



**Universidad Nacional de La Plata**  
**Facultad de Ingeniería**  
**Departamento de Electrotecnia**  
**Cátedra de Control Moderno**

---

# **Nociones de control robusto**

**Fernando A. Inthamoussou**

**Año 2011**

## 1. Introducción

Estas notas tienen como finalidad introducir los aspectos básicos de la teoría de control robusto para los alumnos de la materia Control Moderno. Básicamente es un extracto de la bibliografía sobre el tema mencionada al final del mismo. Sólo se hace hincapié en la definición del problema de control robusto, llegando a mostrar las condiciones de estabilidad y performance nominal como así también las condiciones para garantizar estabilidad y performance robusta. A lo largo de este apunte se consideraran sistemas SISO haciendo la aclaración necesaria cuando sea conveniente para sistemas MIMO.

## 2. Motivación del control robusto

El primer paso en el diseño de un sistema de control es la obtención de un modelo matemático de una planta física. En ciertos casos el modelo puede ser no lineal (mayormente), de parámetros distribuidos y/o además de alto orden. Un modelo de orden elevado y complejo desde el punto de vista de la dinámica no resulta del todo útil, ya que complica demasiado el proceso de diseño, dando además como resultado controladores de alto orden. Por estos motivos, se busca obtener un modelo lo más simple posible, pero que al mismo tiempo refleje todas las características intrínsecas del sistema físico que son importantes para el problema que se está tratando, y dejar el modelo más completo para verificación del controlador obtenido. Está claro, que este modelo incurrirá en un error de modelado. Así, surge la pregunta de si el controlador diseñado para el modelo obtenido funcionará satisfactoriamente para la planta real. Para responder esta pregunta, se ha desarrollado una teoría de control conocida como control robusto desde el año 1980.

En control robusto, en particular, se busca aproximar el modelo por uno lineal de coeficientes constantes, asumiendo que se incurrirá en un error de modelado. Este error es considerado como incertidumbre del modelo frente a la planta física real, y utiliza esta incertidumbre, que se modela y acota para cada problema, en el proceso de diseño del controlador.

## 3. ¿Por qué realimentar?

La idea de realimentación está tan asociada con la teoría de control que resulta casi imposible pensar en control sin realimentación. Un ejercicio muy interesante es preguntarse ¿por qué motivo no se podría controlar un sistema con un controlador a lazo abierto?. Hasta ahora hemos considerado que disponemos de un modelo matemático del sistema (sin decir mucho respecto de la exactitud del mismo) y si bien hemos trabajado con perturbaciones externas no hicimos un tratamiento o modelado de las mismas, es decir las supusimos conocidas. Bajo estas hipótesis no parecería necesaria la realimentación. Un resultado muy interesante surge de hacer un poco de álgebra de bloques con un lazo de control típico como se muestra en Figura 1. En este lazo  $P$  representa el sistema físico a ser controlado,  $K(s)$  es el modelo matemático del controlador a utilizar y  $d(s)$  es una perturbación externa a la salida de la planta.

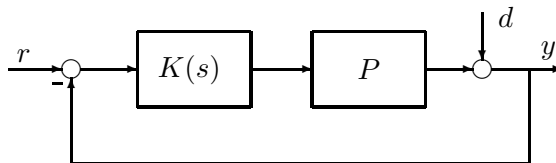


Figura 1: Lazo de realimentación.

Sumando y restando el modelo matemático  $G(s)$  de la planta dentro del lazo, manteniendo la realimentación intacta obtenemos el diagrama que se muestra en la Figura 2.

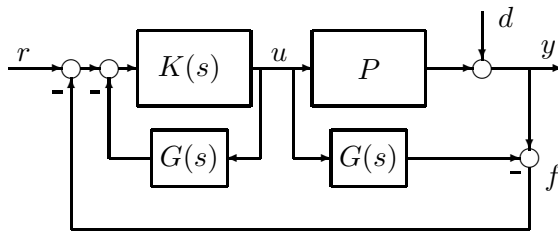


Figura 2: Sistema físico y modelo matemático.

Si además reemplazamos la conexión entre el modelo de la planta y el controlador por

$$C(s) \triangleq K(s)[I + G(s)K(s)]^{-1}, \quad (1)$$

obtenemos el diagrama de la Figura 3.

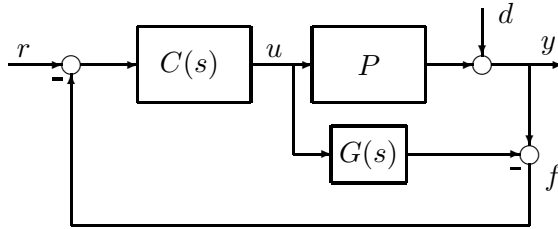


Figura 3: Realimentación e incertidumbre.

Así la señal de realimentación  $f(s)$  es

$$f(s) = d(s) + [P - G(s)]u(s) \quad (2)$$

Mirando esta última expresión se puede concluir que si no existen perturbaciones  $d(s) = 0$  y el modelo matemático del sistema físico es exacto (y/o los parámetros de la planta no varían)  $P - G(s) = 0$ , la señal de realimentación es 0. Es decir, ante ausencia de perturbaciones y error de modelado no sería necesario realimentar. Está claro que la condición anterior es poco realista y que siempre van a existir perturbaciones y error de modelado, por esta razón es imprescindible realimentar. En el análisis anterior se supuso tanto una perturbación desconocida como un modelo no exacto del sistema físico. Las razones son las siguientes: si se conoce exactamente el tipo de perturbación y el tiempo en la que la misma ocurre, la misma podría ser cancelada restando otra señal en el lazo de forma tal de cancelar el efecto de esta. La no exactitud del modelo no es difícil de pensar, incluso si se pudiera obtener un modelo exacto del sistema no se estaría considerando variaciones que pueden surgir en algunos parámetros del sistema, a esto se lo conoce como incertidumbre. En la teoría de control robusto la única suposición que se hace respecto a las perturbaciones es que son de energía acotada. De todas formas, la diferencia fundamental entre la teoría de control clásico y moderno respecto de la teoría de control robusto radica en que esta última incorpora la incertidumbre explícitamente al momento de formular el problema. Tal es así, que la palabra modelo y sistema (sistema físico o planta) no son equivalentes.

En la teoría de control robusto el sistema es tratado matemáticamente como un conjunto o una familia de modelos, representada por un modelo nominal  $G(s)$  (que es el mismo que el utilizado en control clásico o moderno) y una incertidumbre acotada. Esta incertidumbre puede ser “agregada” al modelo nominal de diferentes formas, llevando a diferentes tratamientos del problema.

La incertidumbre debe ser siempre acotada, de otra manera sin conocimiento del sistema el problema no está bien planteado. La razón detrás de esto es que para un sistema totalmente desconocido, dado un controlador, siempre existe la posibilidad de encontrar un sistema que inestabilice el lazo de control. Cuando se controla un sistema se busca que no exista posibilidad de desestabilizarlo. Luego para poder dar garantía de estabilidad, la incertidumbre debe ser acotada.

