



CONTROL MODERNO

Notas y ejemplos sobre Controlabilidad y Observabilidad para ayudar al seguimiento de las clases.

Ricardo J. Mantz
Pablo E. Troncoso

1. Controlabilidad y observabilidad

Previo al diseño de un controlador, es útil verificar algunas propiedades del sistema que nos darán idea del grado de performance al que podemos aspirar.

Entre otras propiedades, en este curso analizaremos dos: *controlabilidad* y *observabilidad*. Estas propiedades nos indican en que grado las variables internas de nuestro sistema (las variables de estado) se vinculan con las variables externas, es decir la excitación y la variable controlada. Así el concepto de controlabilidad está ligado a como la excitación puede modificar el comportamiento transitorio de las variables de estado, mientras que el concepto de observabilidad está ligado a como los cambios de las variables internas pueden ser detectados desde la salida.

Definición. Se dice que un sistema es completamente controlable si existe una señal $u(t)$ que permite transferir los estados iniciales del sistema $x_0=x(t_0)$ a cualquier otro estado $x_f=x(t_f)$ en un tiempo finito $T=t_f-t_0$.

Definición. A su vez se dice que el sistema es completamente observable si en ausencia de excitación es posible determinar el valor de sus estados iniciales $x_0=x(t_0)$ a partir de la observación de la salida $y(t)$ durante un período finito de tiempo $t_f-t_0>0$.

A diferencia de lo que sucede en la teoría del control clásico, la teoría del control moderno considera la realimentación de variables internas, es decir de sus estados. De ahí la importancia del concepto de controlabilidad completa. Históricamente, este concepto fue introducido por Kalman y le permitió demostrar la imposibilidad de controlar un sistema inestable por cancelación de polos con ceros, mas allá de la exactitud de la cancelación.

Como se verá en las próximas clases la teoría de control moderno plantea la realimentación de todos los estados, lo cual requiere de sus medidas. Obviamente esto no siempre es posible, o bien por razones físicas o por inviabilidad económica. Estas limitaciones pueden sobrellevarse

con la implementación de un observador de estados que a partir de la medida de la excitación y la variable controlada permite estimar el valor de los estados reales. La posibilidad de construir un observador de estados está sujeta a que el sistema sea observable.

Ejemplo 1.

Consideremos el circuito de la figura 1, donde pueden tomarse las tensiones de los capacitores para plantear un modelo de estados, e.d. $[x_1(t), x_2(t)]^T = [v_{c1}(t), v_{c2}(t)]^T$. Note que la excitación es un generador de corriente y que la salida, la tensión $y(t)$, es a circuito abierto.

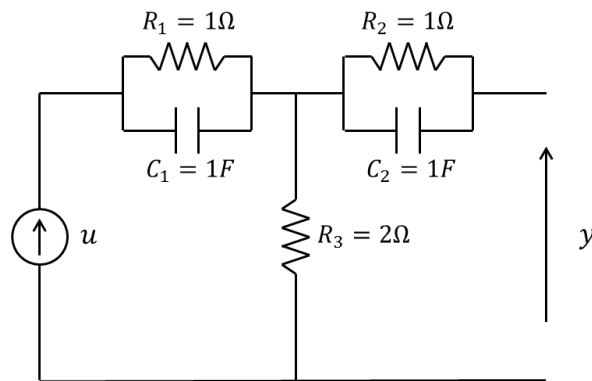


Figura 1

Como los terminales de salida están a circuito abierto toda la corriente de excitación circula por R_3 , luego el estado $x_2(t)=v_{c2}(t)$ no es influenciado por la entrada $i(t)$. Efectivamente, si el capacitor C_2 tuviera un estado de carga inicial, el mismo se descargaría con constante de tiempo R_2C_2 , mas allá de los valores de $i(t)$. Puede decirse, entonces que el circuito no es completamente controlable, ya que no lo es el estado $x_2(t)$.

Por otra parte, como el generador es de corriente, sobre la resistencia R_3 cae la tensión $R_3.i(t)$ que es independiente de la tensión sobre el capacitor C_1 . Luego, la salida $y(t)$ queda aislada del estado $x_1(t)$ ($y(t)$ es independiente de $x_1(t)$) y por consiguiente el estado $x_1(t)$ no podrá observarse desde la salida elegida.

