

NOTAS BREVES (SUJETAS A REVISIÓN) SOBRE:
VARIABLES DE ESTADO EN SISTEMAS LINEALES DE
TIEMPO DISCRETO.

1. INTRODUCCIÓN.

Los métodos de variables de estado para el análisis y diseño de sistemas de tiempo continuo pueden extenderse al análisis y diseño de sistemas de tiempo discreto.

En los capítulos previos, discutimos el análisis y diseño de sistemas de tiempo discreto usando la función de transferencia en z . Observamos, que mientras tratamos con sistemas de tiempo discreto, a menudo encontramos dos situaciones diferentes:

- 1) sistemas que son completamente discretos con respecto al tiempo en el sentido de que reciben y entregan sólo señales discretas (por ejemplos sistemas basados en computadoras digitales)
- 2) sistemas con componentes de tiempo continuo discretizados como consecuencia de operaciones de muestreo.

Ambos casos serán estudiados en estas notas en el contexto de las variables de estado.

La forma general del modelo de estado para un sistema de tiempo discreto es

$$x((k+1)T) = f(x(kT), u(kT)) \quad (6-1)$$

$$y(kT) = g(x(kT), u(kT)) \quad (6-2)$$

donde $x(kT)$, $u(kT)$ e $y(kT)$ son los vectores de estado, de entrada y de salida respectivamente.

A partir de estas ecuaciones vemos que, dado el estado inicial $x(0)$ y los valores de las entradas $u(0)$, $u(T)$, $u(2T)$, ..., $u(kT)$, se puede deducir unívocamente la evolución del estado $x(T)$, $x(2T)$, ..., $x((k+1)T)$ y la evolución de la salida $y(0)$, $y(T)$, ..., $y(kT)$.

Para un sistema lineal e invariante en el tiempo, de n -ésimo orden, las ecuaciones (6-1) y (6-2) se reducen a la forma siguiente ¹:

$$x(k+1) = A x(k) + B u(k) \quad (6-3)$$

$$y(k) = C x(k) + D u(k) \quad (6-4)$$

siendo:

$x(k)$ el vector de estado, de dimensión $n \times 1$

¹ De aquí en adelante, por claridad, omitiremos el período de muestreo en el argumento de la señal x , es decir $x(kT) \stackrel{\Delta}{=} x(k)$.

- $u(k)$ el vector de entrada, de dimensión $m \times 1$
- $y(k)$ el vector de salida, de dimensión $p \times 1$
- A la matriz de dinámica del sistema, de dimensión $n \times n$
- B la matriz de entrada del sistema, de dimensión $n \times m$
- C la matriz de salida del sistema, de dimensión $p \times n$
- D la matriz de salida del sistema, de dimensión $p \times m$

Se observa que la ecuación (6-3) es un conjunto de ecuaciones en diferencias de primer orden que representan la dinámica del proceso de tiempo discreto y que la ecuación de salida (6-4) es simplemente una ecuación algebraica.

2. MODELOS DE ESTADO A PARTIR DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS Y DE FUNCIONES DE TRANSFERENCIA.

La forma general de una ecuación lineal en diferencias, que relaciona la salida $y(k)$ con la entrada $u(k)$, de un sistema de tiempo discreto es

$$\begin{aligned} y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_{n-1} y(k+1) + a_n y(k) = \\ = b_0 u(k+m) + \dots + b_{m-1} u(k+1) + b_m u(k) \end{aligned} \quad (6-5)$$

donde, para sistemas invariantes en el tiempo, los coeficientes a_i y b_j son constantes (k, m, n son enteros). Las condiciones iniciales son expresadas en términos de $y(0), y(1), \dots, y(n-1)$. La función de transferencia obtenida a partir de esta ecuación, bajo la suposición de condiciones iniciales nulas, es

$$T(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^m + \dots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n} \quad (6-6)$$

En un sistema causal, m puede ser, a lo sumo, igual a n , resultando:

$$T(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (6-7)$$

Si $m < n$, la (6-7) contendrá coeficientes b_i nulos.