El objetivo del control robusto es calcular las condiciones menos conservativas proveyendo certidumbre en la estabilidad y performance de un modelo incierto (familia acotada de modelos) que representa un sistema físico. Cuando estas propiedades, estabilidad y performance, se refieren al modelo nominal las mismas se denominan nominales. Cuando hacen referencia a la familia completa de modelos o modelo incierto se las conoce como robustas.

Propiedades: para el modelo nominal, estabilidad nominal y performance nominal. Para el modelo incierto estabilidad robusta y performance robusta.

Ahora, suponiendo  $d(s) = 0$  y una representación matemática exacta del sistema, con lo analizado más arriba surge  $f(s) = 0$ . En este caso no hay necesidad de realimentar, cosa que resulta razonable bajo la hipótesis no real propuesta. Luego, cualquier salida deseada como así también la estabilización del sistema podría ser lograda con un controlador a lazo abierto. Asimismo, suponiendo que la hipótesis anterior es posible no se está teniendo en cuenta la conexión física entre el controlador y la planta. A través de estas conexiones pueden ingresar perturbaciones externas (ruido de cuantización, ruido electromagnético, etc.) al sistema de lazo cerrado. Luego, estas señales pueden inestabilizar el sistema en caso de serlo el mismo a lazo abierto.

Como conclusión, no hay posibilidad de evitar la realimentación en un problema de control a menos que se tenga un conocimiento exacto de todas las señales que entran al sistema en todo punto y además el modelo matemático del sistema sea lo mismo que la planta real. Como se puede imaginar este no es el caso en la realidad.

#### 4. Restricciones algebraicas del lazo de control

Ya vimos que la incertidumbre tanto en el modelado como en las perturbaciones externas son inevitables en cualquier problema práctico de control. Luego, en el problema de diseño, es necesario entender las restricciones algebraicas del lazo de control. Considere el lazo de control que se muestra en la Figura 4, donde  $G(s)$  representa el modelo nominal de la planta,  $K(s)$  el modelo del controlador,  $y(s)$  la salida,  $r(s)$  la referencia,  $e(s)$  el error de seguimiento,  $d(s)$  la perturbación y  $n(s)$  el ruido de medición.

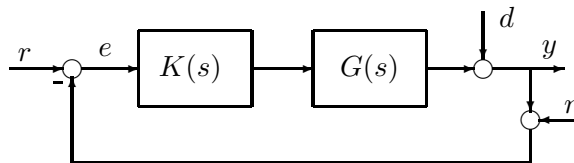


Figura 4: Restricción del lazo de realimentación.

Las relaciones entre los mismos son las siguientes:

$$y(s) = G(s)K(s)[I + G(s)K(s)]^{-1}[r(s) - n(s)] + [I + G(s)K(s)]^{-1}d(s) \quad (3a)$$

$$e(s) = r(s) - y(s) = S(s)[r(s) - n(s)] + T(s)n(s) \quad (3b)$$

Definimos,  $S(s) \triangleq [I + G(s)K(s)]^{-1}$  como la función sensibilidad y  $T(s) \triangleq G(s)K(s)[I + G(s)K(s)]^{-1}$  como la función sensibilidad complementaria del lazo.

El nombre de complementaria surge de que

$$T(s) + S(s) = 1 \quad (4)$$

para sistemas SISO y

$$T(s) + S(s) = I \quad (5)$$

para sistemas MIMO, donde  $I$  es la matriz identidad. Esta ecuación impone serias limitaciones a la hora de diseñar el controlador que debería garantizar estabilidad y performance, como así también robustez a la incertidumbre del modelo.

De acuerdo con las ecuaciones (3a) y (3b), tanto para lograr rechazo de perturbaciones a la salida, como para minimizar la influencia de las perturbaciones y la referencia en el error de seguimiento, el “tamaño” de la función de sensibilidad  $S(s)$  debe ser reducido. Por otro lado, si el objetivo es el rechazo del ruido de medición a la salida o en el error de seguimiento, el “tamaño” de la función de sensibilidad complementaria  $T(s)$  deber ser reducido. Debido a la restricción planteada en (4) y (5) esto no es posible simultáneamente.

Para resolver este problema es importante primero definir un “tamaño” adecuado para una matriz de transferencia MIMO, particularmente la matriz de sensibilidad, y por medio de esta medida se tratará de resolver la restricción en (5).

**Remarque 2.** cualquier problema de control bien planteado debería incluir implícitamente en sus requerimientos esta restricción.

## 5. Sistemas bien planteados

En lo que sigue vamos tratar el tema estabilidad nominal y robusta como así también problemas de performance para sistemas SISO (una entrada una salida, por sus siglas en ingles), representados ya sea por su función de transferencia o por su representación en modelo de estados. El análisis se realiza de forma gradual comenzando desde estabilidad nominal y terminando en performance robusta, que es el objetivo perseguido.

Para facilitar la notación en lo que sigue definimos la equivalencia

$$g(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \equiv \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right], \quad (6)$$

Considere el lazo de control de la Figura 5 , donde existen las siguientes relaciones entre las entradas  $[u_1(s) \ u_2(s)]'$ , las salidas  $[y_1(s) \ y_2(s)]'$  y los errores  $[e_1(s) \ e_2(s)]'$

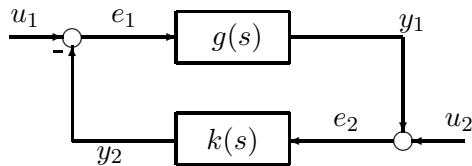


Figura 5: Lazo de realimentación para evaluar sistemas bien planteados.

$$y_1(s) = g(s)e_1(s) \quad e_1(s) = u_1(s) - y_2(s) \quad (7)$$

$$y_2(s) = k(s)e_2(s) \quad e_2(s) = u_2(s) + y_1(s) \quad (8)$$

A continuación se define lo que se conoce como lazo de realimentación bien planteado, importante suposición que debería hacerse en cualquier problema de control. Esto evita casos triviales como  $g(s) = -k^{-1}(s)$ .

**Definición 5.1** *El lazo de realimentación de la Figura 5 se dice que está bien planteado si y sólo si todas las posibles transferencias entre las entradas  $u_1$  y  $u_2$  y todas las salidas  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $e_1$  y  $e_2$  existen y son propias.*

En otras palabras, un sistema se dice bien planteado si para entradas bien definidas obtenemos salidas bien definidas. De hecho, se puede probar que es suficiente verificar que las salidas  $y_1$ ,  $y_2$  o  $e_1$  y  $e_2$  estén bien definidas. Que el lazo de realimentación esté bien definido es un requerimiento matemático para cualquier problema de control en el cuál estabilidad y performance deben ser definidas.

Escribiendo de forma compacta la relación entre las entradas  $u_i$  y los errores  $e_i$ , se define la matriz  $P(s)$

$$\begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k(s) \\ -g(s) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \end{bmatrix} \triangleq P(s) \begin{bmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

Luego para tener salidas  $e_1$  y  $e_2$  bien definidas, es necesario que la inversa de  $P(s)$  exista y sea propia. De otra forma, las salidas no estarán bien definidas o podrían no ser propias.