Obsérvele que si se cambia el lugar en que se conecta la excitación o se incorpora una segunda excitación (e.d. se modifica la matriz B del modelo de estado) la propiedad de controlabilidad del circuito podría cambiar. De igual manera, si se incorpora la medida de otra variable (lo cual modifica la matriz C del modelo), el circuito podría pasar a ser completamente observable. Las propiedades de controlabilidad y observabilidad no sólo dependen de la arquitectura interna y de los valores de sus componentes sino que están fuertemente vinculadas a las variables externas de entrada y salida.

Ejemplo 2.

Consideremos el circuito de la figura 2.

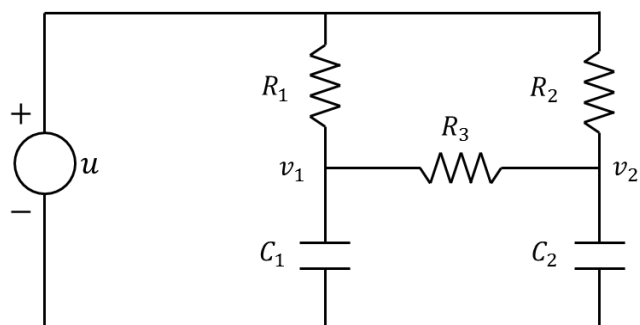


Figura 2

Resulta inmediato plantear un modelo de estado a partir de las ecuaciones de nodo, resultando

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = -\frac{1}{c_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) v_1 + \frac{1}{c_1 R_3} v_2 + \frac{1}{c_1 R_1} u \\ \frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{c_2 R_3} v_1 - \frac{1}{c_2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) v_2 + \frac{1}{c_2 R_2} u \end{cases} \quad (1)$$

$$y = v_1 - v_2 \quad (2)$$

Para analizar las propiedades de controlabilidad y observabilidad del circuito, resulta útil plantear la ecuación diferencial de la tensión $v = v_1 - v_2$ que se obtiene a partir de restar las ecuaciones de estado (1),

$$\frac{d(v_1 - v_2)}{dt} = -\left(\frac{1}{c_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) + \frac{1}{c_2 R_3} \right) v_1 + \left(\frac{1}{c_1 R_3} + \frac{1}{c_2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \right) v_2 + \left(\frac{1}{c_1 R_1} - \frac{1}{c_2 R_2} \right) u, \quad (3)$$

donde, para el caso particular en que

$$c_1 R_1 = c_2 R_2, \quad (4)$$

se verifica

$$\left(\frac{1}{c_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) + \frac{1}{c_2 R_3} \right) = \left(\frac{1}{c_1 R_3} + \frac{1}{c_2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \right) = a. \quad (5)$$

Luego, la expresión (3) se reduce a

$$\frac{d(v_1 - v_2)}{dt} = -a(v_1 - v_2). \quad (6)$$

La evolución temporal de la tensión $v = v_1 - v_2$, resulta de resolver la ecuación diferencial (6) y es una exponencial de constante de tiempo $1/a$, independiente de la excitación $u(t)$. Esto nos dice que si bien la entrada $u(t)$ afecta tanto la tensión del nodo 1 como la del nodo 2, no puede hacerlo en forma independiente. En otras palabras no existirá ninguna señal $u(t)$ que permita transferir los estados iniciales x_0 a cualquier otro estado $x(t_f)$ en un tiempo finito $T = t_f - t_0$. Luego, el sistema no es completamente controlable. Sin embargo, como uno de sus estados ($v_1(t)$ ó $v_2(t)$) puede trasladarse en forma arbitraria, se dice que el sistema es parcialmente controlable.

También se puede concluir que el sistema no es completamente observable, ya que a partir de la medida de la variable $y(t)$ nunca podrá determinarse el valor individual de cada estado. Efectivamente la evolución temporal de la salida será la misma para distintos valores de los estados siempre que la diferencia entre sus condiciones iniciales sea la misma.

Nota. Las propiedades de controlabilidad y obserbabilidad están asociadas a las variables de entrada y salida de nuestro sistema. Así por ejemplo, si medimos otra variable, el sistema puede pasar de ser no observable a ser observable. Por esto es que muchas veces se habla de que el par AB es o no controlable y que el par AC es o no observable, siendo A, B y C son las matrices del modelo de estados que resultan de la elección de las variables internas y de la entrada $u(t)$ y salida $y(t)$ seleccionadas.

