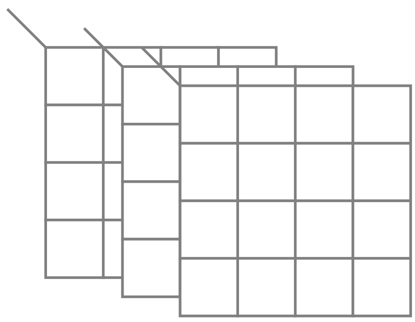
Funciones canónicas

y

Diagramas de Karnaugh



Realizado por Sergio Noriega

Introducción a los Sistemas Lógicos y Digitales
Departamento de Electrotécnia
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional de La Plata

2003

INDICE

1 - Introducción.

Es sabido que una función lógica que representa a un circuito combinatorio, puede expresarse de muchas formas. Además cuando se diseña un circuito en base al planteo del problema que se ha de resolver (por ejemplo realizando la tabla de verdad correspondiente), puede suceder que la función obtenida no sea la mas adecuada, debido por ejemplo a que ésta puede ser simplificada, en el número de términos a emplear y/o de variables asignadas.

Una forma de poder disponer de una herramienta capaz de plantear dicha función y analizar su posible simplificación es empleando la técnica ó método del Diagrama de Karnaugh.

Existen además otros métodos que se basan en el uso de tablas (método tabular).

Uno de ellos, si bien es antiguo, es el denominado Quine McCluskey, el cual es posible de integrar en un software para correr la simplificación desde una PC.

Hoy en día, la mayoría de los compiladores asociados con los productos de chips de lógica programada, están diseñados para realizar síntesis de funciones lógicas lo mas eficiente posible a fin de optimizar la cantidad de recursos utilizables en el chip, como así también minimizar todos los tiempos de retardo y tiempos de skew entre los diferentes componentes internos.

2 - Funciones canónicas.

Se define como ***función canónica*** de ***n*** variables a aquella función que es representada como la unión incompleta de mintérminos ó intersección incompleta de maxtérminos.

2.1 - Mintérminos y maxtérminos:

Se define mintérmino de una función canónica de n variables a un término producto de n variables tal que cumpla las siguientes condiciones:

1 - Cada término estará compuesto por la intersección de las n variables.

2 - Dichas variables pueden aparecer negadas ó sin negar.

3 - Ni dichas variables ni sus negaciones pueden repetirse en el término producto.

De la misma forma se define un maxtérmino de una función canónica de n variables a aquél término unión de n variables que cumpla con las siguientes condiciones:

1 - Cada término estará compuesto por la unión de las n variables.

2 - Dichas variables pueden aparecer negadas ó sin negar.

3 - Ni dichas variables ni sus negaciones pueden repetirse en el término unión.

En ambos casos la cantidad máxima de términos producto y unión que se pueden tener con n variables está dada por la expresión:

Número máximo de maxtérminos ó mintérminos = 2^n , donde n es el número de variables de la función.

Ejemplos:

Para 2 variables A y B, hay $2^2 = 4$ términos en total.

Los mintérminos son: /A /B, /A B, A /B y A B.

Los maxtérminos son: A+B, A+/B, /A+B y /A+/B.

Para 3 variables, tendremos $2^3 = 8$ términos en total.

Los mintérminos son: /C /D /E, /C /D E, /C D /E, /C D E, C /D /E, C /D E, C D /E y C D E.

Los maxtérminos son: C+D+E, C+D+/E, C+/D+E, C+/D+/E, /C+D+E, /C+D+/E, /C+/D+E y

/C+/D+/E

A fin de ordenarlos se los enumera de la siguiente manera, según la siguiente convención, la cual, en principio es arbitraria:

Número	Representación binaria	Mintérmino	Número	Representación binaria	Maxtérmino
0	000	/A /B /C	/0	000	A+B+C
1	001	/A /B C	/1	001	A+B+/C
2	010	/A B /C	/2	010	A+/B+C
3	011	/A B C	/3	011	A+/B+/C
4	100	A /B /C	/4	100	/A+B+C
5	101	A /B C	/5	101	/A+B+/C
6	110	A B /C	/6	110	/A+/B+C
7	111	A B C	/7	111	/A+/B+/C

No son mintérminos ó maxtérminos por ejemplo los siguientes:

Para 3 variables:	A A B C,	A+A+B+C	(está la variable A dos veces)
	B,	B+/C	(falta una ó mas variables)

2.2 - Funciones canónicas de primera y segunda forma:

Definidos los maxtérminos y mintérminos, podemos expresar ahora una función lógica en primera y en segunda forma canónica como sigue:

Primera forma: $F = \sum(\text{mintérminos})$ (Sumatoria de mintérminos)

