

FUNCIONAMIENTO EN CORTOCIRCUITO DE LAS MAQUINAS SINCRONICAS

CC-03.PDF

3	La maquina ideal de Park	92 / 114
----------	---------------------------------	-----------------

3. LA MAQUINA IDEAL DE PARK.

3.1 Generalidades

Se toma en consideración la fig. 25a, que esquematiza una máquina trifásica con rotor bipolar a polos salientes.

En el estator se han dispuesto tres arrollamientos simples, conectados en estrella, distribuidos de manera de presentar los ejes magnéticos desfasados entre sí de 120 grados eléctricos y las fuerzas magneto-motrices de fase distribuidas sinusoidalmente.

Sobre el rotor está dispuesto el arrollamiento de excitación que termina, por intermedio de un colector de anillos, en dos escobillas fijas, y una jaula amortiguadora formada por dos barras por polo conectadas entre sí por medio de dos anillos. La jaula amortiguadora se comporta como si estuviese formada por dos arrollamientos simples cerrados: uno dispuesto simétricamente al eje de los polos, el otro al eje de la zona interpolar. Estos ejes se denominan eje directo y eje en cuadratura respectivamente.

En la fig. 25b los arrollamientos del estator y del rotor se representan con bobinas dispuestas según los respectivos ejes magnéticos. Las corrientes y las tensiones de los arrollamientos se distinguen con los símbolos a, b, c, para los arrollamientos de las tres fases del estator, f para el arrollamiento de excitación xd, xq para los arrollamientos amortiguadores. Los ejes de simetría del rotor, directo y en cuadratura se distinguen con los símbolos d, q, los ejes magnéticos de los arrollamientos del estator se distinguen con los símbolos a, b, c,.

En la figura 25b, se indica con ψ_a el ángulo formado por el eje de la fase a con el eje directo d; en consecuencia los ángulos relativos a los ejes de las otras dos fases ψ_b y ψ_c resultan:

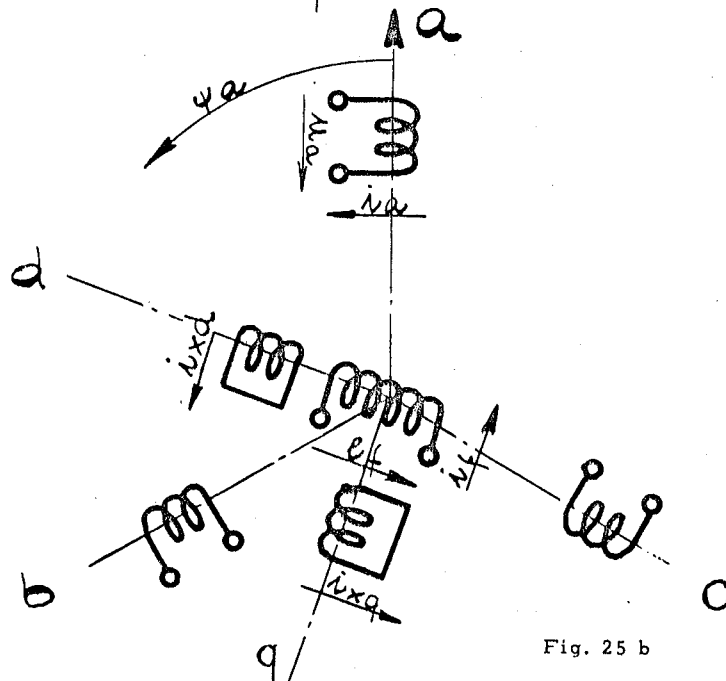
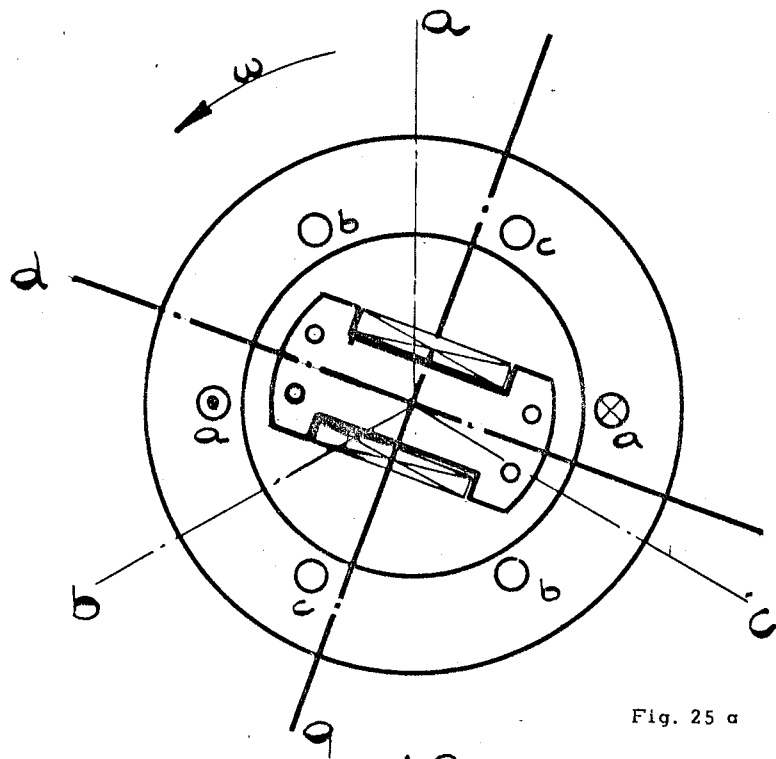
$$\psi_b = \psi_a + \frac{4\pi}{3} \quad , \quad \psi_c = \psi_a + \frac{2\pi}{3}$$