Profundicemos el análisis del circuito planteando un nuevo modelo de variables de estado

$$z = [v_1 - v_2 \quad v_2]^T \quad (7)$$

a partir de una transformación $T = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. El nuevo modelo resulta,

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = -\left(\frac{1}{c_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{c_2 R_3}\right) z_1 + \left(\frac{1}{c_2 R_2} - \frac{1}{c_1 R_1}\right) z_2 + \left(\frac{1}{c_1 R_1} - \frac{1}{c_2 R_2}\right) u \\ \frac{dz_2}{dt} = \frac{1}{c_2 R_3} z_1 - \frac{1}{c_2 R_2} z_2 + \frac{1}{c_1 R_2} u \end{cases}, \quad (8)$$

La figura 3 muestra un diagrama en bloques del nuevo modelo donde hemos renombrado los coeficientes del segundo miembro de la ecuación (8) de acuerdo a

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + b_1 u \\ \frac{dz_2}{dt} = a_{21} z_1 + a_{22} z_2 + b_2 u \end{cases}. \quad (9)$$

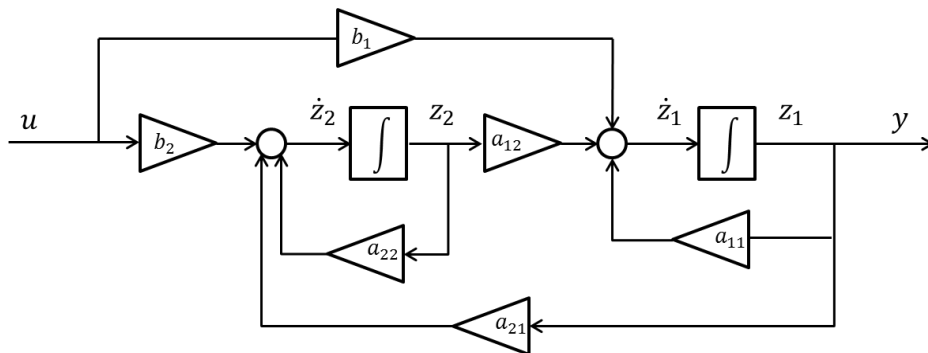


Figura 3

Nuevamente, si consideramos

$$c_1 R_1 = c_2 R_2, \quad (10)$$

resulta

$$a_{12} = b_1 = 0, \quad (11)$$

y fácilmente podemos observar (figura) que el estado $z_1(t)$ no podrá controlarse y que el estado $z_2(t)$ no podrá ser detectado desde la salida, es decir es no observable.

Ejemplo 3.

Considere el sistema

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A_z z + B_z u \\ y &= cz\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & a_{12}=1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \\ y &= [c_1 \quad c_2] z\end{aligned}\tag{13}$$

cuyo diagrama se indica en la figura 4.

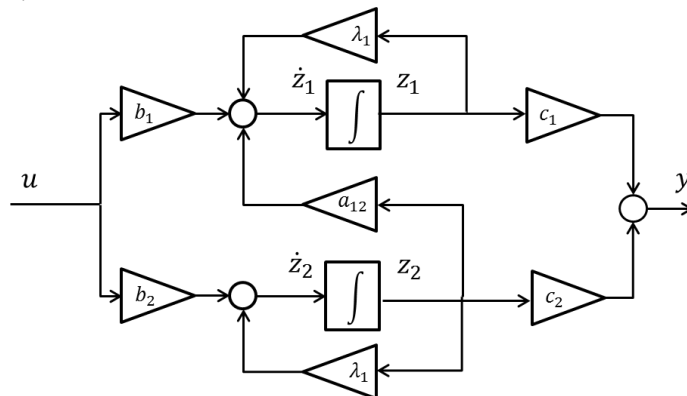


Figura 4

De la evaluación de la figura surge que si

- $b_2=0$, la señal de excitación no podrá afectar el estado $x_2(t)$, y por consiguiente este estado será no controlable
- $c_1=0$, el estado $x_1(t)$ no afecta la salida $y(t)$ y por consiguiente no será un estado observable
- si a_{12} fuese nulo, la simetría de las dos ramas haría que uno de los estados fuese no controlable

2. Tests de Controlabilidad y Observabilidad

Existen distintos test que permiten verificar la controlabilidad y observabilidad de un sistema. Los más conocidos son los de Gilbert y de Kalman, que pasamos a comentar ligeramente.

2.1 Test de Controlabilidad de Gilbert

Este test requiere que el sistema bajo análisis sea expresado a través de un modelo diagonal en bloques o modelo de Jordan. Consideremos diferentes casos con diferentes grados de dificultad para comprender las ideas de Gilbert.