**Ejemplo 5.1** *Considerando en lazo de control en la Figura 5 y las siguientes funciones de transferencias generales para la planta y el controlador:*

$$g(s) = \frac{s+a}{s+b} \quad k(s) = \frac{s+c}{s+d} \quad (10)$$

*La función de transferencia entre  $u_2$  y  $e_2$  es*

$$[1 + g(s)k(s)]^{-1} = \frac{(s+b)(s+d)}{(s+b)(s+d) + (s+a)(s+c)} \quad (11)$$

*Del denominador de esta función de transferencia podemos ver que si se cancelan los términos  $s^2$ , por ejemplo eligiendo el numerador de  $g(s)$  como  $(-s+a)$  y valores adecuados de las constantes, la misma resulta impropia y el problema de control no está bien planteado.*

*En la práctica la planta es estrictamente propia, de lo contrario tendría ganancia a frecuencia infinita, haciendo que la transferencia anterior sea propia (no hay posibilidad de cancelar el término  $s^2$  en el denominador).*

## 6. Estabilidad Interna Nominal

En esta sección trataremos de distinguir estabilidad entrada-salida de estabilidad interna. Considere el lazo de realimentación de la Figura 5, se puede demostrar que la estabilidad de algún par entrada salida (todos los polos correspondientes a esa función de transferencia pertenecientes al semiplano izquierdo abierto del plano complejo,  $\mathbb{C}_-$ ) no implica que todos los pares entrada salida sean estables. En lo que sigue, debemos garantizar que todos los posibles pares entrada salida sean estables.

**Ejemplo 6.1** *Considerando en lazo de control en la Figura 5 y las siguientes funciones de transferencias para la planta y el controlador:*

$$g(s) = \frac{s+3}{(s-2)(s+5)} \quad k(s) = \frac{s-2}{s+1} \quad (12)$$

*La función de transferencia entre  $u_1$  e  $y_2$  es*

$$\frac{y_2}{u_1} = \frac{g(s)k(s)}{(1 + g(s)k(s))} = \frac{(s+3)}{(s^2 + 7s + 8)} \quad (13)$$

que es estable. Pero si se considera la función de transferencia entre  $u_1$  e  $y_1$  resulta

$$\frac{y_1}{u_1} = \frac{g(s)}{(1 + g(s)k(s))} = \frac{(s + 3)(s + 1)}{(s - 2)((s + 5)(s + 1) + (s + 3))} \quad (14)$$

que es inestable.

Esto se debe a la cancelación entre el polo inestable de la planta y el cero de no mínima fase del controlador.

Este ejemplo muestra que existe diferencia entre estabilidad de una dada transferencia de un lazo de control (estabilidad entrada-salida) y la estabilidad de lazo de realimentación (estabilidad interna).

**Definición 6.1** *El lazo de realimentación de la Figura 5 es internamente estable si y sólo si todas las funciones de transferencias obtenidas de todos los pares entrada-salida tienen sus polos en  $\mathbb{C}_-$ .*

Si bien no explícitamente, el concepto de estabilidad interna ha existido por varios años. Un ejemplo de esto, es una regla básica del diseño de controladores de no cancelar polos inestables de la planta con ceros de no mínima fase del controlador. Una explicación errónea de esto establece que es imposible realizar esta cancelación numéricamente de forma exacta. Por todo lo visto hasta aquí, podemos concluir que aunque sea posible realizar esta cancelación, existirá siempre una transferencia en el lazo de realimentación que será inestable. Así, existirá una señal interna del lazo que crecerá sin cota dañando el sistema. Se puede plantear el siguiente lema.

**Lema 6.2** *El lazo de realimentación de la Figura 5 es internamente estable si y sólo si  $[1 + g(s)k(s)]^{-1}$  es estable y no hay cancelaciones de polos y ceros en el semiplano derecho complejo entre la planta y el controlador.*

**Remarque 3.** Notar que cualquier cancelación de polos y ceros estables no afectan la estabilidad interna del lazo. Sin embargo, desde el punto de vista de performance, la cancelación podría ser realizada sobre un polo estable pero al mismo tiempo un modo indeseable del sistema. Así, si bien el sistema es estable, algún par entrada salida tendrá una performance pobre.

Así la definición de estabilidad interna puede extenderse a una región más general que sólo el semiplano derecho del plano complejo. Luego, de acuerdo con la ubicación deseada de los polos de lazo cerrado, se puede definir una región adecuada en  $\mathbb{C}_-$ , donde no se deberían realizar cancelaciones entre polos de la planta y ceros del controlador.

## 7. Estabilidad Robusta

Como ya fue mencionado, el margen de robustez está relacionado con el tipo específico de modelo de incertidumbre. En esta sección primero se analizará los márgenes de estabilidad robusta utilizados en la teoría de control clásico, analizando sus limitaciones y presentando una descripción de incertidumbre más realista y general.

### 7.1. Márgenes de Fase y de Ganancia

Una medida para evaluar la robustez en el diseño clásico de controladores es el margen de fase  $\phi_m$  y el margen de ganancia  $g_m$ . Aquí, “robustez” implica la habilidad del sistema para responder adecuadamente, en términos de performance y estabilidad, aun cuando el modelo de lazo abierto

$\mathcal{L}(s) = g(s)k(s)$  usado en el diseño difiera levemente del sistema físico, debido a la existencia de incertidumbre.

Como se puede observar en la Figura 6 ambas medidas pueden ser claramente interpretadas en un diagrama de Nyquist y por el criterio de estabilidad de Nyquist. En este gráfico,  $\phi_m$  y  $g_m$  representan la “distancia” en ángulo y valor absoluto, respectivamente, al punto crítico  $z = -1$ .

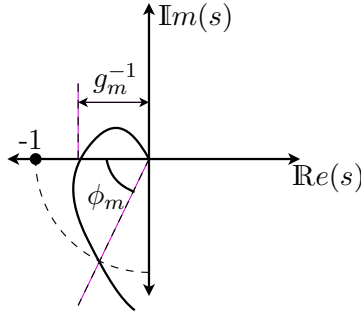


Figura 6: Margen de fase y margen de ganancia.

La práctica usual de evaluar ambos márgenes por separado asume implícitamente que ambos tipos de incertidumbre (fase y ganancia) no actúan al mismo tiempo en el lazo. Luego, estos márgenes son efectivos como herramienta de análisis de robustez solamente cuando el modelo de la planta tiene o incertidumbre de fase o incertidumbre de ganancia. Especial cuidado se debe tener cuando se utiliza  $\phi_m$  y  $g_m$  para análisis de robustez de un sistema SISO a lazo cerrado, debido a que estos no garantizan estabilidad robusta para el caso más realista cuando tanto la fase como la ganancia son afectadas simultáneamente por la incertidumbre.