Pero a causa de la rotación del rotor los ejes magnéticos de las fases a, b, c, asumen respecto al eje directo posiciones que varían ciclicamente con el tiempo. Cuando la velocidad angular ω de rotación del rotor es constante, el ángulo ψ_a se puede expresar con la expresión.

$$\psi_a = \psi_{a0} + \omega t \quad \text{o bien} \quad \psi_a = \omega t$$

si se asume en el instante $t=0$ la dirección del eje d en coincidencia con aquella del eje a .

Cuando los seis arrollamientos (tres del estator y tres del rotor) son recorridos por corriente, cada uno concatena un flujo total. Parte de este flujo es propio del arrollamiento que se considera; por lo tanto depende de los valores instantáneos de la corriente que circula en el arrollamiento mismo y de los valores instantáneos del coeficiente de autoinducción. La parte restante del flujo total concatenado se debe a los flujos de los otros arrollamientos y depende de los valores instantáneos de las corrientes que circulan en estos arrollamientos y de los valores instantáneos de los coeficientes de inducción mutua. Las configuraciones de los campos magnéticos varían en el tiempo con su intensidad y con la posición relativa del rotor respecto al estator. La primera dependencia es causada por el hierro presente en los distintos circuitos magnéticos, estando el hierro sujeto a la histéresis y a la saturación. La segunda dependencia es causada por los valores de la reluctancia a lo largo de los dos ejes de simetría del rotor, distinta en las máquinas a polos salientes (anisótropas) y en menos medida también en aquellas a rotor liso (isótropas).



Si se quisiera tener cuenta de todos los fenómenos antes mencionados para determinar las condiciones de funcionamiento de una máquina, sería necesario emplear un procedimiento de cálculo complejo. En efecto a los fenómenos que se desarrollan en la máquina, no se podría aplicar el principio de la superposición de los efectos. La dificultad puede ser superada despreciando la histéresis y la saturación del hierro. Las simplificaciones que resultan, permiten considerar los valores instantáneos de los coeficientes de auto y mutua inducción independientes de la intensidad de las corrientes, todavía independientes de factores geométricos de la máquina. Algunos de ellos varían a su vez instante por instante con la posición del rotor respecto al estator.

Resulta en particular, como se mostrará a continuación que:

- los valores de los coeficientes de auto y mutua inducción de los arrollamientos dispuestos en el rotor no varían en el tiempo;
- los valores de los coeficientes de auto y mutua inducción de los arrollamientos dispuestos en el estator y aquellos de mutua inducción entre dos arrollamientos no pertenecientes a la misma estructura, varían ciclicamente en el tiempo con la posición del rotor;
- los valores de los coeficientes de mutua inducción recíprocos son iguales.

Estas relaciones se resumen en el Apéndice 1. En él los valores instantáneos de los coeficientes de inducción se indican con el símbolo $\mathcal{L}$ y se distinguen con dos letras: la primera indica el arrollamiento que concatena el flujo y la segunda en cambio el arrollamiento que produce el flujo. La parte de los coeficientes de inducción que no varían con la posición del rotor está indicada con el símbolo L.

