las especificaciones.

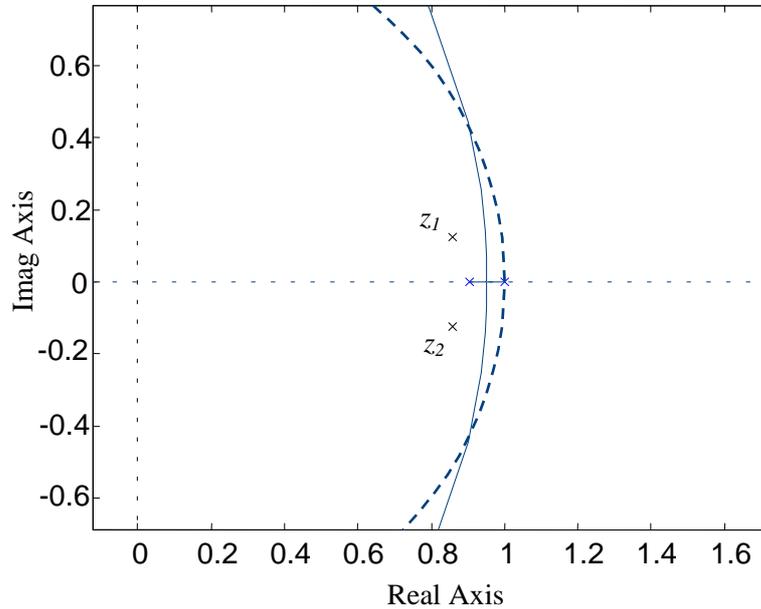


Figura 5.10 Lugar de raíces del sistema con controlador proporcional puro.

c) El aporte de fase del compensador resulta:

$$\angle D(z_1) = -180^\circ - \angle G(z_1) = 64^\circ.$$

d) Evidentemente, es necesario utilizar un compensador por adelanto de fase. El diseño se realiza fijando la posición del cero $z_0=0,9$ y calculando la posición del polo para que el aporte de fase sea de 64° . De ese modo se obtiene:

$$D(z) = \frac{z - 0,9}{z - 0,73}.$$

e) El diagrama del lugar de las raíces correspondiente al sistema compensado ($G(z)D(z)$) se ha representado en la figura 5.11.

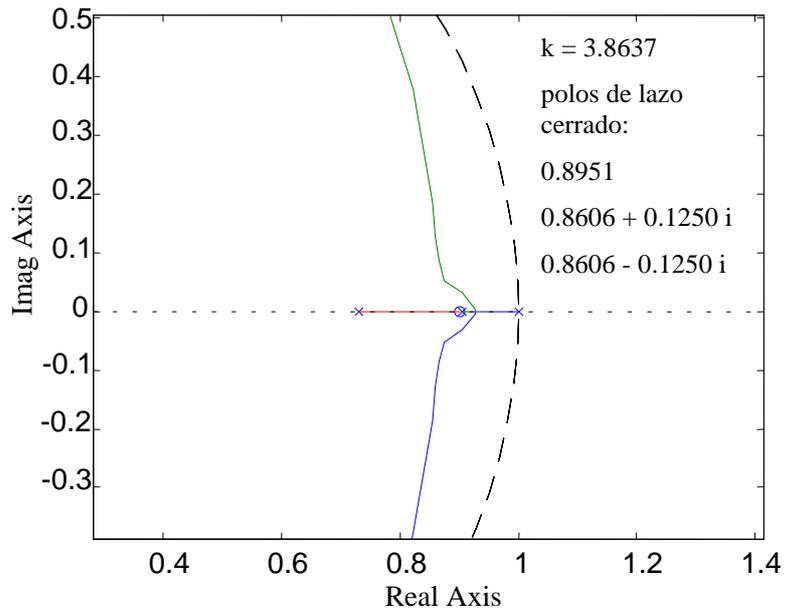


Figura 5.11. Lugar de raíces del sistema compensado.

