Potencia media para una resistencia en alterna

Se trata de calcular la potencia media en una resistencia conectada a una fuente de alterna sinusoidal.
Se sabe que potencia instantánea es el producto entre la tensión y la corriente

$$p(t) = v(t) \times i(t)$$

Nota: hablamos de potencia instantánea, esto es: el valor de la potencia instante a instante en una carga. Es potencia a secas, aunque como la vamos a usar en una resistencia ya sabemos que se trata de potencia activa.

La tensión y la corriente en función del tiempo en una resistencia serán:

$$v(t) = V \times \text{sen}\ \omega t$$

$$i(t) = I \times \text{sen}\ \omega t$$

También llamados tensión y corriente instantáneos. V sería el valor máximo de la tensión e I sería el valor máximo de la corriente.

Los dos van con el seno –y no aparece ningún ángulo de desfasaje– por que están en fase (es una resistencia).
Entonces reemplazando:

$$p(t) = V \times \text{sen}\ \omega t \times I \times \text{sen}\ \omega t$$

$$p(t) = V \times I \times \text{sen}^2\ \omega t$$

El seno al cuadrado tiene una identidad trigonométrica muy útil para este caso, y es:

$$\text{sen}^2\ \alpha = \frac{(1 - \cos 2\alpha)}{2}$$

Utilizamos eso en nuestra ecuación y queda:

$$p(t) = V \times I \times \frac{(1 - \cos 2\ \omega t)}{2}$$

$$p(t) = \frac{1}{2}\ V \times I\ -\ \frac{1}{2}\ V \times I\ \cos(2\ \omega t)$$

Esta expresión es la función resultante de la potencia para cada valor de t… o sea es la que también llamamos “potencia instantánea”

En la carilla siguiente calculamos la potencia media…

Valor Medio:

Ahora es donde sacamos el valor medio de p(t):

$$Pmed = \frac{1}{T}\int_0^T p(t).dt$$ Este es el cálculo por definición para la potencia media

Nota: sacando P y poniendo cualquier función eso da el valor medio de la función que sea.

Entonces reemplazamos p(t) por lo que sacamos en la carilla anterior:

$$Pmed = \frac{1}{2T}\int_0^T V.I.dt - \frac{1}{2T}\int_0^T V.I.\cos(2\omega t).dt$$

Los valores V e I son constantes (son los valores máximos) y salen fuera de la integral

$$Pmed = \frac{V.I}{2T}\int_0^T .dt - \frac{V.I}{2T}\int_0^T \cos(2\omega t).dt$$

La primera integral da T y la integral del cos(2ωt) evaluada en un período completo da cero

$$Pmed = \frac{V.I}{2T}T - 0$$

$$Pmed = \frac{V.I}{2}$$

Acomodando esta última ecuación podemos concluir con lo siguiente:

$$Pmed = \frac{V.I}{2} = \frac{P\max}{2}$$

En efecto el producto del valor máximo de la tensión por el valor máximo de la corriente no puede ser otra cosa que la potencia máxima.

Y hay más:

Haciendo un truquito matemático también podemos escribir las cosas de otra manera sabiendo que $2=\sqrt{2}\times\sqrt{2}$

$$Pmed = \frac{V.I}{2} = \frac{V.I}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{V}{\sqrt{2}} \times \frac{I}{\sqrt{2}} = V_{ef} \times I_{ef}$$

O sea que la potencia media –o la potencia promedio– en una resistencia conectada a una fuente de alterna es igual al producto de su tensión eficaz por su corriente eficaz.