Para la teoría de control robusto, estabilidad robusta significa estabilidad de todos los posibles modelos que son descriptos por la combinación del modelo nominal  $g_0(s)$  y la incertidumbre  $\delta = ce^{j\phi}$ , donde  $c$  y  $\phi$  son valores de incertidumbre en los intervalos  $I_c = [c_{min}, c_{max}]$  y  $I_\phi = [\phi_{min}, \phi_{max}]$ , respectivamente (Figura 7). Este conjunto de modelos de planta pueden ser escritos como una familia de modelos  $\mathfrak{F} \triangleq \{g(s) : g(s) = g_0[ce^{j\phi}], c \in I_c, \phi \in I_\phi\}$ .

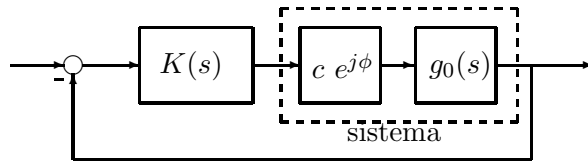


Figura 7:

A continuación se muestran dos ejemplos para dar claridad al concepto [1].

**Ejemplo 7.1** Considere el diagrama de Nyquist de la Figura 8, donde tanto  $\phi_m$  como  $g_m$  tienen valores adecuados, siempre y cuando la perturbación se realice en una variable a la vez. Sin embargo, con una pequeña perturbación simultánea en ambas variables se consigue fácilmente que el diagrama de Nyquist encierre el punto crítico  $-1$ . Luego, en este caso, una mejor medida de estabilidad robusta estaría dada por la distancia mínima entre el diagrama de Nyquist y el punto crítico  $-1$ .

**Ejemplo 7.2** Considere el diagrama de Nyquist de la Figura 9. En este caso el margen de ganancia  $g_m$  tiende a infinito y el margen de fase  $\phi_m$  es pequeño. Luego si hay certeza que la incertidumbre sólo estará dada en la ganancia no habrá problemas de estabilidad. En este caso se puede garantizar estabilidad robusta debido a que la perturbación se da solamente en la ganancia. Pero de haber perturbaciones en la fase, una pequeña puede estabilizar el lazo de control.



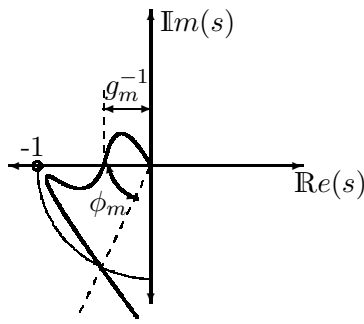


Figura 8:

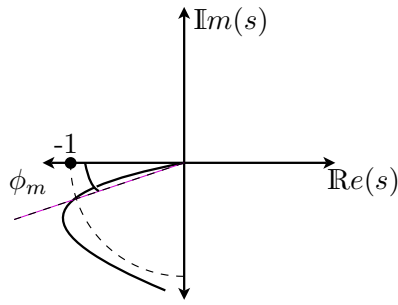


Figura 9:

## 8. Incertidumbre dinámica global

Con las descripciones más realistas del modelo de incertidumbre, se da lugar a diseños de controladores que se comportan mejor en la práctica. Una de estas descripciones corresponde a la incertidumbre dinámica global. El nombre surge debido a que esta incertidumbre está relacionada con la incertidumbre en la dinámica del sistema y cubre globalmente el modelo completo de la planta. Este tipo de incertidumbre puede ser utilizada, por ejemplo, cuando el orden de la ecuación diferencial que describe la planta es desconocido. Esta situación surge cuando ciertos fenómenos físicos (elasticidad, flexibilidad) no son incluidos en la descripción de la planta, o cuando la descripción del sistema es muy complicada como para dar problemas manejables. En algunos casos, donde restricciones en el tiempo de cómputo (control de procesos rápidos en tiempo real) imponen un límite en el orden del modelo matemático que puede ser manejado. Como consecuencia, estos modelos son aproximados por ecuaciones de menor orden, y la dinámica despreciada es concentrada dentro de la incertidumbre.

La incertidumbre dinámica global puede utilizarse también para describir errores de linealización, cuando un sistema no lineal es linealizado en torno a su punto nominal de operación. Si bien el modelo resultante es válido sólo en un entorno del punto nominal de operación, los efectos no lineales fuera de esta región pueden ser acotados e interpretados como incertidumbre dinámica.

Muchos sistemas pueden ser descritos por ecuaciones diferenciales parciales o ecuaciones con retardo de tiempo, a estos se lo conoce como sistemas de dimensión infinita. En estos casos se deben realizar aproximaciones de la ecuación general de forma tal de obtener un modelo de dimensión finita. El error de aproximación puede ser interpretado como incertidumbre dinámica debido a que el proceso elimina toda la dinámica de alto orden del modelo matemático general.

El enfoque adoptado en la teoría de control robusto consiste en describir un sistema físico por medio de un modelo de incertidumbre. Este último es definido como un conjunto de modelos y descrito en términos de una planta nominal junto con una incertidumbre acotada. En la

teoría de control clásico y moderno el controlador es diseñado teniendo en cuenta el modelo nominal de planta. En cambio, la teoría de control robusto intenta diseñar un solo controlador que garantice ciertas propiedades tales como estabilidad y cierto nivel de performance para todos los modelos miembros de la familia. En este caso, estas propiedades se conocen como robustas. A continuación se describen distintos tipos de conjuntos o familias de modelos.

### 8.1. Incertidumbre dinámica multiplicativa

La Figura 10 muestra un modelo incierto con incertidumbre dinámica global multiplicativa.

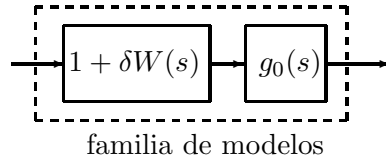


Figura 10:

El mismo describe un sistema físico como un conjunto de modelos matemáticos como sigue:

$$\mathfrak{G} = \{g(s) : g(s) = g_0[1 + \delta W(s)], \delta \in \mathcal{C}, |\delta| < 1\} \quad (15)$$

El conjunto  $\mathfrak{G}$  es la familia de modelos y está caracterizado por una planta nominal  $g_0(s)$ , una función fija de peso  $W(s)$ , y una clase de incertidumbre acotada  $\delta$ . El modelo nominal  $g_0$  corresponde al caso donde no hay incertidumbre,  $\delta = 0$ . Sin pérdida de generalidad, la cota en la incertidumbre puede tomarse como uno, debido a que cualquier otra cota puede ser absorbida en la función de peso  $W(s)$ .

La función de peso  $W(s)$  representa la “dinámica” de la incertidumbre, o en otras palabras su “distribución en frecuencia”. La Figura 11 muestra una representación gráfica del peso de incertidumbre. En esta figura se puede observar una función de peso típica, con 20% de incertidumbre a bajas frecuencias y 100% a frecuencias más elevadas. Un desconocimiento total del sistema (100% de error) significa en la práctica que no hay información de fase, es decir, la función de transferencia de la planta  $g(s)$  puede tener parte real positiva o negativa. Luego, con el objetivo de garantizar estabilidad del sistema a lazo cerrado, el controlador deberá hacer la función de lazo nominal  $g_0(j\omega)k(j\omega)$  lo suficientemente chica a frecuencias por encima de  $\omega_0$  para garantizar que el diagrama de Nyquist no encierre el punto crítico, a pesar de la fase de  $g(j\omega)k(j\omega)$ . Esto ilustra una limitación importante de la estabilización robusta que debe ser tenida en cuenta en el diseño de cualquier controlador.