Se observa en la figura que el diagrama pasa por los puntos z_1 y z_2 para una ganancia del compensador de valor $K_d=3,8637$. De modo que la expresión final del compensador está dada por:

$$D(z) = 3,8637 \frac{z - 0,9}{z - 0,73}$$

En la figura 5.12 se ha representado la respuesta del sistema compensado a lazo cerrado frente a una excitación escalón unitario.

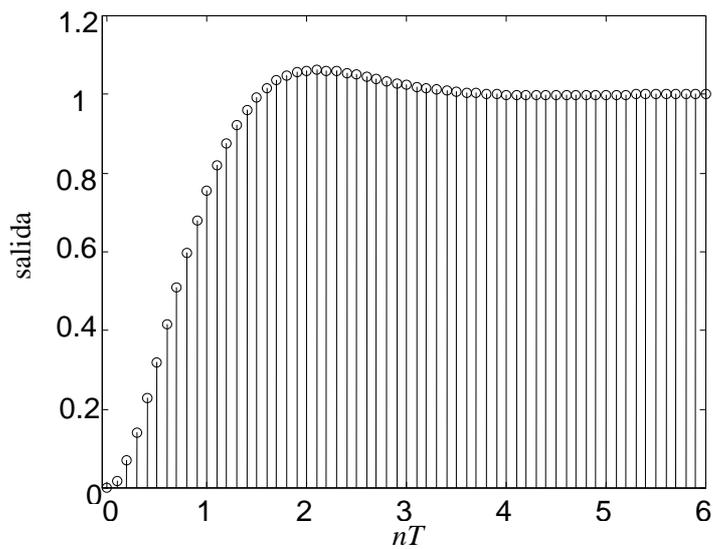


Figura 5.12. Respuesta al escalón del sistema compensado.

V.5. COMPENSACIÓN EN EL DOMINIO w .

Como ya se ha discutido, pueden emplearse las ideas de compensación por retraso y adelanto de fase para mejorar las características de un sistema muestreado de lazo cerrado. En forma análoga al caso de controladores de tiempo continuo, estos compensadores pueden expresarse en el dominio z a través de:

$$D(z) = K_d \frac{z - z_0}{z - z_p} \quad (5-50)$$

En sistemas continuos, el diseño de este tipo de controladores suele ser realizado a partir de la respuesta en frecuencia del sistema a controlar, en base a especificaciones de márgenes de fase y ganancia, y a los coeficientes de error. El diseño se ve favorecido por la posibilidad de levantar la respuesta en frecuencia por medio de los diagramas de Bode. Esta facilidad no es accesible en el dominio de la variable z .

Sin embargo, la misma metodología de diseño empleada para los sistemas continuos puede ser empleada en sistemas discretos si estos son analizados en el dominio w . A este efecto debe obtenerse $G(w)$ a partir de reemplazar

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w} \quad (5-51)$$

en la expresión de la función de transferencia $G(z)$. Posteriormente puede obtenerse la respuesta en frecuencia en forma aproximada a través de los diagramas de Bode y proceder en forma completamente análoga al diseño clásico de compensadores continuos. A partir de esta metodología es obtenido el compensador en el dominio w :

$$D(w) = \frac{1 + \frac{w}{w_0}}{1 + \frac{w}{w_p}} \quad (5-52)$$

siendo, ahora, necesario obtener el equivalente en el dominio z :

$$D(z) = \frac{1 + \frac{w}{w_0}}{1 + \frac{w}{w_p}} \bigg|_{w=T(z-1)/2(z+1)} \quad (5-53)$$

$$D(z) = \frac{w_p (w_0 + 2/T)}{w_0 (w_p + 2/T)} \frac{z + \frac{(w_0 - 2/T)}{(w_0 + 2/T)}}{z + \frac{(w_p - 2/T)}{(w_p + 2/T)}}, \quad (5-54)$$

es decir que

$$K_d = \frac{w_p (w_0 + 2/T)}{w_0 (w_p + 2/T)} \quad (5-55)$$

$$z_0 = -\frac{(w_0 - 2/T)}{(w_0 + 2/T)} \quad (5-56)$$

$$z_p = -\frac{(w_p - 2/T)}{(w_p + 2/T)}. \quad (5-57)$$

Ejemplo 4.