Los valores instantáneos de las tensiones y de las corrientes en los distintos arrollamientos de la máquina se pueden considerar positivos cuando tienen las direcciones indicadas en la fig. 25b, referida al funcionamiento como generador. Los flujos producidos por la fuerzas magneto-motrices de reacción de inducido deben considerarse negativos respecto de los flujos producidos por las fuerzas magneto-motrices y las notaciones antes mencionadas, los valores instantáneos de los flujos concatenados por los circuitos de la máquina, se pueden expresar, por medio de las relaciones siguientes:

Arrollamientos de Estator

$$[1] \quad \varphi_a = \mathcal{L}_{af} i_f + \mathcal{L}_{axd} i_{xd} + \mathcal{L}_{axq} i_{xq} - \mathcal{L}_{aa} i_a - \mathcal{L}_{ab} i_b - \mathcal{L}_{ac} i_c$$

$$[2] \quad \varphi_b = \mathcal{L}_{bf} i_f + \mathcal{L}_{bxq} i_{xq} + \mathcal{L}_{bxq} i_{xq} - \mathcal{L}_{ba} i_a - \mathcal{L}_{bb} i_b - \mathcal{L}_{bc} i_c$$

$$[3] \quad \varphi_c = \mathcal{L}_{cf} i_f + \mathcal{L}_{cxq} i_{xq} + \mathcal{L}_{cxq} i_{xq} - \mathcal{L}_{ca} i_a - \mathcal{L}_{cb} i_b - \mathcal{L}_{cc} i_c$$

Arrollamientos de Rotor

$$[4] \quad \varphi_f = \mathcal{L}_{ff} i_f + \mathcal{L}_{fxd} i_{xd} - \mathcal{L}_{fa} i_a - \mathcal{L}_{fb} i_b - \mathcal{L}_{fc} i_c$$

$$[5] \quad \varphi_{xd} = \mathcal{L}_{xdf} i_f + \mathcal{L}_{xxd} i_{xd} - \mathcal{L}_{xda} i_a - \mathcal{L}_{xdb} i_b - \mathcal{L}_{xdc} i_c$$

$$[6] \quad \varphi_{xq} = \mathcal{L}_{xxq} i_{xq} - \mathcal{L}_{xqa} i_a - \mathcal{L}_{xqb} i_b - \mathcal{L}_{xqc} i_c$$

Aplicando además para cada arrollamiento las normales leyes circu-
tales entre tensiones, corrientes y flujo concatenado se pueden es-
cribir las siguientes relaciones:

Arrollamientos de estator.

$$[7] \quad u_a = -r_a i_a + \frac{d\varphi_a}{dt}$$

$$[8] \quad u_b = -r_b i_b + \frac{d\varphi_b}{dt}$$

$$[9] \quad u_c = -r_c i_c + \frac{d\varphi_c}{dt}$$

Arrollamientos de rotor

$$[10] \quad e_f = r_f i_f + \frac{d\varphi_f}{dt}$$

$$[11] \quad 0 = r_{xd} i_{xd} + \frac{d\varphi_{xd}}{dt}$$

$$[12] \quad 0 = r_{xq} i_{xq} + \frac{d\varphi_{xq}}{dt}$$

donde el símbolo r indica las resistencias cada uno de los arrolla-
mientos.

Las derivadas de los flujos en cambio asumen la forma genérica siguien-
te:

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \sum_{a,j} \frac{\partial \mathcal{L}_{ij}}{\partial i_j} \frac{di_j}{dt} + \sum_{a,j} \frac{\partial \mathcal{L}_{ij}}{\partial \omega t} \cdot \frac{\delta \omega t}{\delta t} i_j,$$

por lo tanto para que las ecuaciones de (7) a (12) sean lineales
es necesario que el término $\delta \omega t / \delta t$ resulte de valor constante: lo
cual se verifica solamente cuando la velocidad angular de rotación
del rotor es de valor constante.

Desde el punto de vista teórico las ecuaciones (7) a (12) constitu-
yen un sistema que permite estudiar cualquier funcionamiento perma-
nente o bien dinámico de una máquina; todavía los métodos analíti-
cos que se deben aplicar para alcanzar la solución resultan comple-
jos. A este sistema de ecuaciones fue introducida una eficaz simpli-
ficación por Blondel.

3.2 - Transformaciones de las magnitudes medibles del estator.

La fuerza magneto-motriz de reacción de inducido, cualquiera sea el
funcionamiento de la máquina, se puede evaluar a partir de los valo-
res instantáneos de las fuerzas magneto-motrices de cada una de las
fases del estator y aplicando el principio de superposición de los
efectos.