Ejemplos: Función de dos variables

$$E = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$$

ó

$$E = \sum(m1, m2) = \sum(1,2)$$

Función de tres variables

$$J = \overline{P} \cdot \overline{Q} \cdot R + \overline{P} \cdot Q \cdot \overline{R} + P \cdot Q \cdot R$$

ó

$$J = \sum(m1, m2, m7) = \sum(1,2,7)$$

Segunda forma: $F = \prod(\text{maxtérminos})$ (Productoria de maxtérminos)

Ejemplos: Función de dos variables

$$T = (\overline{E} + F) \cdot (E + F) \cdot (\overline{E} + \overline{F})$$

ó

$$T = \prod(M0, M2, M3) = \prod(\overline{0}, \overline{2}, \overline{3})$$

Función de tres variables

$$A = (B + \overline{C} + D)$$

ó

$$A = \prod(M2) = \prod(\overline{2})$$

Existen, sin embargo dos casos especiales:

- Función unidad, F = 1, la cual está formada por la unión completa de mintérminos de n variables. En este caso siempre habrá para todas las combinaciones posibles de las variables, un mintérmino que hará a la función igual a 1.
  Ejemplo: La función: F = A+/A ó la función: F = /A/B+/AB+A/B+AB

- Función nula, G = 0, formada por la intersección completa de maxtérminos de n variables. Aquí siempre habrá una combinación de las variables que hará “0” a alguno de los términos unión, por lo tanto la función siempre será nula.
  Ejemplo: La función D = A /A ó la función D = (/C+/L) (C+/L) (/C+L) (C+L)

2.3 - Conversión a la forma canónica:

Cualquier función lógica expresada con el álgebra de Boole, puede ser representada tanto en una como en otra forma canónica.

Por ejemplo: La función $F = A + B \cdot C$, puede expresarse en primera forma, operando de la siguiente forma:

F = A **(/B/C + /BC + B/C + BC)** + BC **(/A + A)**

Aquí los términos en negrita valen “1” ya que se trata de la unión completa de mintérminos

entonces, F = A/B/C + A/BC + AB/C + ABC + ~~ABC~~ + /ABC

F = /ABC + A/B/C + A/BC + AB/C + ABC = $\sum(3,4,5,6,7)$

Otro ejemplo pero para pasar a segunda forma canónica:

Supongamos tener la función: P = (Q + R) S. Podemos hacer lo siguiente:

(Q + R) = (Q + R) + **/S S**

donde (/S S) no afecta a la función P, porque vale “0”

entonces, (Q + R) = (Q + R + /S) (Q + R + S)

De igual forma, trabajamos con S:

S = S + **(/Q + /R) (/Q + R) (Q + /R) (Q + R)**

Aquí los términos en negrita no afectan al resultado ya que se trata de la intersección completa de maxtérminos que vale “0”.

entonces, S = (/Q + /R + S) (/Q + R + S) (Q + /R + S) (Q + R + S)

La expresión de P quedará:

P = (/Q + /R + S) (/Q + R + S) (Q + /R + S) (Q + R + S) (Q + R + /S)
M6 M4 M2 M0 M1

$$P = \prod(M0, M1, M2, M4, M6) = \prod(\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6})$$

2.4 - Conversión entre formas canónicas

Dada una función en primera forma, es posible hallar la correspondiente función expresada en segunda forma y viceversa.
Para ello se hace uso de las siguientes consideraciones:

1. La unión completa de mintérminos, dá la función unidad.
2. La intersección completa de maxtérminos, dá la función nula.
3. La unión entre una función y su negada, dá la función unidad.
4. La intersección entre una función y su negada, dá la función nula.

Veamos un ejemplo para poder entender esto.
Supongamos que tenemos la siguiente función en primera forma:

G = /B /C /D + /B C D + B /C /D + B C /D + B C D = $\sum(0,3,4,6,7)$

La idea es pasarla a segunda forma, donde sabemos que la estructura de la misma es la de intersección de uniones, a diferencia de la unión de intersecciones como está planteada en primera forma.
Uno de los medios para lograr este cambio es empleando las leyes de Morgan.
Pero no podemos aplicarlas sobre la función G, pues nos quedaría al usar Morgan en el segundo término una barra de negación.
Pero si trabajamos con la función /G (negada de G) se puede llegar a transformar el segundo término a segunda forma.
Para ello analizando los puntos 1 y 3 podemos decir que /G está formada por los mintérminos que le faltan a la función G, esto es:

entonces, /G = /B /C D + /B C /D + B /C D = $\sum(1,2,5)$

Si se niegan ambos términos obtendremos:

$G = \overline{/B\ /C\ D + /B\ C\ /D + B\ /C\ D}$

Se obtuvo nuevamente G, pero aún el segundo término no se parece a intersección de uniones.