Se desea controlar digitalmente la mano de un brazo robótico la cual debe sujetar y transportar frágiles vasos de vidrio de diferentes tamaños. El objetivo es diseñar el servomecanismo digital que controla el movimiento en una dirección del sistema de sujeción. Un diagrama esquemático de la mano artificial, que es accionada mediante un motor de corriente continua, se ha representado en la figura 5.13.

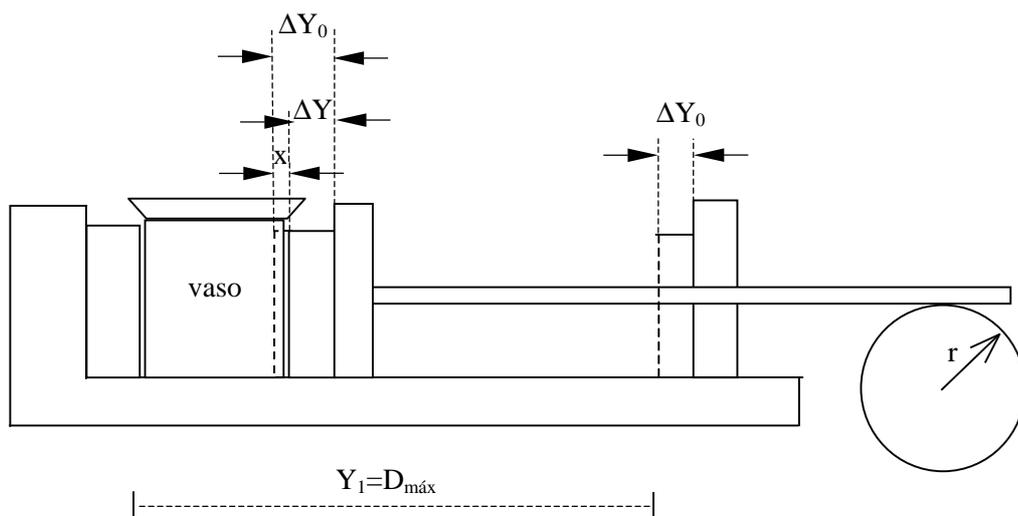


Figura 5.13. Diagrama esquemático de la mano artificial.

Para sostener firmemente el vaso de vidrio, sin romperlo, el soporte está recubierto por una banda elástica la cual debe comprimirse entre $X=5\text{mm}$ y $X=6\text{mm}$. Un sensor de presión permite determinar el espesor de la banda elástica con una precisión de $0,1\text{mm}$. El diámetro del vaso es desconocido, pero el diámetro máximo es de $0,2\text{m}$. El movimiento de cierre debe ser rápido y suave, el tiempo entre arranque y parada debe ser del orden de $0,5\text{ seg.}$ y no puede utilizarse ningún sistema mecánico como ser embrague o freno.

El movimiento mecánico debe realizarse en tres etapas a saber: aceleración, desaceleración y posicionamiento.

- Aceleración:

Durante esta etapa, el sistema de accionamiento cerrará la mano a aceleración constante hasta que el sensor de presión contacta al vaso. La posición inicial de la mano abierta es igual diámetro máximo de $0,2\text{m}$.

- Desaceleración:

Esta etapa comienza cuando el sensor de presión toca al vaso de vidrio y termina cuando se detiene la operación de cierre. La distancia de frenado es de $X \leq 5\text{mm}$.