Y precisamente :

$$[13] \quad A_s = N_a (i_a + i_b + i_c)$$

Las componentes de la fuerza magneto-motriz A_s según los dos ejes de los polos (directo y en cuadratura) se obtienen con la proyección de las corrientes: i_a , i_b , i_c a lo largo de sus direcciones. Se llega de este modo a las relaciones (14), (15):

$$[14] \quad A_{sd} = N_a \left[i_a \cos \psi_a + i_b \cos \left(\psi_a - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \cos \left(\psi_a + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

$$[15] \quad A_{sq} = -N_a \left[i_a \sin \psi_a + i_b \sin \left(\psi_a - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \sin \left(\psi_a + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

A su vez las fuerzas magneto-motrices A_{sd} , A_{sq} se pueden considerar como producidas separadamente por dos corrientes i_d , i_q , y tienen valores instantáneos proporcionales a las amplitudes de los vectores resultantes de las proyecciones sobre los ejes d,q de las tres corrientes de fase del estator. Por lo tanto las corrientes i_d , i_q deberán satisfacer las relaciones (16), (17).

$$[16] \quad i_d = k_d \left[i_a \cos \psi_a + i_b \cos \left(\psi_a - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \cos \left(\psi_a + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

$$[17] \quad i_q = -k_q \left[i_a \sin \psi_a + i_b \sin \left(\psi_a - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \sin \left(\psi_a + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

y en consecuencia las fuerzas magneto-motrices A_{sd} , A_{sq} se podrán expresar como sigue:

$$[18] \quad A_{sd} = \frac{N_a}{k_d} i_d$$

$$[19] \quad A_{sq} = \frac{N_a}{k_q} i_q$$

A las constantes k_d , k_q se pueden asignar valores arbitrarios: generalmente ambos se consideran iguales a 2/3. La elección se basa sobre las condiciones mostradas en régimen por la máquina que alimenta una carga simétrica y equilibrada. En efecto la fuerza magneto-motriz generada por la corriente alterna de una fase está fija en el espacio y varía su amplitud en el tiempo sinusoidalmente. La composición de los campos de las tres fases del inducido origina una fuerza magneto-motriz que tiene a lo largo del desarrollo circunferencial del entrehierro una distribución sinusoidal con longitud de onda igual al paso polar. Ella presenta un valor máximo constante igual a 3/2 de la amplitud de los campos estacionarios componentes, y gira en el sentido del rotor. Quien permaneciera solidario con la estructura rotórica, podría ver el flujo resultante de las tres fases del estator como estacionario y fija la dirección radial a lo largo de la cual el flujo asume el máximo valor respecto al eje directo. De esta consideración deriva que asignando a las constantes k_d y k_q el valor 2/3 los valores instantáneos de la corriente de las tres fases del inducido se expresan con las relaciones:

$$i_a = \sqrt{2} I \sin [\omega t - (\delta + \varphi)]$$

$$i_b = \sqrt{2}l \operatorname{sen} \left[\omega t - (\delta + \varphi) - \frac{2\pi}{3} \right]$$

$$i_c = \sqrt{2}l \operatorname{sen} \left[\omega t - (\delta + \varphi) + \frac{2\pi}{3} \right]$$

Ellas son válidas si en el instante inicial $t=0$ el eje d está en coincidencia con el de la fase a .

Las corrientes i_d e i_q en cambio resultan respectivamente iguales a:

$$[20] \quad i_d = \text{constante} = \sqrt{2}l \cos \alpha$$

$$[21] \quad i_q = \text{constante} = \sqrt{2}l \operatorname{sen} \alpha$$

siendo $\alpha + (\delta + \varphi) = \frac{\pi}{2}$ como se observa en la fig. 26. Por lo tanto los valores de las corrientes i_d e i_q son respectivamente iguales a aquellos instantáneos de la corriente de una fase en los instantes en que la dirección del eje magnético de la misma coincide con el eje de los polos o bien con el de la zona interpolar. Es