Existen diversas formas de obtener un modelo en variables de estado a partir de una función en transferencias. A continuación se ilustran dos métodos distintos.

Método 1:

Si adoptamos la siguiente asignación de estados:

$$\begin{aligned}
x_1(k+1) &= x_2(k) \\
x_2(k+1) &= x_3(k) \\
&\vdots \\
x_n(k+1) &= -a_n x_1(k) - a_{n-1} x_2(k) - \dots - a_1 x_n(k) + u(k)
\end{aligned} \tag{6-8}$$

la ecuación en diferencias (6.5) puede escribirse en función de estos estados como

$$\begin{aligned}
y(k) &= b_n x_1(k) + b_{n-1} x_2(k) + \dots + b_1 x_n(k) + b_0 (-a_n x_1(k) - \dots - a_1 x_n(k) + u(k)) \\
&= (b_n - a_n b_0) x_1(k) + (b_{n-1} - a_{n-1} b_0) x_2(k) + \dots + (b_1 - a_1 b_0) x_n(k) + b_0 u(k)
\end{aligned} \tag{6-9}$$

Comparando estas ecuaciones con la forma general de un modelo de estados presentada anteriormente, vemos que las ecuaciones (6.8) corresponden a la (6-3) y la (6-9) a la ecuación de salida. Es decir

$$x(k+1) = A x(k) + B u(k) \tag{6-10}$$

$$y(k) = C x(k) + D u(k)$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6-11}$$

$$C = [(b_n - a_n b_0) \quad (b_{n-1} - a_{n-1} b_0) \quad \dots \quad (b_1 - a_1 b_0)] \tag{6-12}$$

Esta forma se denomina “*forma canónica controlable*”.

Método 2: Otra representación en el espacio de estado puede obtenerse mediante la técnica de descomposición en fracciones parciales. Primero asumamos que la transferencia $T(z)$ de (6-5) tiene n polos distintos ubicados en $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Entonces $T(z)$ puede expresarse como

$$T(z) = b_0 + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{z - \lambda_i}; \quad \text{donde } c_i \text{ es el residuo del polo en } \lambda_i \tag{6-13}$$

Es decir que la salida $y(k)$ se compone a partir de las salidas de n sistemas de primer orden. Un diagrama en bloques representativo de esta descomposición se muestra en la figura 6.1.