Aplicando Morgan en dicho término, tendremos:

$G = (\ \overline{/B\ /C\ D}\ )\ (\ \overline{/B\ C\ /D}\ )\ (\ \overline{B\ /C\ D}\ )$

Si ahora volvemos a aplicar Morgan, pero en cada uno de los tres paréntesis por separado, nos encontramos con que ahora aparecen tres maxtérminos, por lo tanto la función queda.

G = (B+C+/D) (B+/C+D) (/B+C+/D)

El mismo procedimiento se debe aplicar para el caso de querer pasar de una función de segunda a primera forma.

Algo interesante para notar es que la función de primera forma tenía 5 mintérminos y ahora la función en segunda forma que representa la misma función lógica posee solo tres maxtérminos.

Como regla, en una función en primera forma de n variables con m mintérminos, siendo m < 2^n***, le corresponderá una función en segunda forma con M maxtérminos donde M =*** 2^n ***- m.***

La misma consideración para el caso contrario de conversión.

3 - Diagrama de Karnaugh.

3.1 - Concepto de simplificación.

Según lo visto al estudiar el álgebra de Boole, existen una serie de axiomas y postulados que ayudan a poder simplificar funciones en caso de que éstas permitan ser reducidas a una mínima expresión.

Por ejemplo, la función E = A B, no puede ser reducida ya que está compuesta por un solo mintérmino. En cambio la función F = A B + A , puede ser simplificada.

Empleando las herramientas ya conocidas:

$$F = A\,B + A = A\,(1 + B) = A$$

Este es un ejemplo bastante sencillo, donde por simple inspección puede llegar a obtenerse una solución eficiente al problema.

Otro puede ser la siguiente función:

$$G = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot C \cdot \overline{D}$$

Esta función puede ser simplificada, quedando:

$$G = B \cdot \overline{D} \qquad [5]$$

En este caso, si bien con un poco de práctica puede resolverse, no es tan rápida la simplificación.

El problema se acentúa a medida que aumentan los términos que definen a una función y el número de variables puestas en juego, donde al resolver matemáticamente la misma, empleando las reglas del álgebra de Boole, puede resultar engorroso y hasta generar errores en los pasos a seguir mientras se está buscando algún tipo de simplificación.

Mas aún podría llegarse a la conclusión de que la función no puede ser reducida, habiendo perdido tiempo en buscar una inexistente versión condensada de la misma.

El diagrama de Karnaugh es un método gráfico, donde se puede representar en principio cualquier función lógica de un circuito combinatorio ó circuito secuencial elemental, permitiendo por simple inspección y de acuerdo a ciertas reglas, determinar no sólo si es posible simplificar dicha función sino buscar de minimizarla lo mas posible.

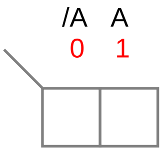
La limitación práctica en su uso está determinada por el número de variables que puede manejar, ya que si bien no hay restricción teórica en dicha cantidad, a partir de seis variables se hace complejo la resolución de síntesis de la función en cuestión. Generalmente se la emplea para resolver funciones de hasta 5 variables, sin demasiada complicación.

3.2 Representación gráfica de funciones

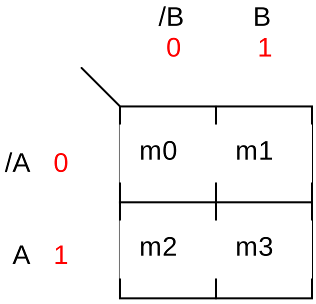
Una función elemental de una variable en ***primera forma canónica***, posee dos mintérminos, por ejemplo A y A.

Se podría representar por medio de casilleros, cada uno representando a un mintérmino. Entonces, si la función es A, se pone un “1” en el casillero correspondiente a A y un ”0” o dejándolo vacío al correspondiente al mintérmino A.

Se indica además para una mejor identificación, a cada casillero con un número que coincide con el número de mintérmino, según la convención vista anteriormente.

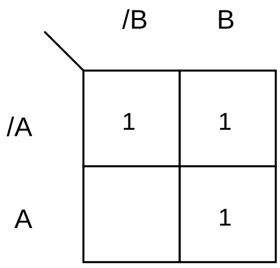


Para el caso de dos variables, por ejemplo, A y B, se tienen 4 casilleros pues ese es el número total de mintérminos.