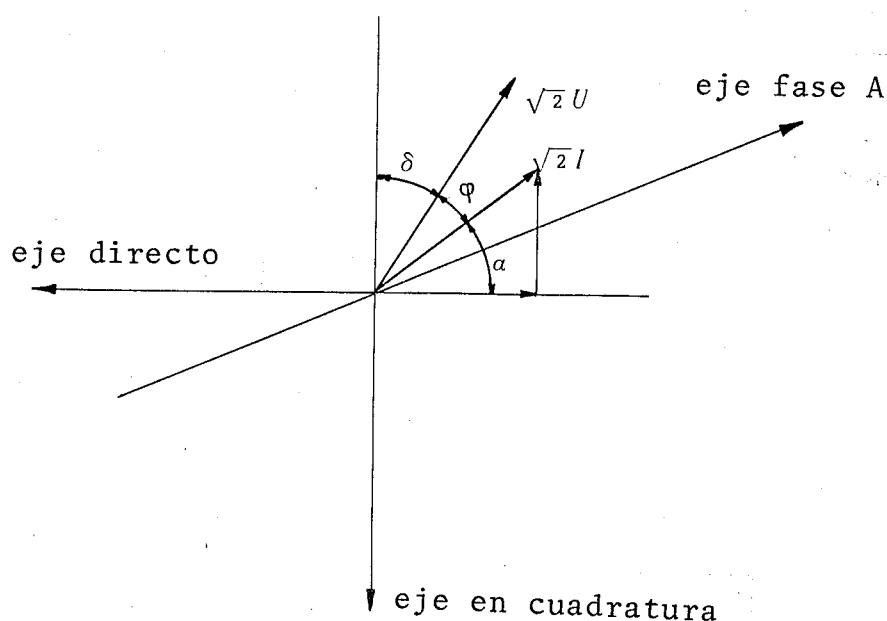


Fig. 26

necesario tener presente que durante los funcionamientos no equilibrados de la máquina, para los cuales la suma de los valores instantáneos de las corrientes de las tres fases no es igual a cero, la terna de corrientes i_a, i_b, i_c no se puede transformar en dos componentes solamente. Siguiendo un criterio análogo a aquel sobre el cual se basa la teoría de las componentes simétricas, a las corrientes de las tres fases del inducido se deben hacer corresponder otras tres corrientes: dos son las corrientes i_d e i_q antes definidas y la tercera la corriente i_0 , cuyo valor instantáneo es igual a:

$$[22] \quad i_0 = \frac{1}{3} (i_a + i_b + i_c)$$

La transformación es físicamente correcta imponiendo a la fuerza magneto-motriz de la corriente i_0 de no generar flujos que se concatenan con los arrollamientos del rotor y del estator. En efecto las corrientes i_d e i_q generan una fuerza magneto-motriz resultante que tiene valores instantáneos iguales a los de la fuerza magneto-motriz de reacción.

La transformación es conocida en la literatura técnica con la denominación:

$$d, q, 0$$

Con referencia a un funcionamiento cualquiera de la máquina, los valores instantáneos de las corrientes de las tres fases i_a, i_b, i_c , y las corrientes transformadas i_d, i_q, i_0 están ligados entre sí:

$$[23] \quad i_d = \frac{2}{3} \left[i_a \cos \psi_a + i_b \cos \left(\psi_a - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \cos \left(\psi_a + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

$$[24] \quad i_q = -\frac{2}{3} \left[i_a \sin \psi_a + i_b \sin \left(\psi_a - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \sin \left(\psi_a + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

$$[25] \quad i_0 = \frac{1}{3} (i_a + i_b + i_c) .$$

$$[26] \quad i_a = i_d \cos \psi_a - i_q \sin \psi_a + i_0$$

$$[27] \quad i_b = i_d \cos \left(\psi_a - \frac{2\pi}{3} \right) - i_q \sin \left(\psi_a - \frac{2\pi}{3} \right) + i_0$$

$$[28] \quad i_c = i_d \cos \left(\psi_a + \frac{2\pi}{3} \right) - i_q \sin \left(\psi_a + \frac{2\pi}{3} \right) + i_0$$

La transformación $d, q, 0$ aplicada a la fuerza magneto-motriz de reacción y a las corrientes de las fases del estator, puede ser claramente extendida también a las otras magnitudes de los arrollamientos del estator y precisamente a los flujos concatenados y a las tensiones. Tomemos en consideración las relaciones de los flujos de (1) a (6). Sustitúyanse en ellas los símbolos de los coeficientes de inductancia con sus expresiones en función del tiempo (apéndice I) y transformense las magnitudes $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c, i_a, i_b, i_c$, en las magnitudes $\varphi_d, \varphi_q, \varphi_0, i_d, i_q, i_0$. Operando sobre las expresiones obtenidas las oportunas reducciones a factor común, se llega a las relaciones de (29) a (34).

$$[29] \quad \varphi_d = L_{af} i_f + L_{axd} i_{xd} - L_d i_d$$

$$[30] \quad \varphi_q = L_{axq} i_{xq} - L_q i_q$$

$$[31] \quad \varphi_0 = -L_0 i_0$$

$$[32] \quad \varphi_f = L_{ff} i_f + L_{fxd} i_{xd} - \frac{3}{2} L_{fa} i_d$$

$$[33] \quad \varphi_{xd} = L_{xdf} i_f + L_{xxd} i_{xd} - \frac{3}{2} L_{xda} i_d$$

$$[34] \quad \varphi_{xq} = L_{xq} i_{xq} - \frac{3}{2} L_{xqa} i_q$$

Las inductancias L_d , L_q , L_0 se expresan:

$$L_d = L_l + \frac{3}{2} (L_{aa} + L_{aa2}) = L_l + L_{ad}$$

$$L_q = L_l + \frac{3}{2} (L_{aa} - L_{aa2}) = L_l + L_{aq}$$

$$L_0 = L_l$$

mientras las inductancias, que conservan las notaciones introducidas en el paragrafo 1, conservan el significado físico a ellas atribuido.