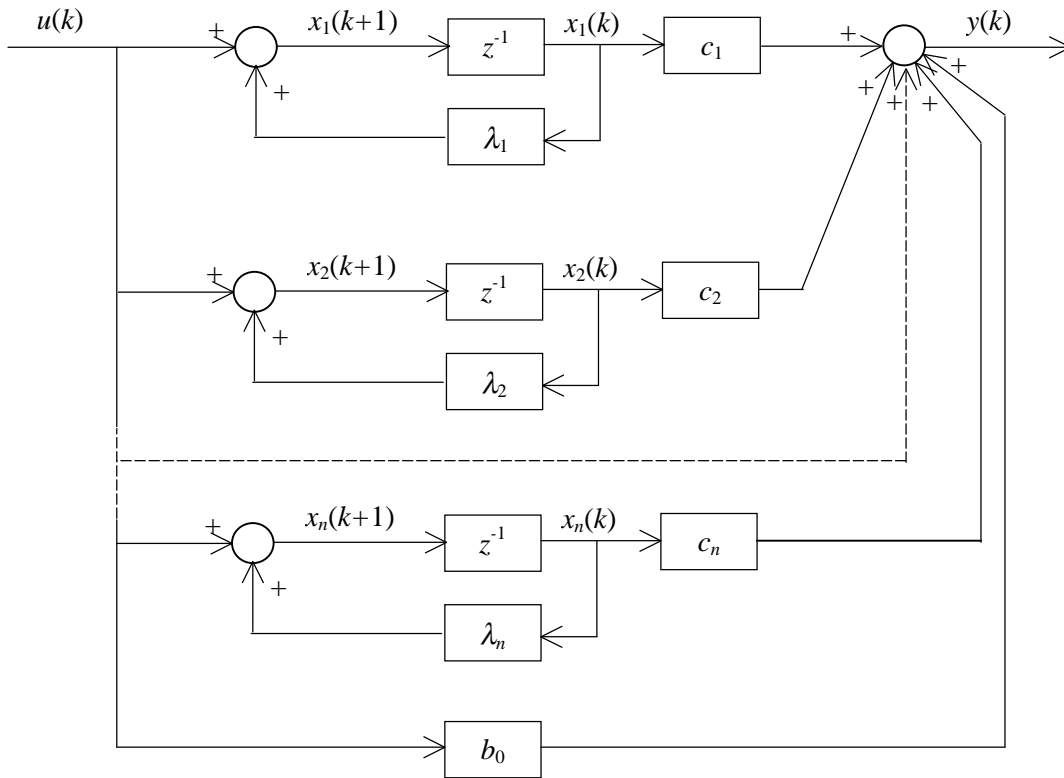


Figura 6.1. Diagrama en bloques del modelo de estado canónico.

Tomando las salidas de los elementos de retardo como variables de estado, obtenemos el siguiente modelo de estado:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (6-14)$$

$$y(k) = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k), \quad (6-15)$$

que se denomina “*modelo diagonal*”.

Cuando algunos de los polos de $T(z)$ son múltiples, no puede obtenerse un modelo diagonal puro, pero sí uno diagonal en bloques (forma canónica de Jordan).

3. DEDUCCIÓN DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA A PARTIR DEL MODELO DE ESTADO.

Aplicando la transformación z en ambos miembros de la ecuación (6-3), se obtiene

$$zX(z) - zx(0) = AX(z) + BU(z), \quad (6-16)$$

luego,

$$X(z) = (zI - A)^{-1} zx(0) + (zI - A)^{-1} BU(z). \quad (6-17)$$

A su vez, tomando la transformada z de la ecuación (6-4)

$$Y(z) = CX(z) + DU(z), \quad (6-18)$$

y resolviendo para $Y(z)$, se obtiene:

$$Y(z) = C(zI - A)^{-1} zx(0) + [C(zI - A)^{-1} B + D] U(z)$$

Así, asumiendo condiciones iniciales nulas, se obtiene la matriz de transferencia del sistema:

$$T(z) = C(zI - A)^{-1} B + D. \quad (6-19)$$

4. TRANSFORMACIÓN LINEAL DEL VECTOR DE ESTADO.

Dado un modelo de estado

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_x x(k) + B_x u(k) \\ y(k) &= C_x x(k) + D_x u(k) \end{aligned} \quad (6-20)$$

es posible llevarlo a un nuevo modelo mediante una transformación lineal del tipo:

$$x = P \cdot z \quad (6-21)$$

Siendo particularmente útiles aquellas transformaciones que conducen a formas canónicas.

Reemplazando (6-21) en (6-20) resulta:

$$\begin{aligned} z(k+1) &= P^{-1} A_x P z(k) + P^{-1} B_x u(k) \\ y(k) &= C_x P z(k) + D_x u(k) \end{aligned}, \quad (6-22)$$

es decir un nuevo modelo de estados:

$$\begin{aligned} z(k+1) &= A_z z(k) + B_z u(k) \\ y(k) &= C_z z(k) + D_z u(k) \end{aligned} \quad (6-23)$$

donde $A_z = P^{-1} A_x P$; $B_z = P^{-1} B_x$; $C_z = C_x P$; $D_z = D_x$.

5. SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE ESTADO.

A partir del modelo (6-3), (6-4), podemos escribir

$$\begin{aligned}
 x(1) &= Ax(0) + Bu(0) \\
 x(2) &= Ax(1) + Bu(1) \\
 &= A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1) \\
 &\vdots \\
 x(k) &= A^kx(0) + A^{k-1}Bu(0) + A^{k-2}Bu(1) + \dots + Bu(k-1)
 \end{aligned}
 \tag{6-24}$$

Si, para $k > 0$, se define

$$\Phi(k) = A^k \tag{6-25}$$

y

$$\Phi(0) = I \quad (\text{matriz identidad}), \tag{6-26}$$

entonces

$$x(k) = \Phi(k)x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k-i-1)Bu(i) \tag{6-27}$$

Se hace referencia a la matriz $\Phi(k)$ como la matriz de transición de estado para el sistema de tiempo discreto (6-3),(6-4). Comparando las ecuaciones (6-17) y (6-27), obtenemos una expresión alternativa para la matriz $\Phi(k)$:

$$\Phi(k) = Z^{-1} \left\{ (zI - A)^{-1} z \right\} \tag{6-28}$$

Algunas de las propiedades de la matriz de transición son:

$$\Phi(0) = I \tag{6-29}$$

$$\Phi^{-1}(k) = \Phi(-k) \tag{6-30}$$

$$\Phi(k, k_0) = \Phi(k-k_0) = A^{(k-k_0)}; \quad k > k_0 \tag{6-30}$$

6. MODELO DE UN SISTEMAS DE TIEMPO CONTINUO CON INCLUSIÓN DEL RECONSTRUCTOR DE SEÑALES.

Según se señaló, los sistemas de tiempo discreto pueden surgir de varias formas. Una de ellas es como consecuencia de operaciones de muestreo y retención sobre un sistema continuo. Veamos, como obtener el modelo de tiempo discreto de un sistema de tiempo continuo:

Considere la ecuación de estado de tiempo continuo

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= A_c x + B_c u \\
 y &= C_c x
 \end{aligned}
 \tag{6-31}$$

Impondremos las siguientes restricciones sobre el sistema.

- (i) El vector de entrada u puede cambiar sólo en los instantes de muestreo. (Reconstructor de orden cero)
- (ii) El período de muestreo T es constante.

El sistema de tiempo continuo con estas consideraciones se muestra en la figura 6.2.

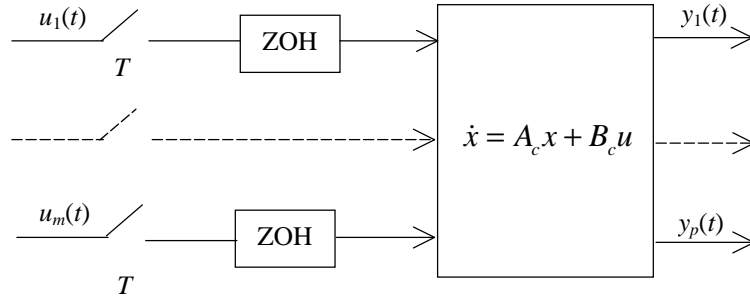


Figura 6.2. Sistema a lazo abierto con datos muestreados.

A causa de las operaciones de muestreo y retención, la entrada al sistema es constante entre instantes de muestreo y de valor

$$\begin{aligned}
 u_i(kT); \quad kT \leq t < (k+1)T \\
 k = 0; 1; 2; \dots \\
 i = 1; 2; \dots, m
 \end{aligned} \tag{6-32}$$

La solución de (6-31), con t_0 como tiempo inicial, es

$$x(t) = \Phi_c(t-t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi_c(t-\tau) B_c u(\tau) d\tau \tag{6-33}$$

Si consideramos $t_0=kT$ y durante el intervalo $kT < t < (k+1)T$, la evolución de los estados intervalo resulta:

$$x(t) = \Phi_c(t-kT) x(kT) + \int_{kT}^t \Phi_c(t-\tau) B_c u(kT) d\tau; \quad kT \leq t \leq (k+1)T \tag{6-34}$$

y en particular si $t=(k+1)T$ puede escribirse

$$x(k+1) = A x(k) + B u(k) \tag{6-35}$$

donde

$$A = \Phi_c(T) = e^{A_c T} \tag{6-36}$$

$$B = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi_c((k+1)T-\tau) B_c d\tau \tag{6-37}$$