Caso 1: Sistemas SISO (simple-input simple-output) con autovalores distintos. Bajo esta suposición, puede encontrarse una matriz de transformación T que permita expresar el sistema con un modelo de estados de la forma diagonal pura

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow{z=Tx} \begin{cases} \dot{z} = A_z z + B_z u \\ y = C_z x + D_z u \end{cases}, \quad (14)$$

donde la ecuación diferencial (matricial) del nuevo modelo es de la forma

$$\dot{z} = A_z z + B_z u$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u \quad (15)$$

y, como ya hemos previamente discutido, la evolución temporal de cada variable $z_i(t)$ frente a una excitación $u(t)$ será:

$$z_i(t) = e^{\lambda_i t} z_i(0) + \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} b_i u(\tau) d\tau. \quad (16)$$

En particular el valor del estado $z_i(t)$ en un tiempo t_f será

$$z_i(t_f) = e^{\lambda_i t_f} z_i(0) + \int_0^{t_f} e^{\lambda_i(t_f-\tau)} b_i u(\tau) d\tau. \quad (17)$$

Luego y de acuerdo a la definición de controlabilidad, el sistema será completamente controlable si para cada variable $z_i(t)$ (con $i=1, \dots, n$) y cualquier valor inicial $z_i(0)$ existe una $u(\tau)$ que verifica la ecuación

$$\frac{z_i(t_f) - e^{\lambda_i t_f} z_i(0)}{e^{\lambda_i t_f}} = \int_0^{t_f} e^{-\lambda_i \tau} b_i u(\tau) d\tau \quad (18)$$

para cualquier $z(t_f)$ deseado. Observando que para cada $z_i(0)$ y $z_i(t_f)$ el miembro de la izquierda se reduce a una constante, no resulta difícil imaginar una señal $u(\tau)$ que verifique (16). Sólo se requiere la condición (que puede demostrarse que es necesaria y suficiente) que los $b_i \neq 0$.

Caso 2: Consideremos ahora el caso de múltiples entradas y salidas (MIMO) con autovalores reales y distintos. En este caso

$$\dot{z} = A_z z + B_z u$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (19)$$

el criterio de Gilbert dice que la condición necesaria y suficiente para que el sistema sea completamente controlable es que al menos un elemento de cada fila de B debe ser distinto de cero. De ser este el caso, al menos una de las m señales de excitación $u_i(t)$ tendrá influencia en cada estado.

Caso 3: Consideremos ahora el caso con autovalores múltiples.

$$\dot{z} = A_z z + B_z u$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0_{3 \times 2} & \cdots & 0_{3 \times 1} \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & \\ & 0_{2 \times 3} & & \lambda_2 & 1 & \cdots & 0_{2 \times 1} \\ & \vdots & & 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & 0 & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3m} \\ b_{41} & b_{42} & \cdots & b_{4m} \\ b_{51} & b_{52} & \cdots & b_{5m} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}. \quad (20)$$

De acuerdo al criterio de Gilbert, el sistema será completamente controlable si al menos un elemento $b_{ij} \neq 0$, donde el índice i se refiere a la última fila de cada bloque de Jordan.

Problema 1. Considere el caso general sin restricciones en la ubicación de los polos.

2.2 Test de observabilidad de Gilbert

Al igual que en el test de controlabilidad resulta necesario, para testear la observabilidad por el método de Gilbert, transformar el modelo a la forma diagonal en bloques

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow{z=Tx} \begin{cases} \dot{z} = A_z z + B_z u \\ y = C_z z + D_z u \end{cases} \quad (21)$$

En el caso SISO con polos simples:

$$y = C_z z + D_z u$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] z + D_z u \quad (22)$$

es necesario y suficiente que todos los c_i sean distintos de cero para que el sistema sea completamente observable. Observar que, al estar el modelo en la forma diagonal, cada estado se manifiesta sólo en forma directa a través del correspondiente coeficiente c_i .

En el caso MIMO de polos simples,

$$y = C_z z + D_z u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} z + D_z u \quad (23)$$

cada estado z_i se puede manifestar en más de una salida y_j a través de los coeficientes c_{ji} . Luego para que el modelo sea completamente observable ninguna columna de C debe ser nula.