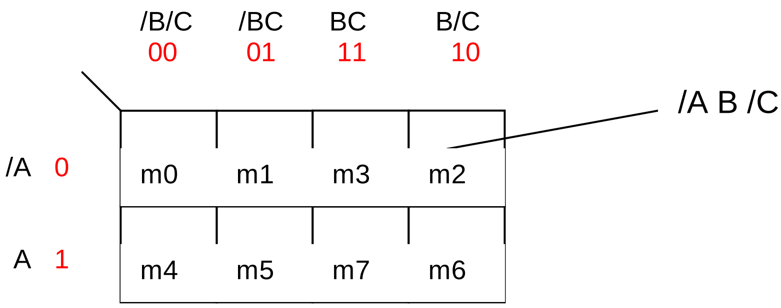
Las variables indicadas negadas y sin negar indentifican además a los mintérminos a manera de coordenadas.

Si por ej. la función es F = /A/B + /AB + AB, se deben poner un “1” en los casilleros que corresponden a los mintérminos /A/B, /AB y AB.



Con tres, cuatro y cinco variables se dan los siguientes ejemplos:

Tres variables:



Ejemplo: K = /ABC + /AB/C + /A/B/C

	/B/C	/BC	BC	B/C
/A	1		1	1
A				

Cuatro variables:

	/C/D 00	/CD 01	CD 11	C/D 10
/A/B 00	m0	m1	m3	m2
/AB 01	m4	m5	m7	m6
AB 11	m12	m13	m15	m14
A/B 10	m8	m9	m11	m10

/A B C /D

Ejemplo: L = /ABC/D + A/B/CD +ABC/D + ABCD

	/C/D	/CD	CD	C/D
/A/B				
/AB				1
AB			1	1
A/B		1		

Cinco variables:

	/C/D 00	/CD 01	CD 11	C/D 10
/A/B 00	m0			
/AB 01				
AB 11			m15	
A/B 10				

/E
0

	/C/D 00	/CD 01	CD 11	C/D 10
/A/B 00	m16			
/AB 01				
AB 11			m31	
A/B 10				

E
1

Ejemplo: F = /E/ABCD + /EABCD + E/ABCD + EA/BC/D + EA/B/CD + EABCD

	/C/D	/CD	CD	C/D
/A/B				
/AB			1	
AB			1	
A/B				

/E

	/C/D	/CD	CD	C/D
/A/B				
/AB			1	
AB			1	
A/B		1		1

E

En general para identificar el tipo de función de que se trata, se suele poner en la esquina inferior derecha una R que indica "reunión", es decir que la función está dada como unión de mintérminos.

Para el caso de representación en ***segunda forma canónica***, el razonamiento es exactamente el mismo. Cada uno de los casilleros que conforman el diagrama, representa un maxtérmino posible de la función. Siéstá en la función, entonces se pone un “cero” en ese lugar.

Por ejemplo para el caso de tres variables, tenemos:

	BC 00	B/C 01	/B/C 11	/BC 10
A 0				
/A 1				

(A+/B+/C)

Se indica con una letra **I** en la esquina inferior derecha que se trata de una representación de intersección de maxtérminos.

La presencia de un dado maxtérmino, se indica en el diagrama llenando el casillero respectivo con un “0” y generalmente se deja vacío a aquel que no se encuentra en la función.

Por ejemplo en la función: K = (A+B+C) (/A+B+/C) (/A+/B+C) tendremos tres “0s”.

	BC	B/C	/B/C	/BC
A	0			
/A		0		0

3.3 - Adyacencia:

Dados dos mintérminos, se dice que son adyacentes, si se cumple:

1 - Tienen igual número de literales.
2 - Los literales corresponden en ambos términos a las mismas variables.
3 - En ambas expresiones, todas menos un literal coinciden entre si.

Ej.1: ABC y ASD tienen igual número de literales, cumpliendo con (1), pero no involucran a las mismas variables => no son adyacentes.

Ej.2: AB y ABC no tienen el mismo número de literales => no son adyacentes.

Ej.3: A/B/C y /A/BC cumplen con (1) y (2), pero hay dos literales que no coinciden => no son adyacentes.

Ej.4: D/EF y DEF, cumplen con las tres premisas, por lo tanto son adyacentes.

Visualización de adyacencias:

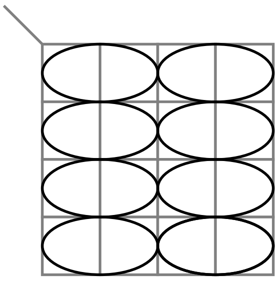
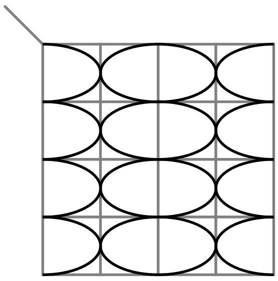
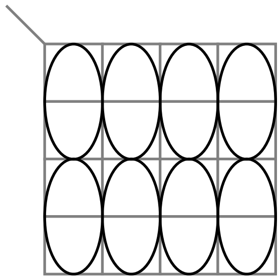
Inspeccionando un poco en el diagrama de Karnaugh vemos que la numeración de cada casillero no es correlativa si la enumeramos de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo.