- Posicionamiento:

El servomecanismo de posición establece la posición final del sistema de sujeción que es del orden de $X \cong 5,2\text{ mm}$. Este valor se obtiene teniendo en cuenta que el sistema se detiene cuando la variable medida alcanza 5mm y que ambos, precisión del sensor y zona muerta del lazo de control son de $0,1\text{mm}$.

El sobrepaso máximo admisible será de:

$$M = \frac{6 - 5,2}{5,2} = 15\% . \quad (5-58)$$

El diagrama en bloques del sistema en lazo cerrado se ha indicado en la figura 5.14. $D(z)$ representa al controlador digital, K_I al amplificador de potencia, K_T la constante del motor cuyos polos se suponen despreciables, T_F el valor estimado de la fricción coulombiana, $G(s)$ la planta a controlar y K_0 la ganancia del sensor de presión.

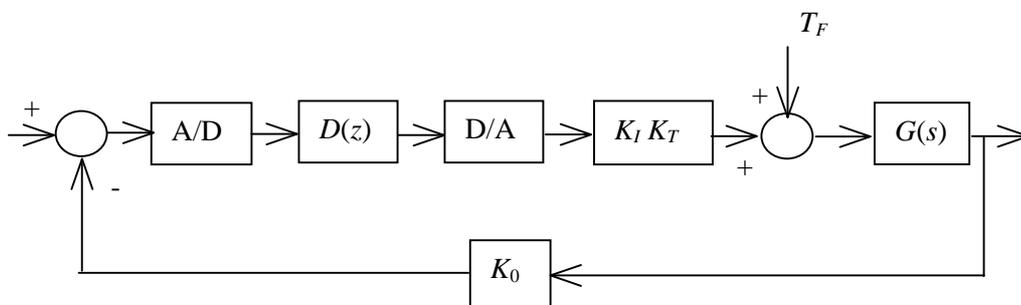


Figura 5.14. Diagrama en bloques del sistema a lazo cerrado.

Se supone que no existe roce viscoso, de modo que la función de transferencia de la planta se obtiene por aplicación directa de la segunda ley de Newton.

$$G(s) = \frac{1}{r m s^2}, \quad (5-59)$$

donde r representa el radio de la polea ($r=0,015\text{m}$) y m la masa del brazo móvil ($m=1\text{Kg.}$)

Las especificaciones son las siguientes:

Aceleración:

$$a_1 = 2 Y_1 / t_1^2 = 1,6 \text{ m/s}^2. \quad (5-60)$$

Velocidad máxima:

$$V_m = a_1 t_1 = 0,8 \text{ m/s}. \quad (5-61)$$

Desaceleración:

$$a_2 = \frac{V_m^2}{2 \times 5 \text{ mm}} = 64 \text{ m/s}^2. \quad (5-62)$$

El radio de la polea es de $r=0,015\text{m}$ de modo que la cupla de frenado debe ser de:

$$T_1 = r m a_2 = 0,015 \times 1 \times 64 = 0,95 \text{ Nm} \quad (5-63)$$

Se elige un motor cuya cupla máxima es de $T_m=1,2 \text{ Nm}$ y su constante es de $K_T=0,3 \text{ Nm/A}$. Se elige un amplificador de potencia de ganancia $K_I=1 \text{ A/V}$ cuya saturación es de $I_m=T_m/K_T=4\text{A}$.

Dado que la zona muerta de sistema debe ser de $0,1\text{mm}$, la ganancia del controlador debe ser de:

$$K_c = \frac{T_F}{ZM K_0 K_I K_T} = 0,4. \quad (5-64)$$

La función de transferencia de lazo abierto, empleando un controlador proporcional, está dada por:

$$G(z) = K_1 (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{1}{s^3} \right\}, \quad (5-65)$$

donde $K_1 = K_0 K_c K_I K_T / (r m) = 6.640 \text{ 1/s}^2$.