Las tensiones en los terminales de los arrollamientos van consideradas según las relaciones de (7) a (12). Transfórmense las magnitudes u_a , u_b , u_c en las magnitudes u_d , u_q , u_0 ; derívense respecto al tiempo los flujos φ_d , φ_q , φ_0 expresados en función de los flujos φ_a , φ_b , φ_c . Realizando en las expresiones de las magnitudes u_d , u_q , u_0 las oportunas sustituciones y reducciones a factor común, se llega a las relaciones de (35) a (37).

$$[35] \quad u_d = -r_a i_d + p \varphi_d - \omega \varphi_q$$

$$[36] \quad u_q = -r_a i_q + p \varphi_q + \omega \varphi_d$$

$$[37] \quad u_0 = -r_a i_0 + p \varphi_0$$

siendo:

$$p = \frac{d}{dt}, \quad \omega = \frac{d\psi_a}{dt}$$

Para las magnitudes de los arrollamientos del rotor se transcriben a continuación las relaciones (10), (11) y (12) enumerándolas progresivamente de (38) a (40).

$$[38] \quad u_f = r_f i_f + p \varphi_f$$

$$[39] \quad u_{xd} = r_{xd} i_{xd} + p \varphi_{xd}$$

$$[40] \quad u_{xq} = r_{xq} i_{xq} + p \varphi_{xq}$$

NOTA:

Las expresiones antes mencionadas de las tensiones d,q,0 se obtienen con el siguiente procedimiento. La transformación d,q,0 de las magnitudes tensiones y flujos de las fases del inducido a,b,c, conduce a las relaciones siguientes:

$$u_d = \frac{2}{3} \left[u_a \cos \psi_a + u_b \cos \left(\psi_a - \frac{2\pi}{3} \right) + u_c \cos \left(\psi_a + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

$$u_q = -\frac{2}{3} \left[u_a \sin \psi_a + u_b \sin \left(\psi_a - \frac{2\pi}{3} \right) + u_c \sin \left(\psi_a + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

$$u_0 = \frac{1}{3} (u_a + u_b + u_c)$$

$$\varphi_d = \frac{2}{3} \left[\varphi_a \cos \psi_a + \varphi_b \cos \left(\psi_a - \frac{2\pi}{3} \right) + \varphi_c \cos \left(\psi_a + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

$$\varphi_q = -\frac{2}{3} \left[\varphi_a \sin \psi_a + \varphi_b \sin \left(\psi_a - \frac{2\pi}{3} \right) + \varphi_c \sin \left(\psi_a + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{3} (\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c)$$

Las tensiones en los terminales de los arrollamientos del inducido se pueden también poner bajo la forma:

$$u = -ri + p\varphi$$

y resulta por lo tanto:

$$u_d = -r_a i_d + \frac{2}{3} \left[\cos \psi_a p\varphi_a + \cos \left(\psi_a - \frac{2\pi}{3} \right) p\varphi_b + \cos \left(\psi_a + \frac{2\pi}{3} \right) p\varphi_c \right]$$

$$u_q = -r_a i_q - \frac{2}{3} \left[\sin \psi_a p\varphi_a + \sin \left(\psi_a - \frac{2\pi}{3} \right) p\varphi_b + \sin \left(\psi_a + \frac{2\pi}{3} \right) p\varphi_c \right]$$

$$u_0 = -r_a i_0 + p\varphi_0$$

Derivando las expresiones de los flujos $\varphi_c, \varphi_q, \varphi_0$ se obtiene:

$$p\varphi_d = \frac{2}{3} \left[\cos \psi_a p\varphi_a + \cos \left(\psi_a - \frac{2\pi}{3} \right) p\varphi_b + \cos \left(\psi_a + \frac{2\pi}{3} \right) p\varphi_c \right] -$$

$$- \frac{2}{3} \left[\sin \psi_a \varphi_a + \sin \left(\psi_a - \frac{2\pi}{3} \right) \varphi_b + \sin \left(\psi_a + \frac{2\pi}{3} \right) \varphi_c \right] p\psi_a$$