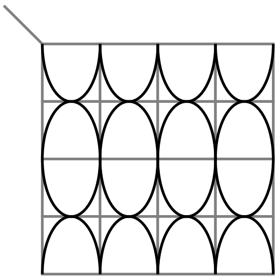
Esto es debido a que está diseñado a fin de que se cumpla con la propiedad de adyacencia entre los diferentes términos de la función, ya sean maxtérminos ó mintérminos.

Por tal motivo, en principio, dado un término en particular, serán términos adyacentes a él, aquellos que se encuentren en su vecindad, arriba ó abajo, y a derecha ó a izquierda, pero nunca en diagonal ó donde halla casilleros de por medio.

La única salvedad para este último caso es entre casilleros que se encuentren simétricos en ambos extremos.

A continuación veamos algunos ejemplos para una función de 4 variables donde se remarca la adyacencia entre dos términos:



Cada una de las elipses representa al par de términos que son adyacentes entre sí.

Esto es válido ya sean mintérminos ó maxtérminos.

Como se verá mas adelante, esta propiedad de adyacencia es muy importante para poder emplear el diagrama de Karnaugh como herramienta de simplificación de funciones lógicas.

3.4 - Determinación automática de una función en segunda forma en base a la representación en primera forma y viceversa.

Cuando se representa una función en primera forma, sabemos que tiene también su expresión en segunda forma y lo mismo para el caso contrario.
Recordando lo visto en funciones canónicas, de como se podía determinar una de las formas partiendo de la otra aplicando Morgan, es posible aplicar el mismo principio gráficamente.

Consideremos como ejemplo el caso de la siguiente función dada en primera forma:

D = /A/B/C + /A/BC + A/B/C + A/BC + AB/C + ABC

Recordando que se partía de la función negada, tendremos que /D estará formada por los mintérminos que faltan en la función de D, esto es:

/D = /AB/C + /ABC

Y aplicando la negación en ambos términos y luego aplicando Morgan dos veces en el segundo, llegamos a:

$D = \overline{/AB/C + /ABC}$ (negando ambos miembros)

$D = (\overline{/AB/C})\ (\overline{/ABC})$ (aplicando Morgan una vez)

D = (A+/B+C) (A+/B+/C) (aplicando Morgan otra vez)
(maxtérminos 2 y 3 respectivamente).

Analizando esto en el diagrama de Karnaugh vemos que si partiendo de la función dada en primera forma, tomamos los casilleros que son “0”, ellos formarán la función D negada. El proceso se puede representar de la siguiente forma:

D = /A/B/C + /A/BC + A/B/C + A/BC + AB/C + ABC

	/B/C 00	/BC 01	BC 11	B/C 10
/A 0	1	1		
A 1	1	1	1	1

/D = /AB/C + /ABC

	/B/C 00	/BC 01	BC 11	B/C 10
/A 0			1	1
A 1				

D = (A+/B+C) (A+/B+/C)

	BC 00	B/C 01	/B/C 11	/BC 10
A 0			0	0
/A 1				

Comparando los diagramas de Karnaugh de primera forma y segunda forma, se tiene que por ejemplo, para pasar directamente a segunda forma desde el Karnaugh de primera forma, sólo hay que trabajar con los “ceros” del Karnaugh original.

Se cambian las “uniónes” por “intersecciones” y además el estado de los literales, es decir, si una variable estaba negada se deja sin negar y viceversa.

En nuestro caso teníamos que los mintérminos “ceros” de D, es decir, los que no formaban parte de esa función, pero sí de /D, eran: /AB/C y /ABC.

Aplicando la regla anterior tendremos que los maxtérminos que forman la función D son: A+/B+C y A+/B+/C

4 - Simplificación de una función empleando el diagrama de Karnaugh.

Hasta ahora hemos visto como se puede representar cualquier tipo de función en el diagrama de Karnaugh, tanto en primera como en segunda forma.

Analicemos las siguientes funciones en ***primera forma*** que se dan como ejemplo::

	/C/D	/CD	CD	C/D
/A/B	1	1		
/AB				
AB				
A/B				

	/C/D	/CD	CD	C/D
/A/B				
/AB		1	1	
AB		1	1	
A/B				

	/C/D	/CD	CD	C/D
/A/B				
/AB				
AB	1	1	1	1
A/B	1	1	1	1

En el primer caso se tiene una función formada por dos mintérminos (0 y 1), que agrupándolos, forman la función: /A/B/C.