A partir de las tablas de transformada z se obtiene:

$$G(z) = \frac{K_1 T^2 (z + 1)}{2 (z - 1)^2}. \quad (5-66)$$

Si se elige un período de muestreo de $T=1,4 \text{ ms.}$, se obtiene:

$$G(z) = 6,5 \times 10^{-3} \frac{(z + 1)}{(z - 1)^2}. \quad (5-67)$$

El análisis de la estabilidad y el diseño de la compensación se realizará empleando los diagramas de Bode en plano w .

La función de transferencia de lazo abierto en el plano w está dada por:

$$G(w) = -6640 \frac{(-1 + 0.0007w)}{w^2}. \quad (5-68)$$

Los diagramas de Bode correspondientes a la expresión anterior se han representado en la figura 5.15.

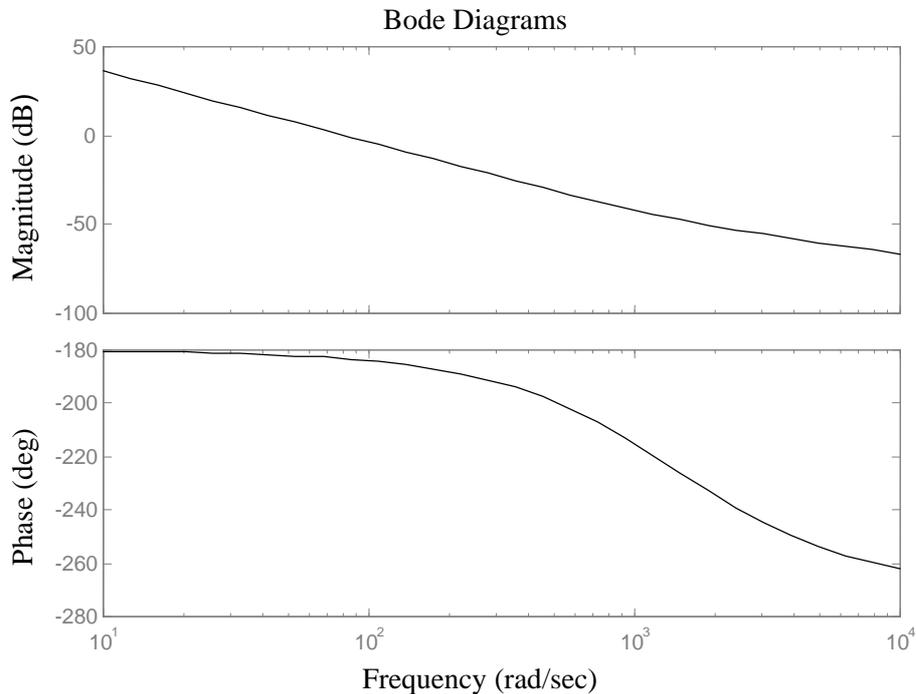


Figura 5.15. Diagramas de Bode del sistema sin compensar a lazo abierto en el plano w .

Del análisis de la figura se deduce que el sistema sin compensar (compensación solamente proporcional) es inestable. En efecto, ambos márgenes de ganancia (MG) y fase (MF) son negativos y el margen de ganancia alcanza una magnitud ilimitada. Obsérvese que el cero introduce una rotación de fase negativa debido a que se trata de un cero de no mínima fase.

El máximo sobrepaso permitido para la respuesta al escalón del sistema en lazo cerrado es del 15%. Suponiendo que el comportamiento del sistema a lazo cerrado sea el de un segundo orden dominante, los márgenes de fase y ganancia deben ser:

$$MF > 50^\circ ; MG > 10 \text{ dB.} \quad (5-69)$$

Es necesario utilizar un compensador por adelanto de fase. Después de varios intentos de prueba y error, el compensador elegido es el siguiente:

$$D(w) = 0,8 \frac{(1 + w/35)}{(1 + w/7000)} \quad (5-70)$$

La función de transferencia a lazo abierto del sistema compensado, en plano w vale:

$$G(w) = -5,3136 \times 10^3 \frac{(1 + w/35)(-1 + 0,0007 w)}{(1 + w/7000)w^2} \quad (5-71)$$

Con el fin de facilitar la compensación, se han representado en la figura 5.16 los diagramas de Bode del sistema a lazo abierto sin compensar y compensado.