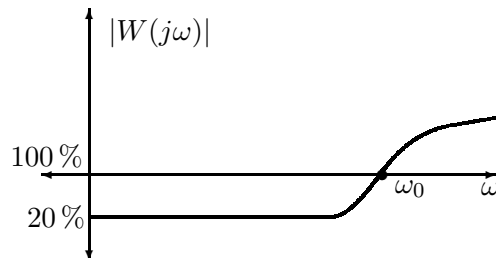


Figura 11:

La situación donde la incertidumbre es chica a bajas frecuencias y se incrementa a frecuencia mayores, es el caso usual que surge en la práctica. Por ejemplo, para los sistemas mecánicos, se puede obtener un mejor modelo para describir las resonancias mecánicas de baja frecuencia que

para el caso de las de mayor frecuencia (que involucran flexibilidad mecánica). Esta situación también puede observarse para circuitos eléctricos. A bajas frecuencias, el modelo es más simple y usualmente provee una buena descripción de la realidad física. Para describir la respuesta del circuito a frecuencias mayores otros fenómenos deben ser incluidos en el modelo (capacitancia e inductancia parásitas) incrementando la complejidad del mismo. Alternativamente, esta dinámica adicional puede ser tratada como incertidumbre dinámica.

Una restricción importante en el problema de estabilización robusta es que cada uno de los miembros de la familia de modelos debe tener el mismo número de polos inestables. El interesado en la explicación puede referirse a [1].

Para que el problema tenga sentido, siempre se asumirá incertidumbre acotada, de otra manera no hay diseño posible que pueda estabilizar todo el conjunto simultáneamente.

A continuación se plantea una condición que garantiza estabilidad para todos los elementos de la familia  $\mathfrak{G}$ , es decir, estabilidad robusta de  $g_0(s)$ . Para esto hace falta el concepto de norma infinita.

**Definición 8.1** *La norma infinito de un sistema SISO estable es el mayor factor de amplificación posible en estado estacionario a una excitación sinusoidal. Para una función de transferencia escalar  $\Psi(s)$ ,  $\|\Psi(s)\|$  es el máximo valor de  $|\Psi(s)|$  que es equivalente a  $\sup_{j\omega} |\Psi(j\omega)|$ , reemplazando  $s$  por  $j\omega$ . Estrictamente, para el caso más general (MIMO), la norma infinito es el máximo valor singular de la matriz de transferencia. En el caso de ser una función de transferencia (sistemas SISO), el máximo valor singular coincide con el el máximo valor absoluto. El interesado puede profundizar más en [2], esto está fuera del objetivo de estas notas.*

**Teorema 8.1** *Suponga que el modelo nominal  $g_0(s)$  es estabilizable internamente por un controlador  $k(s)$  (Figura 12). Luego todos los miembros de la familia  $\mathfrak{G}$  serán internamente estabilizados por el mismo controlador si y sólo si se satisface la siguiente condición:*

$$\|T(s)W(s)\|_{\infty} \triangleq \sup_{j\omega} |T(j\omega)W(j\omega)| \leq 1 \quad (16)$$

con  $T(s) \triangleq g_0(s)k(s)[1 + g_0(s)k(s)]^{-1}$  la función de sensibilidad complementaria del sistema a lazo cerrado.

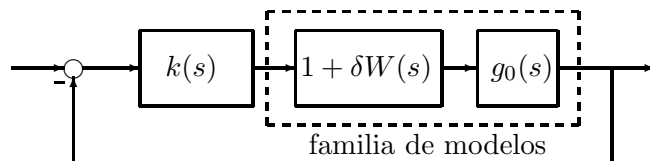


Figura 12:

Teniendo en cuenta la Figura 13, el Teorema 8.1 se puede interpretar gráficamente, en términos de una familia de diagramas de Nyquist correspondientes a el conjunto de lazos. Tener en cuenta que la condición (16) es equivalente a  $|1 + g_0(s)k(s)| \geq |g_0(s)k(s)W(s)|$ ,  $\forall s = j\omega$ . Para una frecuencia dada, el lugar de todos los puntos  $z(j\omega) = g_0(j\omega)k(j\omega) + g_0(j\omega)k(j\omega)W(j\omega)\delta$ ,  $\delta \in \mathbb{C}$ ,  $|\delta| < 1$  es un disco  $\mathcal{D}(\omega)$ , centrado en  $g_0(j\omega)k(j\omega)$  con radio  $r = |g_0(j\omega)k(j\omega)W(j\omega)|$ . Como  $|1 + g_0(j\omega)k(j\omega)|$  es la distancia entre el punto crítico y el punto del diagrama de Nyquist nominal correspondiente a la frecuencia  $j\omega$ , surge que la condición (16) es equivalente a requerir que, para cada frecuencia  $j\omega$ , el disco de incertidumbre excluya el punto crítico  $z = -1$ . Luego, estabilidad robusta para sistemas SISO puede ser verificada gráficamente dibujando la envolvente de todos los diagramas de Nyquist formado por el conjunto de círculos centrados en el diagrama nominal, con radio  $|g_0(j\omega)k(j\omega)W(j\omega)|$ , y verificando si esta envolvente encierra o no el punto crítico  $z = -1$ .

La frecuencia a la cual  $|W(j\omega_*)| = 1$  corresponde al límite para el cual existe 100% de incertidumbre en el modelo de la planta. Luego, otra interpretación de la condición (16) es que la frecuencia  $\omega_*$  es el límite superior para el ancho de banda de la función de sensibilidad complementaria  $T(s)$ . A frecuencias superiores de  $\omega_*$ , la ganancia de  $|T(j\omega)|$  debería ser menor que uno para conseguir estabilidad robusta.

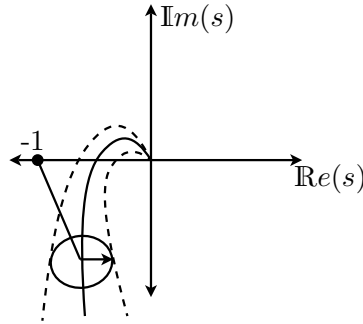


Figura 13:

Incertidumbre de fase y ganancia en lazo pueden ser interpretadas como un caso especial de incertidumbre dinámica multiplicativa.  $W(s) = 1$  y  $\delta \in \mathbb{R}$ ,  $|\delta| < 1$  corresponde a incertidumbre de ganancia. Por otro lado  $W(s) = -2$  y  $\delta = \frac{1}{2}(1 - e^{j\phi}) \in \mathbb{C} \Rightarrow |\delta| < 1$  corresponde a incertidumbre de fase. En ambos casos hay una estructura extra en la incertidumbre  $\delta$ , la cual es consecuencia de la información extra a priori en el modelo de incertidumbre, es decir, sólo hay incertidumbre en la fase o en la ganancia. Por este motivo, la condición en el Teorema 8.1 puede ser conservativa si se aplica a este caso si la información a priori es correcta. Resulta más prudente considerar el tipo de incertidumbre no estructurada descrita por la familia  $\mathfrak{G}$ . Considere el siguiente ejemplo [1].