En el segundo caso, hay cuatro mintérminos, formando: BD y en el tercero caso, ocho mintérminos, que juntos, forman la función: A.

Si se inspecciona cada una de las funciones con detenimiento se verá que se han formado grupos de a dos, cuatro y ocho términos que son adyacentes.

Una de las condiciones de adyacencia entre términos es que hay un solo cambio de variables y esto significa que pueden agruparse generando otros términos de menor cantidad de variables.

Nuevamente, en el primer caso, tenemos que los dos mintérminos forman un nuevo término donde la variable D no aparece (se ha eliminado) ya que está en uno negada y en el otro sin negar, esto es, matemáticamente hablando:

F = /A /B /C /D + /A /B /C D = A B C (/D + D) = A B C

Aquí y en cualquier otro caso donde aparezcan dos mintérminos que sean adyacentes, siempre se eliminará una variable.

Razonando de la misma manera, en el segundo ejemplo, tenemos un grupo de cuatro mintérminos que eliminan dos variables: A y C, quedando la función:

G = B D

Para el tercer caso, agrupando de a ocho mintérminos se eliminan tres variables, siendo la función reducida a la variable A. Esto se comprueba matemáticamente ya que hay ocho mintérminos de cuatro variables cada uno en donde siempre aparece la variable A sin negar, por lo que se puede sacar como factor común. Al hacerlo, nos aparecerán en el paréntesis, la unión de ocho términos con las variables B, C y D, que en realidad son mintérminos de tres variables, y por lo visto anteriormente, al tener ocho mintérminos de tres variables, esto nos dá la unión completa de mintérminos con B, Cy D, siendo la función unidad "1".

Todo esto nos dá la idea, de que para simplificar una función en priemra forma se deben buscar grupos de mintérminos que sean adyacentes.

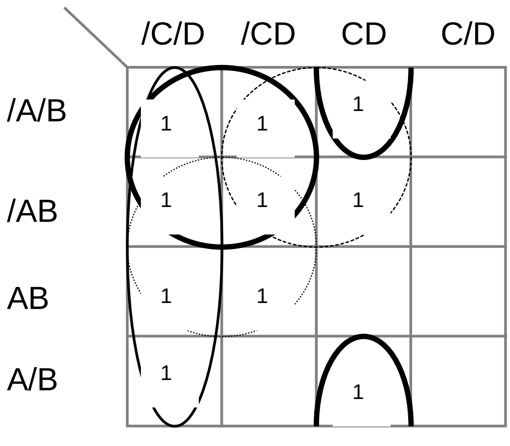
De esta forma, el mecanismo de simplificación de una función es el siguiente:

1 - Representar a la misma en el diagrama de Karnaugh.
2 - Tratar de encontrar primero, grupos de mayor cantidad de mintérminos adyacentes.
3 - Seguir con los grupos de menor número de mintérminos.
4 - Los grupos formados deben tener entre sí al menos un mintérmino diferente.

En este método de simplificación puede ocurrir que la función no pueda ser reducida o que existan mas de una alternativa para representarla una vez reducida.

Por ejemplo, la función B D, no puede ser reducida.

Un ejemplo un poco mas complejo puede ser el siguiente:



En este caso se han podido formar cuatro grupos de cuatro mintérminos y un solo grupo de dos mintérminos.

La función simplificada será: F = /A/C + /C/D + BD + /AD + /BCD

Una consideración importante que hay que tener en cuenta es en lo referente al tipo de diagrama en el cual estamos trabajando, esto es, primera o segunda forma.

Puede darse el caso en que a los fines de implementar la función convenga una u otra según lo que hemos visto respecto a la cantidad de términos que se involucran en uno u otro caso.

Como ejemplo vemos la siguiente expresión representada en primera forma:

	/C/D	/CD	CD	C/D
/A/B	1		1	1
/AB	1			
AB	1	1	1	1
A/B	1	1	1	1

Aquí la función puede ser reducida como máximo a:

F = /C/D + A + /BC

Mientras que si planteamos resolver F en segunda forma canónica, tendremos:

	CD	C/D	/C/D	/CD
AB		0		
A/B		0	0	0
/A/B				
/AB				

La expresión inicial de F sin simplificar será:

F = (A+B+C+/D) (A+/B+C+/D) (A+/B+/C+/D) (A+/B+/C+D)

Al igual que en primera forma, es posible simplificar una función en segunda forma canónica, si se agrupan mintérminos en grupos potencia de dos, es decir, de a dos, cuatro, ocho, etc. mintérminos.