Problema 2. Considere cual es la condición necesaria para observabilidad en el caso de polos múltiples (la interpretación del ejemplo 3 es una buena ayuda para resolver el problema).

Es conveniente hacer notar que las propiedades de controlabilidad y observabilidad no cambian con una transformación de estados P de rango completo (la demostración es esta propiedad se posterga a una sección posterior). En otras palabras, distintos modelos de un mismo sistema preservan las propiedades de controlabilidad y observabilidad si sus estados se vinculan a través una transformación no singular.

2.3 Test de controlabilidad de Kalman.

La controlabilidad de un sistema puede verificarse sin necesidad de transformarlo a la forma de Jordan, a partir de la construcción de la matriz de controlabilidad

$$Q_c = [B : AB : A^2B : \dots : A^{n-1}B] \quad (24)$$

donde A y B son las matrices del modelo a testear y n es el orden del sistema.

Según Kalman, el sistema es completamente controlable si el rango de la matriz de controlabilidad es n . Si su rango es de orden $n-m$, existirán m estados no controlables.

Para la demostración de este test, podemos recurrir al Teorema de Caley-Hamilton. Efectivamente, sabemos que la solución de la ecuación de estados es

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B u(\tau) d\tau \quad (25)$$

y que si el sistema es completamente controlable sus estados iniciales pueden transferirse al origen en un tiempo finito T , es decir

$$x(T) = 0 = e^{AT}x(0) + e^{AT} \int_0^T e^{-A\tau}B u(\tau) d\tau, \quad (26)$$

debiendo verificarse que

$$0 = x(0) + \int_0^T e^{-A\tau}B u(\tau) d\tau, \quad (27)$$

donde, por Caley Hamilton

$$e^{-A\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k. \quad (28)$$

Luego,

$$x(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^T \alpha_k u(\tau) d\tau \quad (29)$$

donde llamando

$$\alpha'_k = \int_0^T \alpha_k u(\tau) d\tau \quad (30)$$

resulta

$$x(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \alpha'_k = -\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha'_0 \\ \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_3 \end{bmatrix} \quad (31)$$

ecuación que debe satisfacerse para cualquier condición inicial. Luego para que el sistema sea completamente controlable la matriz

$$\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (32)$$

debe ser de rango n.

Nota. Todo modelo completamente controlable puede ser transformado a la forma canónica controlable a partir de la transformación

$$T = P^{-1} = \begin{bmatrix} t_1^T \\ t_2^T \\ \vdots \\ t_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1^T \\ t_1^T A \\ \vdots \\ t_1^T A^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (33)$$

donde

$$t_1^T = [0 \ 0 \ \dots \ 1] Q_c^{-1}. \quad (34)$$

Ejemplo 4.

Verifiquemos la controlabilidad y observabilidad del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0 \ 0]x \end{cases} \quad (35)$$

- Primero verificamos la controlabilidad con el test de Gilbert. Para ello primero transformamos el modelo calculando los autovectores que definen la matriz de transformación P que permite diagonalizar el modelo,

$$|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5/2 & 1/2 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Resultando el modelo diagonal

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix} u, \quad (37)$$

el cual nos permite afirmar que el modelo es completamente controlable ya que todos los elementos de B son distintos de cero.

-Ahora por Kalman. Construimos la matriz de controlabilidad

$$Q_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 25 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango}(Q_c) = 3 \quad (38)$$

Dado que el rango de Q_c es 3, el modelo resulta completamente controlable. Es decir, se ratifica la controlabilidad ya detectada por el test de Gilbert. En realidad el resultado era esperable ya que el modelo estaba en la forma canónica controlable.

2.4 Test de observabilidad de Kalman

Según fuera enunciado por Kalman, la observabilidad de un sistema puede verificarse a partir de la matriz de observabilidad

$$Q_o = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & A^{T^2} C^T & \dots & A^{T^{n-1}} C^T \end{bmatrix} \quad (39)$$

donde A y C son las matrices del modelo a testear y n es el orden del sistema.

El sistema es completamente observable si el rango de la matriz de observabilidad es n .