**Ejemplo 8.2** Dado el modelo nominal  $g_0(s)$  y una segunda planta posible  $g_1(s)$ :

$$g_0(s) = \frac{3}{(s+1)(s+3)}$$

$$g_1(s) = \frac{300}{(s+1)(s+3)(s+100)}$$

Estas dos plantas se pueden describir usando la siguiente familia de modelos, caracterizada por incertidumbre multiplicativa, un dado peso  $W(s)$  y una cota  $\delta$ :

$$\mathfrak{G} = \{g(s) : g(s) = g_0[1 + \delta W(s)], |\delta| \leq 1\}$$

$$W(s) = \frac{s}{s+100}$$

Se puede verificar que  $g_1$  corresponde a  $\delta = -1$ . Notar que el conjunto  $\mathfrak{G}$  incluye además muchas otros modelos más. Por ejemplo para  $\delta = 1$  se obtiene

$$g_2(s) = \frac{6(s+50)}{(s+1)(s+3)(s+100)} \quad (17)$$

Luego si solo se necesitara incluir los modelos  $g_1(s)$  y  $g_0(s)$  o incluso un conjunto finito de modelos, la descripción anterior sería demasiado conservativa. Así, cualquier diseño que se aplique a toda la familia de modelos puede ser demasiado conservativo.

## 8.2. Otras descripciones de incertidumbre

Se pueden formular distintos tipos de incertidumbre dinámica similares a (15):

$$\mathfrak{G}_a = \{g_0 + \delta W_a(s), |\delta| < 1\} \quad (18a)$$

$$\mathfrak{G}_q = \{g_0[1 + \delta W_q(s)]^{-1}, |\delta| < 1\} \quad (18b)$$

$$\mathfrak{G}_i = \{g_0[1 + \delta W_i(s)g_0(s)]^{-1}, |\delta| < 1\} \quad (18c)$$

Estas descripciones se definen como incertidumbre aditiva, cociente e inversa respectivamente. La diferencia entre la descripción de incertidumbre entre cada una de ellas depende del tipo específico de aplicación. Por ejemplo, cuando un modelo de alto orden (incluso de dimensión infinita)  $g(s)$  debe ser aproximado por un modelo de menor orden  $g_r(s)$ , el error de aproximación puede ser considerado como incertidumbre dinámica aditiva. El conjunto de modelos “centrados” en el modelo nominal  $g_r(s)$ , se puede definir como

$$\mathfrak{G}_a \triangleq \{g_r(s) + \delta W_a(s), |\delta| < 1\} \quad (19)$$

El peso  $W_a(s)$  puede ser obtenido de las respuestas en frecuencia del error de aproximación (o una cota superior) y  $g(s)$ . De la misma forma, la incertidumbre multiplicativa parece ser una estructura adecuada para describir incertidumbre en la ubicación de ceros. Incertidumbre dinámica cociente es la menos conservativa para describir incertidumbre en la ubicación de los polos de lazo abierto. Considere el siguiente ejemplo [1].

**Ejemplo 8.3** *Considere el siguiente conjunto de modelos matemáticos, los cuáles pueden ser descriptos por una familia con incertidumbre dinámica cociente:*

$$\mathfrak{G}_q = \left\{ \frac{1}{(s + 3(2 + \delta))}, |\delta| < 1 \right\} = \{g_0(s)[1 + \delta_q W_q(s)]^{-1}, |\delta_q| < 1\} \quad (20)$$

que da lugar al siguiente modelo nominal y peso de incertidumbre:

$$g_0(s) = \frac{1}{s + 6}, \quad W_q(s) = \frac{3}{s + 6} \quad (21)$$

*Si en cambio el mismo conjunto se hubiese descripto por una familia de modelos con incertidumbre dinámica multiplicativa, hubiera habido una mayor cantidad de modelos innecesariamente, y como consecuencia la descripción hubiese sido más conservativa. Tomando el mismo modelo nominal, el nuevo peso de incertidumbre  $W_m(s)$  y la cota  $\gamma_m$  deberían estar definidos de forma tal que*

$$\{\delta_m W_m(s), \delta_m \in \mathbb{C}, |\delta_m| < \gamma_m\} \quad (22)$$

cubre el siguiente conjunto

$$\left\{ \frac{3\delta}{s + 3(2 + \delta)}, \delta \in \mathbb{C}, |\delta| < 1 \right\} \quad (23)$$

obtenido considerando  $(g(s) - g_0(s))/g_0(s)$ ,  $g(s) \in \mathfrak{G}_q$ . El peso  $W_m = 3/(s + 3)$  y la cota  $\gamma_m = 1$  logra la condición anterior pero incluye en el nuevo conjunto de modelos  $\mathfrak{G}_m$  sistemas de segundo orden, los cuales no están incluidos en  $\mathfrak{G}_q$ .

Luego, dependiendo del tipo específico de aplicación, la descripción del modelo de incertidumbre debe ser elegida apropiadamente entre alguna de las descripciones anteriores. Si toda la incertidumbre es incluida en una descripción en particular, se llama incertidumbre dinámica global.

De otra forma, se pueden elegir dos o más descripciones de incertidumbre para ajustar mejor la familia de modelos. Con esto se quiere decir, que teniendo en cuenta la información de estructura de la incertidumbre en el modelo, se selecciona el menor conjunto posible. Esto es importante porque en general, un controlador robusto debería estabilizar y proveer performance para todas las posibles plantas en la familia de modelos, por lo tanto mientras más grande se este conjunto más conservativo será el diseño.

El tipo de descripción de incertidumbre que combina información de diferentes porciones de la planta y adopta diferentes incertidumbres para cada parte, esto es, diferentes  $\delta's$ , se conoce como incertidumbre dinámica estructurada.