Por tal motivo se puede ver que la expresión anterior puede reducirse tomando dos grupos de dos maxtérminosy quedaría:

F = (A+C+/D)(A+/B+/C)

Casos especiales de síntesis:

Existen casos, sin embargo donde se hace muy difícil encontrar la solución mas conveniente ya que por ejemplo desde el punto de vista práctico puede ser mas ventajoso emplear mas compuertas de un mismo tipo que otra opción que necesite menos compuertas pero de mas de un tipo. Esto se debe a que comercialmente se consiguen circuitos integrados standard con varias compuertas por chip.

Un circuito que deba usar cuatro compuertas de dos entradas necesitará de dos circuitos integrados si alguna variable se deba negar.

Si la misma función tiene otra solución con solo dos compuertas de distinto tipo y hay variables negadas, necesitará de tres circuitos integrados, lo cual, económicamente es una solución peor que la primera, ya que se utiliza un circuito mas, mayor área de impreso, mayor número de integrados para stock y menor confiabilidad al aumentar el número de componentes.

Un caso especial que se dá en la representación por diagrama de Karnaugh es cuando existe una disposición de términos (min ó maxtérminos) en forma diagonal como se ve a continuación:

	/B/C	/BC	BC	B/C
/A		1		1
A	1		1	

$$E = \sum(1,2,4,7)$$

A primera vista parece que no existe posibilidad de simplificar a esta función.

Esto es verdad si pensamos en emplear las funciones básicas, pero si desarrollamos esta expresión, podemos encontrar una reducción importante de compuertas con los circuitos integrados comerciales disponibles.

Trabajando un poco con el Algebra de Boole, tenemos que:

E = /A /B C + /A B /C + A /B /C + A B C

E = /A (/B C + B /C) + A (/B /C + B C)

E = A B⊕C + A B⊕C = A⊕B⊕C

Con lo cual dicha función se implementa con dos compuertas Or - Exclusivo ya que comercialmente vienen de dos entradas cada una. Además en un mismo chip se dispone de cuatro de éstas, minimizándose además el espacio en el impreso.

En forma similar para el caso de cuatro variables tenemos por ejemplo lo siguiente:

AB \ CD				
		1		1
	1		1	
		1		1
	1		1	

F = /A /B /C D + /A /B C /D + /A B /C /D + /A B C D +

A /B /C /D + A /B C D + A B /C D + A B C /D

Agrupando convenientemente los términos podemos llegar a una expresión donde están involucrados operadores del tipo Or - exclusivo.

F = /C D (/A /B + A B) + C /D (/A /B + A B) + C D (/A B + A /B) + /C /D (A /B + /A B)

$F = \overline{A \oplus B}\ (/C\ D + C\ /D) + A \oplus B\ (C\ D + /C\ /D) =$

$F = (\overline{A \oplus B})\ (C \oplus D) + (A \oplus B)\ \overline{(C \oplus D)} = A \oplus B \oplus C \oplus D$

Empleando como en el caso anterior compuertas Or - Exclusivo de dos entradas podemos implementar esta función con tres compuertas, es decir con un sólo chip.

Representación de cualquier función en diagramas de Karnaugh expresada en forma general

Como se vío hasta ahora, para poder expresar una función en un diagrama de Karnaugh, era necesario primero pasarla a primera ó segunda forma canónica.

Es posible, sin embargo, saltearse ese paso, ya que en general las funciones vienen expresadas como un conjunto de términos con operaciones lógicas básicas y no cumplen con los requisitos de mintérminos y/o maxtérminos.

Analizando por ejemplo un diagrama en primera forma como el siguiente veremos que por ejemplo, la unión de los mintérminos 0, 1, 4 y 5 forman la función /B.
Esto coincide con las referencias verticales y horizontales de las variables, tal que /B existe en esos cuatro casilleros.

	/B/C	/BC	BC	B/C
/A	1	1		
A	1	1		

Si por ejemplo, nuestra función es B, entonces deberíamos llenar los otros cuatro casilleros de la derecha.

Para la función A, los cuatro de abajo. Para /A, los cuatro de arriba y así sucesivamente para C.

Si en cambio, queremos expresar la función A B (A intersección B), la regla a adoptar para Karnaugh de primera forma, es la siguiente:

Las operaciones de unión entre términos queda reflejado en el diarama como los mintérminos comunes y no comunes a los mismos.

Las operaciones de intersección, en cambio, consideran sólo los términos comunes a los términos elegidos.