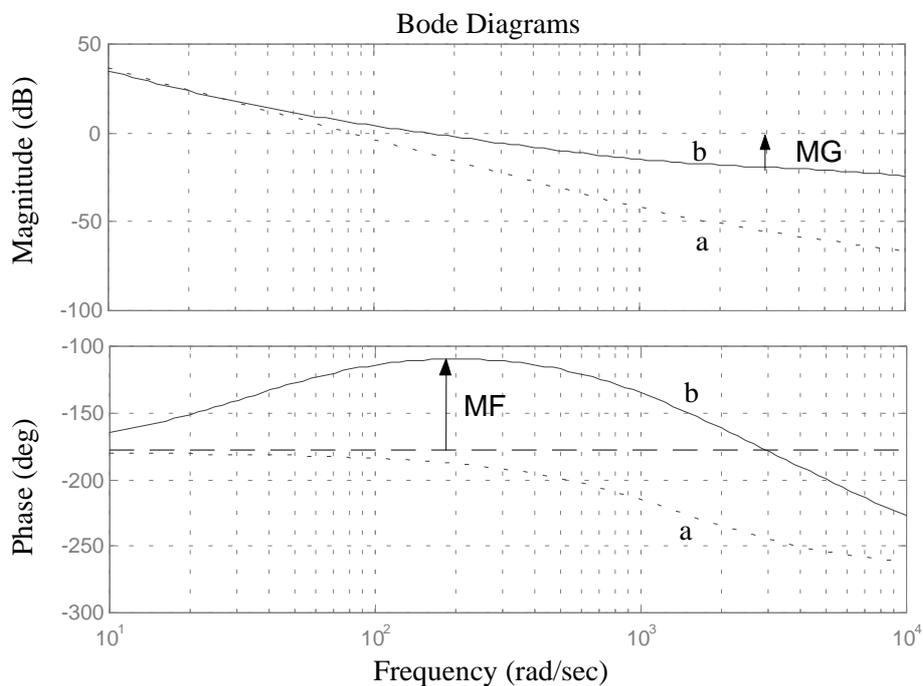


Figura 5.16. Diagrama de Bode del sistema a lazo abierto en el plano w . a) con compensación proporcional. b) con compensación por adelanto de fase.

Del análisis de la figura se desprende que el sistema compensado a lazo cerrado será estable. Además los márgenes de ganancia y fase valen:

$$MF = 69.859^\circ ; MG = 19.43 \text{ dB} \quad (5-72)$$

La implementación del controlador puede realizarse empleando la transformada inversa w . A partir de la ecuación (5-70), se obtiene:

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = 27,7831 \frac{(z - 0,9522)}{(z + 0,661)} \quad (5-73)$$

Pasando al plano temporal, la ecuación a diferencias resultante es:

$$u_{nT} = -0,661 u_{(n-1)T} + 27,7831 e_{nT} - 26,4551 e_{(n-1)T} \quad (5-74)$$

Esta es la ecuación a diferencias que debe ser implementada en el controlador digital.

La respuesta al escalón del sistema compensado a lazo cerrado, se ha graficado en la figura 5.17.