La tabla siguiente muestra condiciones necesarias y suficientes para estabilidad robusta para distintas descripciones de incertidumbre dinámica global. [1]

$\mathfrak{G}$	Estabilidad Robusta
$g_0[1 + \delta W_m(s)]$	$\ W_m(s)T(s)\ _\infty \leq 1$
$g_0 + \delta W_a(s)$	$\ W_a(s)k(s)S(s)\ _\infty \leq 1$
$g_0[1 + \delta W_q(s)]^{-1}$	$\ W_q(s)S(s)\ _\infty \leq 1$
$g_0[1 + \delta W_i(s)g_0(s)]^{-1}$	$\ W_i(s)g(s)S(s)\ _\infty \leq 1$

Luego de la tabla se infiere que distintas condiciones de estabilidad corresponden a diferentes descripciones de incertidumbre. Las condiciones de estabilidad robusta de la tabla anterior pueden ser interpretadas también como márgenes de estabilidad. Tomando el caso de incertidumbre multiplicativa, por ejemplo, y suponiendo que lo acotamos como  $|\delta_m| < \gamma_m$ , con  $\gamma_m$  número real positivo. Luego, se puede probar que la condición equivalente de estabilidad robusta para este nuevo conjunto de modelos es la siguiente:

$$\|T(s)W(s)\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma_m} \quad (24)$$

La ecuación anterior implica que  $\|T(s)W(s)\|_\infty$  puede ser interpretado como un margen de estabilidad para el conjunto de modelos con incertidumbre dinámica multiplicativa, en el mismo sentido que  $g_m$  es el margen de estabilidad para el conjunto de modelos con incertidumbre de ganancia.

El controlador que consigue el máximo margen de estabilidad (con respecto a incertidumbre multiplicativa) puede ser encontrado resolviendo el siguiente problema de optimización:

$$\inf_{k(s) \text{ estabilizante}} \|T(s)W(s)\|_\infty \quad (25)$$

Este problema esta fuera del alcance de estas notas.

## 9. Performance Nominal

En control clásico la medida de performance del sistema a lazo cerrado está basada en la habilidad del mismo en rechazar (en estado estacionario) perturbaciones conocidas (de forma conocida, seno, escalón, impulso, etc.), que pueden aparecer en distintas partes del lazo de control. Si bien se conoce la forma de la perturbación, no se conoce el tiempo en el que la misma ocurre. De la misma manera, la medida de performance puede ser puesta en términos de la habilidad del sistema para seguir referencias conocidas con error de estado estacionario nulo. Ya sabemos que,

rechazar perturbaciones y seguir referencias son problemas equivalentes. En la teoría de control moderno se utiliza el mismo concepto de performance. Adicionalmente en esta teoría, se introduce el concepto de control óptimo que consiste en la minimización de un funcional conocido. Este funcional cuantifica el compromiso entre la velocidad de seguir una dada referencia y la acción de control necesaria para lograrlo.

En estos dos casos, se debe tener un claro conocimiento de la perturbación. Si luego del diseño para una dada perturbación, la misma resulta distinta, la performance del sistema se puede ver degradada. Conceptualmente es la misma limitación que se encuentra para el caso de estabilidad del lazo cerrado. Es decir, si se estabiliza el modelo nominal, no hay garantía de que el sistema a lazo cerrado siga siendo estable si el modelo cambia. Por este motivo en la teoría de control clásico y moderno el diseñador debe tener un claro conocimiento del modelo nominal y de las perturbaciones externas para una correcta estabilización y performance.

En la práctica toda esta información puede no estar disponible (generalmente no lo está). Por este motivo estas condiciones deben ser relajadas. Para el caso de incertidumbre en la descripción del sistema se consideró una familia de modelos en lugar de un sólo modelo. Para el caso de performance, de la misma forma, se considera una familia de perturbaciones.

Si bien la teoría de control robusto aborda estos problemas con condiciones más relajadas, esto puede dar lugar a descripciones más conservativas de las incertidumbres y las perturbaciones y como consecuencia puede dar lugar a diseños más conservadores que con las técnicas clásicas. Por este motivo, dependiendo de la aplicación puede resultar mejor un enfoque o el otro.

### 9.1. Perturbaciones acotadas a la salida

Considere el lazo de control de la Figura 14, donde  $y(s) = S(s)d(s) = [1 + g(s)k(s)]^{-1}d(s)$ . Si el objetivo de performance es minimizar el efecto de la perturbación  $d(s)$  a la salida  $y(s)$ , se debe diseñar un controlador que establezca el sistema y que además haga  $S(s)$  tan chica como sea posible. La solución trivial es  $k(s) \rightarrow \infty$ , luego  $S(s) \rightarrow 0$ , pero no hay garantía de estabilidad nominal. Además, esto implica  $T(s) \rightarrow 1$  (recordar  $T(s) + S(s) = 1$ ) para todas las frecuencias. Esto implica que sólo se puede garantizar estabilidad robusta si la incertidumbre de la planta es menor al 100% para todas las frecuencias.

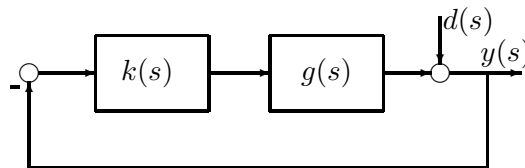


Figura 14:

Como consecuencia, se busca un controlador que haga  $S(s)$  chica en un rango de frecuencias de interés para la aplicación que se esté desarrollando. Un caso podría ser (generalmente) en el que el rechazo de la perturbación a la salida se debe lograr a baja frecuencia. El rango de frecuencias donde  $S(s)$  debe ser “chica” o el contenido de frecuencia de la perturbación puede ser representado por los pesos  $W_y(s)$  y  $W_d(s)$ , respectivamente. Estos pesos son sistemas dinámicos, los cuáles representan el conocimiento del contenido de frecuencia en las bandas de frecuencia de interés para performance y para la perturbación. Los mismos se pueden incorporar en el lazo de control como se muestran en la Figura 15. Por conveniencia, consideraremos la energía de la señal como una medida del tamaño de la misma.

Hasta ahora se han considerado cotas unitarias debido a que cualquier otra cota puede ser incluida dentro de los pesos.

El siguiente teorema da una condición computable para performance nominal.

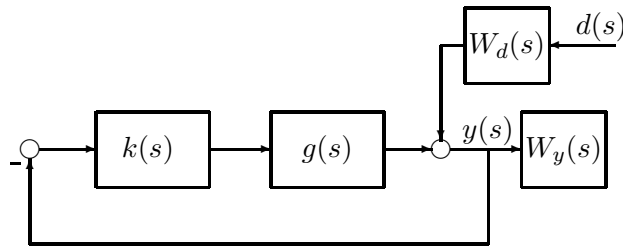


Figura 15:

**Teorema 9.1** *La realimentación del sistema de la Figura 15 consigue performance nominal si y sólo si*

$$\|W_y(s)S(s)W_d(s)\|_\infty \triangleq \sup_{j\omega} |W_y(s)S(s)W_d(s)| \leq 1 \quad (26)$$

Notar que esta condición es similar a la de estabilidad robusta sólo que aplicada a una función de transferencia distinta. Sin embargo es interesante el análisis que se realiza en [1], donde marca la siguiente diferencia entre ambas condiciones. La condición para estabilidad robusta puede ser interpretada cualitativamente. Es decir, todos los miembros de  $\mathfrak{G}$  son estables a lazo cerrado, o existe al menos un modelo que no lo es. Luego, no hay una separación gradual entre una condición y otra. En cambio, la condición de performance nominal puede ser relajada gradualmente, dado que es una propiedad cuantitativa del lazo de control. Esto quiere decir que la cota superior de la salida pesada a ser o minimizada puede ser cambiada por un número  $\gamma \geq 1$ . Esta nueva cota, degradará gradualmente la performance.