Haciendo $\sigma = \tau - kT$, tenemos

$$B = \int_0^T \Phi_c(T-\sigma) B_c d\sigma \tag{6-38}$$

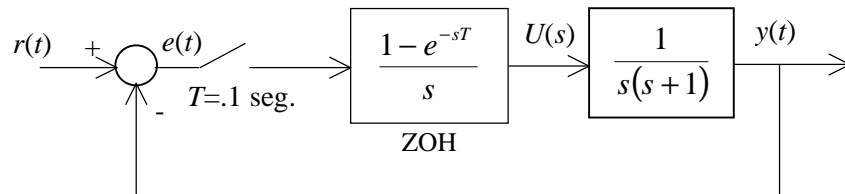
Con $\lambda = T - \sigma$, obtenemos

$$B = \int_0^T \Phi_c(\lambda) B_c d\lambda \tag{6-39}$$

Si estamos interesados en el valor de $x(t)$ entre instantes de muestreo, primero resolvemos para $x(kT)$ para todo k usando (6-25), (6-26), (6-27) y luego usamos la (6-34) para determinar $x(t)$ para $kT < t < (k+1)T$.

Ejemplo.

Considere el sistema de control muestreado de la figura



Modelo discreto de lazo abierto

Por el elemento de muestreo y retención,

$$u(t) = u(t = kT); \quad kT \leq t < (k+1)T$$

Un modelo de estado para la planta de tiempo continuo es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = A_c x + B_c u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t); \quad (e-1)$$

$$y = C_c x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (e-2)$$

La solución de la ecuación (6-21) está dada por

$$x(t) = e^{A_c(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A_c(t-\tau)} B_c u(\tau) d\tau$$

Si se considera $t_0 = kT$ y $t = (k+1)T$, se obtiene

$$\begin{aligned} x((k+1)T) &= e^{A_c T} x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A_c[(k+1)T-\tau]} B_c d\tau u(kT) \\ &= \Phi_c(T) x(kT) + \theta(T) u(kT) \end{aligned} \quad (e-3)$$

La ecuación (e-3) representa un modelo discreto del sistema continuo más el reconstructor de señal (sistema de lazo abierto).

Para $A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $e^{A_c t}$ puede calcularse a partir de antitransformar $(sI - A_c)^{-1}$:

$$e^{A_c t} = \Phi_c(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Luego, las matrices A y B del modelo discreto resultan:

$$A = \Phi_c(T) = e^{A_c T} = \begin{bmatrix} 1 & 0.095 \\ 0 & 0.905 \end{bmatrix}$$

$$B = \theta(T) = \int_0^T e^{A_c \lambda} B_c d\lambda = \begin{bmatrix} \int_0^1 (1 - e^{-\lambda}) d\lambda \\ \int_0^1 e^{-\lambda} d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0048 \\ 0.095 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, a partir de la ecuación (6-23) tenemos

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0.095 \\ 0 & 0.905 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0048 \\ 0.095 \end{bmatrix} u(k) \quad (\text{e-4})$$

Modelo discreto de lazo cerrado

Para obtener el modelo de lazo cerrado, se reemplaza

$$u(k) = r(k) - x_1(k)$$

en la expresión (e-4)

$$x(k+1) \cong \begin{bmatrix} 1 & 0.095 \\ 0 & 0.905 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0048 \\ 0.095 \end{bmatrix} (r(k) - x_1(k))$$

$$x(k+1) \cong \begin{bmatrix} 1 & 0.09 \\ 0 & 0.81 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0048 \\ 0.095 \end{bmatrix} r(k)$$

Otro enfoque para la obtención de un modelo de estado discreto, es a través de obtener previamente la transferencia muestreada

$$G(z) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s^2(s+1)} \right\} \quad (\text{e-5})$$

7. CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD.

Los conceptos de controlabilidad y la observabilidad, ya presentados, se aplican directamente a sistemas lineales de tiempo discreto. Los tests de Kalman y Gilbert también pueden usarse para sistemas de tiempo discreto.