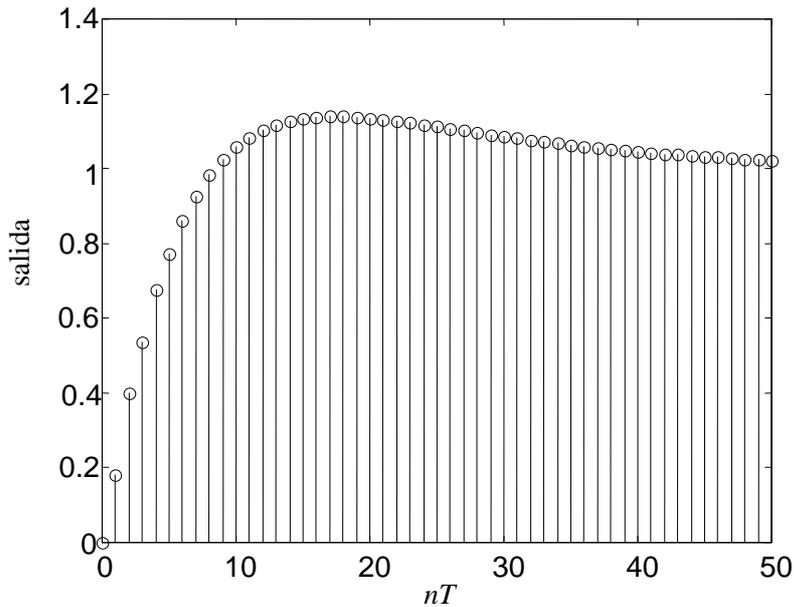


Figura 5.17. Respuesta al escalón del sistema compensado a lazo cerrado.

La figura muestra que el comportamiento del sistema a lazo cerrado es satisfactorio ya que el sobreimpulso es del 12%.

V.6. ELECCIÓN DEL PERÍODO DE MUESTREO.

Como se ha mencionado, es conveniente que T sea suficientemente pequeño a los efectos de que:

- la aproximación empleada en la discretización sea correcta,
- no se afecte la estabilidad del lazo,
- no se pierda información de la señal muestreada.

Sin embargo, el período de muestreo no puede ser reducido todo lo que se quiera; ya que existen, entre otras, limitaciones debidas a la velocidad de cálculo del procesador digital y dificultades debidas al “redondeo” entre las operaciones. Por ejemplo, un controlador de acción integral responde a la siguiente ecuación:

$$u_{nT} = u_{(n-1)T} + (T/T_i) e_{nT} \quad (5-75)$$

Esta acción actúa cuando e_{nT} es distinto de cero, pero debido a la cuantización, la señal de control que sale del convertidor digital-analógico D/A vale cero mientras que el error esté dentro de un intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$, esto hace que mientras

$$|e_{nT}| < \frac{T_i}{T} \varepsilon \quad (5-76)$$

no se produzca integración y haya una acumulación de errores. La reducción de T aumenta el factor que multiplica al nivel de cuantización ε , aumentando la zona muerta equivalente que presenta el algoritmo.

Otro ejemplo que pone de manifiesto la imposibilidad de elegir T tan pequeño como se desee es el siguiente, supóngase la acción derivativa

$$\frac{T_d}{T} (e_{(n-1)T} - e_{nT}) \quad (5-77)$$

En este caso la señal $e(t)$ entra al controlador a través del convertidor A/D y por lo tanto sólo puede tomar valores discretos distanciados en lo que se llama nivel de cuantización. Esto hace que, para el controlador, la señal e_{nT} varíe a saltos, los cuales quedan multiplicados por el factor (T_d/T) . Por lo tanto, T no puede hacerse tan pequeño como se quiera.

Estos dos efectos pueden eliminarse, desde un punto de vista práctico, empleando aritmética de punto flotante, pero esto aumenta las exigencias de almacenamiento y tiempo de computación.

Otros factores a tener en cuenta en la selección del período de muestreo T son:

- espectro de las perturbaciones
- tipo de actuador empleado
- equipo de medida
- costo computacional.

En muchos casos prácticos el período de muestreo se selecciona en base al tiempo de crecimiento de la respuesta del proceso a un escalón, eligiéndose T entre la sexta y vigésima parte del tiempo de crecimiento.