Como antes el controlador óptimo, en el sentido de proveer rechazo óptimo a perturbaciones, puede ser formulado en términos de un problema de optimización en la forma

$$\min_{k(s) \text{ estabilizante}} \|W_y S(s) W_d(s)\|_\infty \quad (27)$$

Tener en cuenta que la única suposición hecha sobre las perturbaciones es que las mismas tienen energía acotada. Las funciones de peso  $W_y$  y  $W_d(s)$  sólo proveen un conocimiento previo del contenido de frecuencia de esas señales pero no determinan su forma.

Una interpretación gráfica de la condición de performance nominal puede ser obtenida por medio de un diagrama de Nyquist (Figura 16). Definiendo  $W(s) \triangleq W_y(s)W_d(s)$  y teniendo en cuenta que (26) es equivalente a

$$|W(j\omega)| \leq |1 + g_0(j\omega)k(j\omega)|, \quad \forall \omega \quad (28)$$

Considere para cada frecuencia  $j\omega$ , un disco  $\mathcal{D}(j\omega)$  centrado en  $z = -1$ , con radio  $r = |W(j\omega)|$ . Luego, se puede interpretar gráficamente, teniendo en cuenta (28), que se consigue performance nominal si y sólo si, para cada frecuencia  $j\omega$ , el disco  $\mathcal{D}(j\omega)$  no incluye el diagrama de Nyquist del lazo nominal  $g_0(j\omega)k(j\omega)$ .

## 10. Performance Robusta

El objetivo final del control robusto es conseguir los requerimientos de performance para todos los miembros de la familia de modelos, es decir performance robusta con un sólo controlador. Como ya vimos, estabilidad robusta y performance nominal son pre requisitos para poder obtener performance robusta. A continuación se establece una condición necesaria y suficiente para performance robusta, utilizando las condiciones de performance nominal y estabilidad robusta.



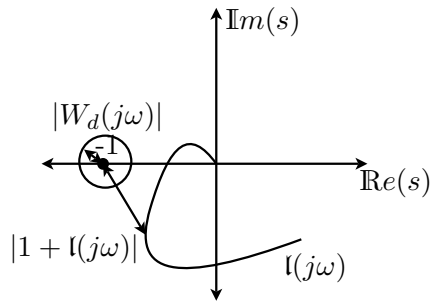


Figura 16:

**Definición 10.1** El lazo de realimentación de la Figura 17 consigue performance robusta si y sólo si  $\|W_y(s)y(s)\|_2 \leq 1$ , para todas las posibles perturbaciones en el conjunto  $\{d \in \mathcal{L}_2 \mid \|d\|_2 \leq 1\}$ , para todas las entradas del sistema igual a cero, y para todos los modelos en el conjunto  $\mathfrak{G} = \{g : g(s) = [1 + W_\delta(s)\delta]g_0(s), \delta \in \mathbb{C}, |\delta| < 1\}$ .

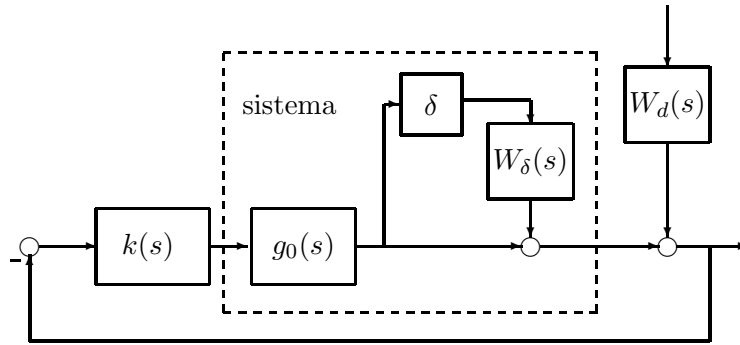


Figura 17:

Recordar que las condiciones necesarias y suficientes para performance nominal y estabilidad robusta son:

$$\|W_d(s)S(s)\|_\infty \leq 1 \quad (29)$$

$$\|W_\delta(s)T(s)\|_\infty \leq 1 \quad (30)$$

Performance robusta es equivalente a la condición (26), pero reemplazando el modelo nominal por la familia de modelos  $g = g_0[1 + W_\delta(s)\delta]$ ,  $\delta \in \mathbb{C}$ ,  $|\delta| < 1$ . Utilizando esto se obtiene una condición necesaria y suficiente para performance robusta.

**Teorema 10.1** Una condición necesaria y suficiente para performance robusta de la familia de modelos de la Figura 17 es

$$\| |W_d(j\omega)S(j\omega)| + |W_\delta(j\omega)T(j\omega)| \|_\infty \leq 1 \quad (31)$$

Igual que antes, se puede hacer una interpretación gráfica de la condición de performance robusta (Figura 18). Notar que (31) es equivalente a  $|1 + \mathcal{L}(j\omega)| - (|W_\delta(j\omega)\mathcal{L}(j\omega)| + |W_d(j\omega)|) \geq 0$ . De la figura vemos que la condición de performance robusta combina las dos condiciones gráficas de estabilidad robusta (Figura 17) y performance nominal (Figura 13). Luego, la condición de performance robusta es equivalente a que los discos, uno centrado en  $z_1 = -1$  con radio

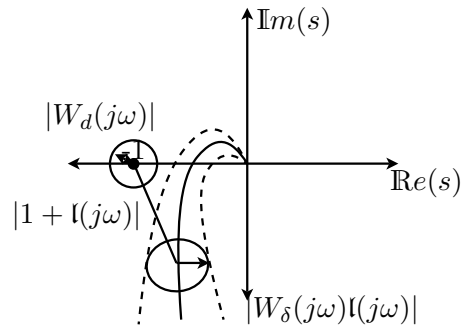


Figura 18:

$r_1 = |W_d(j\omega)|$  y el otro centrado en  $z_2 = \mathcal{L}(j\omega)$  con radio  $r_2 = |W_\delta(j\omega)\mathcal{L}(j\omega)|$  sean disjuntos  $\forall\omega$ . Claramente, esta condición es más restrictiva que conseguir performance nominal y estabilidad robusta por separado.

Sin embargo en sistemas SISO, escalando la condición de performance nominal es posible garantizar performance robusta. Luego, usualmente se escala la performance, una vez que la condición de estabilidad robusta es alcanzada con el objetivo de conseguir performance robusta (degradada) de la siguiente manera

$$\|\gamma|W_d(j\omega)S(j\omega)| + |W_\delta(j\omega)T(j\omega)|\|_\infty \leq 1, \quad \gamma \in [0, 1] \quad (32)$$

## Referencias

- [1] Sanchez-Peña, Ricardo S. *Robust Systems: Theory and Applications*. 1998, Wiley & Sons. ISBN 0-471-17627-3.
- [2] Zhou, Kemin. *Essentials of Robust Control*. 1999, Prentice Hall. ISBN 0-13-525833-2.
- [3] Ogata, Katsuhiko. *Modern Control Engineering*. 2010, Prentice Hall.