8. ASIGNACIÓN DE POLOS POR REALIMENTACIÓN DEL ESTADO.

La noción de realimentación de las variables de estado es tan potente en sistemas de tiempo muestreado como en sistemas de tiempo continuo.

Consideramos el sistema con realimentación de estados mostrado en la figura 6.3.

$$\dot{x} = A_c x + B_c u \quad (6-40)$$

$$u = r - K_c x \quad (6-41)$$

$$y = C_c x \quad (6-42)$$

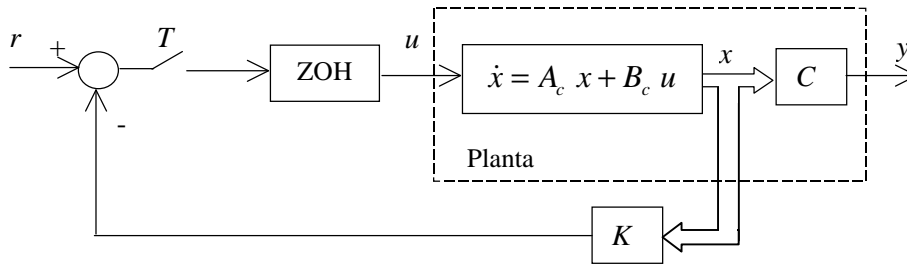


Figura 6.3. Sistema muestreado con realimentación de estado.

La forma discreta de la ecuación (6-31) conforme a (6-40), (6-41) y (6-42) es

$$x(k+1) = A x(k) + B u(k) \quad (6-43)$$

Cerrando el lazo a través de una realimentación de estados

$$u(k) = r(k) - Kx(k) \quad (6-44)$$

resulta

$$x(k+1) = (A - BK)x(k) + Br(k) \quad (6-45)$$

Luego, asumiendo que el sistema es completamente controlable, pueden seleccionarse las ganancias de realimentación para que los autovalores de la matriz $(A - BK)$ se correspondan con los polos de lazo cerrado deseados.

Nota: Detalles del método de asignación de polos y ejemplos pueden encontrarse en muchos textos de sistemas de control discreto, por ejemplo: Digital Control System Analysis and Design, Phillips & Troy Nagle (cap. 9).

Problemas.

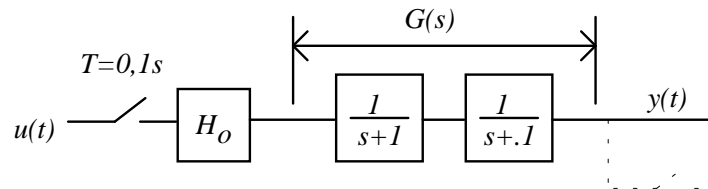
Problema 1. Encuentre los modelos de estado en la formas canónica controlable y diagonal de los sistemas discretos:

a) $y(k) - 1.4 y(k-1) + .45 y(k-2) = u(k) - u(k-1) - u(k-2)$

b) $T(z) = \frac{4 \cdot z^3 - 12 \cdot z^2 + 13 \cdot z - 7}{(z-1)(z-2)(z-.5)}$

Problema 2. A partir de los modelos de estado calculados en el problema 1a) obtenga las correspondientes funciones de transferencia

Problema 3. Para el sistema muestreado de la figura, obtenga un modelo de estados discreto.



Problema 4. Considere el sistema del ejemplo de la sección 6

- a) Analice la controlabilidad y observabilidad del sistema original y del muestreado.
- b) Calcule la matriz de transición de estados y la respuesta del sistema discreto a condiciones iniciales $x(0)^T = [1 \ 0]$ y excitación $u(k)=1$ para $k \geq 0$.
- c) Diseñe un control por realimentación de estados, de manera que los polos de lazo cerrado estén ubicados en $z=0.95$ y $z=0.9$.