Demostración. Sabemos que la solución de la ecuación

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}, \quad (40)$$

es

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau, \quad (41)$$

y por consiguiente, la salida viene expresada por

$$y(t) = C e^{At} x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + Du. \quad (42)$$

A los efectos de evaluar observabilidad podemos considerar que la entrada es nula, pudiendo expresar la salida con la ayuda de Caley-Hamilton

$$y(t) = Ce^{At} x(0) = C \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k x(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k CA^k x(0), \quad (43)$$

$$y(t) = (\alpha_0 CA^0 + \alpha_1 CA^1 + \dots + \alpha_{n-1} CA^{n-1}) x(0), \quad (44)$$

y en forma matricial por

$$y(t) = [\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_{n-1}] \begin{bmatrix} CA^0 \\ CA^1 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(0). \quad (45)$$

Luego, para que la información de todos los estados este presente $y(t)$, la matriz

$$\left[(CA^0)^T \quad (CA^1)^T \quad \dots \quad (CA^{n-1})^T \right] = \left[C^T \quad A^T C^T \quad \dots \quad A^{T^{n-1}} C^T \right] = Q_o \quad (46)$$

debe ser de rango completo.

Ejemplo 5. Verifiquemos la observabilidad del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} = \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [3 \quad 4 \quad 1]x \end{cases} \quad (47)$$

-Primero por Gilbert. Para ello transformamos el modelo a la forma diagonal con la ayuda de la matriz P calculada a partir de los autovalores

$$|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (48)$$

En particular, nos interesa la ecuación de salida

$$y = CPz = [3 \quad 4 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} z, \quad (49)$$

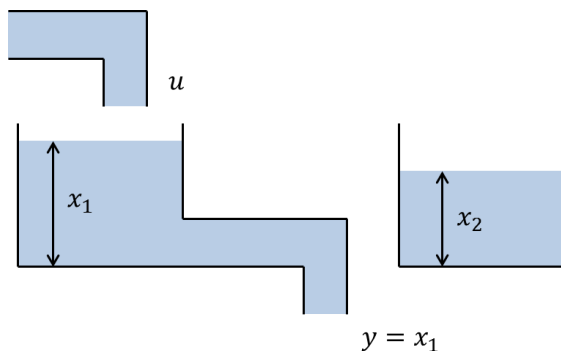
$$y = [3 \quad 0 \quad -1]z$$

A partir de la cual podemos afirmar que el sistema NO es completamente observable.

A esta conclusión también podemos llegar aplicando el test de Kalman, ya que la matriz de observabilidad es de rango 2.

$$Q_o = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango}(Q_o) = 2 \quad (50)$$

Ejemplo 6. La figura muestra un sistema hidráulico extremadamente básico donde resulta obvio que el estado $x_2(t)$ no es controlable con el caudal de entrada $u(t)$ y tampoco observable desde la salida $y(t)$. Verifiquemos por Kalman esta afirmación.



A partir de las ecuaciones de estado

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases} \quad (51)$$

planteamos las matrices de controlabilidad y observabilidad

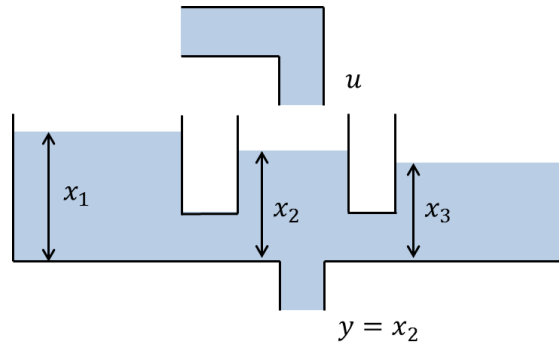
$$Q_c = [B : AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$Q_o = [C^T : A^T C^T] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (53)$$

Dado que el rango de ambas es 1, queda de manifiesto el resultado anticipado: el sistema no es ni completamente observable ni completamente controlable. Sólo el estado $x_1(t)$ es controlable y observable (la misma conclusión es verificable en forma directa por Gilbert, ya que el modelo se encuentra en la forma diagonal).

Ejemplo 7.

Consideremos un sistema levemente más complejo (donde aún es predecible que el sistema no presentará ni controlabilidad completa ni observabilidad completa).



$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \ 1 \ 0] x \end{cases} \quad (54)$$

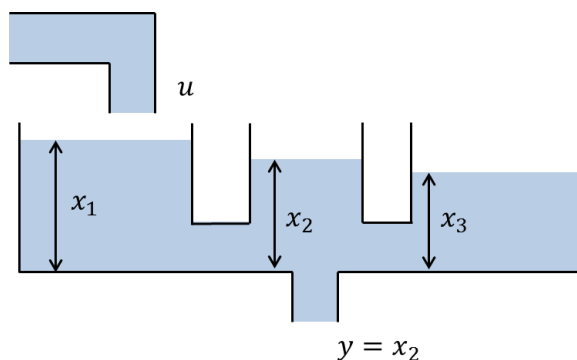
Las matrices

$$Q_c = [B : AB : A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad (55)$$

$$Q_o = [C^T : A^T C^T : A^{2T} C^T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad (56)$$

son de rango 2, corroborando el resultado esperado: el sistema no es ni completamente controlable ni observable.