$$p\varphi_q = -\frac{2}{3} \left[\sin \psi_a p\varphi_a + \sin \left(\psi_a - \frac{2\pi}{3} \right) p\varphi_b + \sin \left(\psi_a + \frac{2\pi}{3} \right) p\varphi_c \right] -$$

$$- \frac{2}{3} \left[\cos \psi_a \varphi_a + \cos \left(\psi_a - \frac{2\pi}{3} \right) \varphi_b + \cos \left(\psi_a + \frac{2\pi}{3} \right) \varphi_c \right] p\psi_a$$

$$p\varphi_0 = \frac{1}{3} p(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c)$$

Introduciendo en las expresiones u_d, u_q, u_0 los términos $p\psi_d, p\psi_q, p\psi_0$, se obtienen las relaciones:

$$u_d = -r_a i_d + p\varphi_d - p\psi_a \varphi_q$$

$$u_q = -r_a i_q + p\varphi_q + p\psi_a \varphi_d$$

$$u_0 = -r_a i_0 + p\varphi_0$$

El ángulo ψ_a ha sido expresado con la relación $\psi_a = \omega t$, por lo tanto:

$$p\psi_a = p(\omega t) = \omega$$

y ω es constante en todos los funcionamientos dinámicos o a régimen en los cuales la velocidad angular de rotación del rotor se pueda considerar constante.

Observaciones conclusivas.

La transformación que ha permitido escribir las relaciones de (29) a (34) y de (35) a (40) ha sido estudiada y publicada en 1928 por Park: puede ser físicamente interpretada como equivalente a la sustitución de los arrollamientos de las fases del estator con otros tres arrollamientos.

Dos son arrollamientos con conmutador y distribuidos sinusoidalmente a lo largo del entrehierro, con ejes magnéticos en cuadratura. Las magnitudes directas y en cuadratura (corrientes y tensiones) son obtenidas entre pares de escobillas, cada par se mueve solidariamente con el eje correspondiente del rotor.

El tercer arrollamiento del estator es independiente de los otros dos y no está tampoco magnéticamente acoplado con los arrollamientos del rotor.

Sobre el rotor en cambio están dispuestos tres arrollamientos como en la máquina real. Dos arrollamientos permanentemente en cortocircuito, están dispuestos simétricamente al eje directo del rotor y el otro al eje en cuadratura; ellos corresponden a las espiras de amortiguamiento de la máquina real y actúan respectivamente según los dos ejes del rotor. El tercer arrollamiento, dispuesto simétricamente al eje directo, corresponde al arrollamiento de excitación.

La transformación presentada con referencia a una máquina sincrónica trifásica anisótropa bipolar puede ser extendida a cualquier máquina sincrónica polifásica de más pares de polos, anisótropa o bien isótropa. En cada caso se esquematiza una máquina real en una, llamada a continuación "máquina modelo". Del examen de las relaciones de (1) a (12) y de (29) a (40) resultan las observaciones siguientes. En las relaciones del primer grupo los valores instantáneos de algunos de los coeficientes de inducción son variables en el tiempo y los valores instantáneos de todos los coeficientes recíprocos de inducción mutua son iguales. En las relaciones del segundo grupo los valores de todos los coeficientes de inducción son constantes y los valores de los coeficientes recíprocos de inducción mutua entre los arrollamientos del estator y del rotor son distintos. Los dos grupos de relaciones contienen un igual número de magnitudes y esto porque la máquina modelo conserva un número de arrollamientos iguales a aquellos de la máquina real. La transformación es extensible también a máquinas con más de tres fases del estator. En una máquina con n fases los n arrollamientos de los cuales dos son d y q y $(n-2)$ están desacoplados entre sí y de todos los otros tanto de estator, como de rotor. La máquina modelo entrega y absorbe del estator una potencia instantánea de valor distinto de aquel de la máquina real. En efecto si se desarrolla la relación de las potencias instantáneas de la máquina real.

$$u_a i_a + u_b i_b + u_c i_c$$

expresando las magnitudes tensiones y corrientes en función de las magnitudes transformadas $d, q, 0$ se obtiene la relación:

$$\frac{3}{2} (u_d i_d + u_q i_q) + 3 u_0 i_0$$

que claramente difiere de la suma de las potencias instantáneas asociadas a los arrollamientos d,q, 0:

$$u_d i_d + u_q i_q + u_0 i_0$$

El lector que quisiera ver las publicaciones originales de la cual se ha deducido el desarrollo de este capítulo, podrá referirse a las publicaciones indicadas en el índice bibliográfico con asterisco(*). A los trabajos originales de Park, han seguido numerosas publicaciones y extensiones del método a las otras máquinas eléctricas. En la bibliografía se han catalogado algunas de las publicaciones importantes: entre estas algunas relativamente recientes que proponen modificaciones a las relaciones fundamentales.