Para el caso de A B, podemos dibujar los respectivos Karnaugh como sigue:

FUNCION A

	/B/C	/BC	BC	B/C
/A				
A	1	1	1	1

FUNCION B

	/B/C	/BC	BC	B/C
/A			1	1
A			1	1

Según la regla anterior, el Karnaugh resultante al realizar la operación A B, es la de tomar sólo los términos comunes a ambas funciones, por lo que de esto resulta:

	/B/C	/BC	BC	B/C
/A				
A			1	1

En cambio, la función A+B resultaría en:

	/B/C	/BC	BC	B/C
/A			1	1
A	1	1	1	1

Otro ejemplo, pero de cuatro variables sería por ejemplo:

G = A B + /D (/A+C)

Para este caso, se pueden hallar los diagramas de A B por un lado y de /D (/A+C) por el otro y luego volcar todos los términos comunes y no comunes en el Karnaugh definitivo.

AB \ CD	/C/D	/CD	CD	C/D
/A/B				
/AB				
AB	1	1	1	1
A/B				

Función A B

AB \ CD				
	1			1
	1			1
	1			1
	1			1

Función /D

AB \ CD				
	1	1	1	1
	1	1	1	1
			1	1
			1	1

Función /A+C

AB \ CD				
	1			1
	1			1
				1
				1

Función /D (/A+C)

AB \ CD				
	1			1
	1			1
	1	1	1	1
				1

Función G = A B + /D (/A+C)

En caso de operar con diagramas de Karnaugh de segunda forma, las reglas son similares, pero duales, es decir, que cuando se desee hacer una unión, se consideran sólo los términos comunes y en una intersección, lo común y no común.

5 - Simplificación de funciones múltiples con diagrama de Karnaugh

Puede suceder que el circuito que se desea diseñar contenga mas de una salida en función de las mismas variables de entrada.

En estos casos puede ser interesante analizar mediante los diagramas de Karnaugh respectivos a cada función, como están distribuídos los términos en los mismos, a fin de hallar estructuras comunes.

Esto redunda en una disminución del número de compuertas que se deba utilizar.

Por ejemplo, tenemos el siguiente caso:

F = (AB \ CD)

		1	
	1	1	
	1	1	

G = (AB \ CD)

1			
1	1	1	
	1	1	
1			

$$F = \sum(3,5,7,13,15) \qquad G = \sum(0,4,5,7,8,13,15)$$

Aquí se puede observar que existen cuatro términos en común permitiendo de esta manera sintetizar sólo una vez la subfunción B D (que agrupa los mintérminos 5,7,13 y 15) en ambas funciones, con el consecuente ahorro de compuertas.

En el caso en que no se encuentren términos comunes, no es posible mediante este método simplificar la función en forma directa.

Se puede realizar una inspección de las tablas de verdad, donde puede aparecer alguna información adicional, como por ejemplo el que se presenta en el siguiente ejemplo:

Se trata de un detector de magnitud de dos números binarios A y B de dos bits cada uno (A1A0 y B1B0).

El circuito a sintetizar debe disponer de tres salidas, A>B, A<B y A=B, para determinar el estado de la comparación.

A>B se pondrá en “1” sólo si se verifica dicha desigualdad.
A<B se pondrá en “1” sólo si se verifica dicha desigualdad.
A=B se pondrá en “1” sólo si se verifica dicha igualdad.

La tabla de verdad para estas tres funciones será:

A1	A0	B1	B0	A<B	A=B	A>B
0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1	0

Sin dibujar los diagramas de Karnaugh de cada función, podemos ver en la tabla que no existe coincidencia alguna de mintérminos en tre las tres funciones, es decir, si un mintérmino aparece en la función A>B no aparecerá en las otras dos y viceversa.

Karnaugh aquí no sirve, pero intuitivamente podemos reducir la cantidad de lógica para resolver las tres funciones simultáneamente.

Si bien no existe ningún término que se repita en alguna de las tres funciones, hay una regla implícita, que es la siguiente:

Sólo una salida será verdadera (se pondrá en “1”) por vez.

Conociendo esto, es intuitivo pensar que es posible generar una de las funciones en base a las otras dos.
Por ejemplo la función A=B puede ser generada a partir de las salidas de A>B y A<B, sabiendo que la primera será siempre verdadera cuando se verifique que A>B y A<B sean ambas falsas (estén en “0”).
Con esto en mente, se sintetizan por separado las funciones A>B y A<B y luego se puede implementar A=B, empleando una sola compuerta NOR, con lo cual hemos evitado sintetizar esta función desde las variables de entrada.

6 – Bibliografía

1 Introduction to switching theory and logical design. Hill & Peterson. Editorial John Wiley & Sons.
2 Circuitos Digitales y Microprocesadores. Herbett -Taub.
3 Electrónica Digital. Bignell – Donovan. CECSA.
4 Fundamentos de diseño lógico y computadoras. Morris Mano – Kime. Prentice-Hall Hispanoamericana.