Consideremos ahora que el caudal de entrada es aplicado al primer tanque,



tanto las matrices A como la C del modelo se preservan, pero la matriz B cambia

$$B_1^T = [1 \ 0 \ 0]. \quad (57)$$

Como la matriz de Observabilidad sigue siendo la misma, el sistema preserva su falta de observabilidad completa. Sin embargo, la nueva matriz de controlabilidad

$$Q_c = [B_1 : AB_1 : A^2B_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (58)$$

es de rango 3, e.d. el sistema ha pasado a ser completamente controlable.

Ejemplo 8.

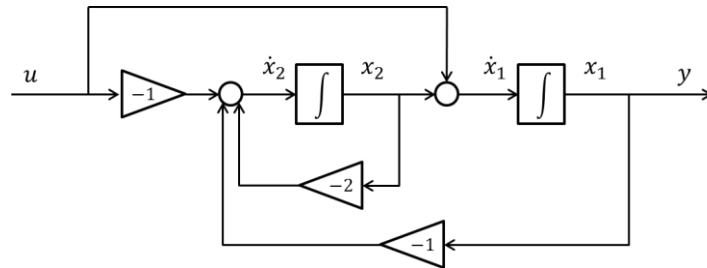
A partir de la ecuación diferencial entrada salida del sistema:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = \frac{du}{dt} + u, \quad (59)$$

planteamos dos modelos de estado.

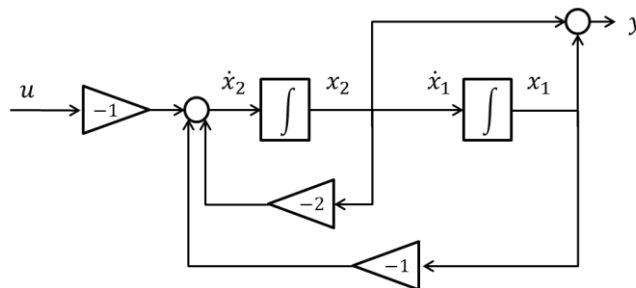
Modelo 1:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0] x \end{cases}$$



Modelo 2:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 1] x \end{cases}$$



Facilmente es verificable que la función de transferencia calculada a partir de ambos modelos

$$T(s) = C(sI - A)^{-1} B \quad (60)$$

es la misma.

Verificamos controlabilidad por Kalman del modelo 1

$$Q_{c1} = [B_1 : A_1 B_1] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango}(Q_{c1}) = 1. \quad (61)$$

Verificamos controlabilidad por Kalman del modelo 2

$$Q_{c2} = [B_2 : A_2 B_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango}(Q_{c2}) = 2. \quad ??? \quad (62)$$

Tanto Q_{c1} como Q_{c2} son matrices de controlabilidad de dos modelos de un mismo sistema. Dado que Q_{c1} es de distinto rango que Q_{c2} , nos encontramos en una aparente (sólo aparente) contradicción.

Algo similar sucede con las matrices de observabilidad, ya que presentan distinto rango

Observabilidad del modelo 1

$$Q_{o1} = [C_1^T : A_1^T C_1^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango}(Q_{o1}) = 2 \quad (63)$$

Observabilidad del modelo 2

$$Q_{o2} = [C_2^T : A_2^T C_2^T] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango}(Q_{o2}) = 1. \quad ??? \quad (64)$$

Problema 3. Analizar los resultados previos y justificar por qué no hay ninguna contradicción en ellos.

Respuesta. El problema surge debido a que los modelos han sido obtenidos a partir de un modelo entrada salida (no a partir de una transformación P). Si bien los dos modelos tienen la misma función de transferencia su estructura interna es distinta, en el primero un polo cancela un cero y en el segundo un cero cancela un polo. Si se trabaja con un modelo de estados que ha sido obtenido a partir de otro entrada salida, los tests sólo podrán detectar la presencia de un problema, pero será imposible discriminar si este se trata de un problema de controlabilidad o de observabilidad.