NOTA

Notamos que la transformación d,q,0 asigna a todas las magnitudes de un arrollamiento de la máquina modelo tales como tensiones, corrientes, flujos y fuerzas magneto-motrices la notación que es la del eje de simetría del arrollamiento, directo de los polos d, o bien en cuadratura de las zonas interpolares q. En los capítulos de la primera parte de la publicación, las componentes directas y en cuadratura de las corrientes, de las fuerzas magneto-motrices y de los flujos han sido obtenidas proyectando los vectores respectivamente sobre el eje de los polos y sobre el eje de las zonas interpolares. Las componentes directas y en cuadratura de las fuerzas electro-motrices y de las tensiones en los terminales de los arrollamientos, han sido obtenidas proyectando los vectores sobre dos ejes dispuestos en anticipo de 90° eléctricos respecto a los correspondientes ejes del rotor. La convención ha permitido considerar la componente directa de la tensión en los terminales de una fase del inducido en fase con la fuerza electro-motriz de excitación.-

3.3. CONVERSION EN VALORES RELATIVOS DE LAS MAGNITUDES Y DE LOS PARAMETROS DE LOS ARROLLAMIENTOS DE LA MAQUINA MODELO.

3.3.1 - Generalidades.

La máquina modelo obtenida con la transformación de Park, presenta en el estator tres arrollamientos d,q,0.

El número de espiras de estos arrollamientos es proporcional al de las espiras de una fase del inducido de la máquina real; los coeficientes de inductancia difieren de los correspondientes parámetros de una de las fases del inducido.

Para los arrollamientos del rotor de la máquina modelo en cambio se conservan el número de espiras y los coeficientes de inductancia de la máquina real. Las magnitudes y los parámetros que aparecen en las relaciones lineales a coeficientes constantes enumeradas de (29) a (40) son expresables en las unidades de un sistema de medida, por ejemplo del sistema Giorgi.

Los coeficientes recíprocos de inducción mutua entre los arrollamientos del estator y aquellos del rotor no tienen valores iguales. Las relaciones por lo tanto no son simétricas: para simetrizarlas y por lo tanto igualar los valores de todos los coeficientes recíprocos de mutua inducción, es necesario transferir las magnitudes y los parámetros de los arrollamientos del rotor al arrollamiento del estator dispuesto simétricamente al mismo eje.-

Con esta finalidad sin embargo no se pueden utilizar directamente las relaciones entre el número de espiras de los arrollamientos d , o bien q , y el número de espiras de un polo inductor o de un circuito auxiliar rotórico. En efecto, las distribuciones a lo largo del entrehierro de las fuerzas magneto-motrices generadas por las corrientes del inducido y por las corrientes de los circuitos rotóricos son distintas a causa de las diferentes reparticiones de los arrollamientos del estator y del rotor.

Un procedimiento que facilita la referencia de todas las magnitudes y de todos los parámetros del rotor al inducido, evaluandolos en valores relativos respecto a un sistema dimensional oportuno, será discutido a continuación.

3.3.2 - Elección de las magnitudes fundamentales y de los valores unitarios.

Hagamos referencia a una máquina real funcionando en régimen con carga simétrica y equilibrada. El sistema dimensional del cual se deben fijar las magnitudes fundamentales y las unidades, debe ser referido a las magnitudes y a los parámetros que son medibles por el inducido.

Un sistema dimensional normalmente aplicado a los circuitos en corriente alternada está constituido por tres magnitudes fundamentales:

tensión, corriente, pulsación.

A cada magnitud se puede atribuir como valor unitario el valor máximo nominal de las feses y precisamente:

$$\sqrt{2} \dot{E}_n, \quad \sqrt{2} I_n, \quad \omega = 2\pi f_n$$

Los valores unitarios de las magnitudes y de los parámetros derivados resultan:

$$\text{Impedancia} \quad \frac{\sqrt{2} E_n}{\sqrt{2} I_n} = Z_n$$

$$\text{Inductancia} \quad \frac{\sqrt{2} E_n}{\omega \sqrt{2} I_n} = L_n$$

$$\text{Flujo} \quad \frac{\sqrt{2} E_n}{\omega} = \sqrt{2} L_n I_n$$

Para las magnitudes y los parámetros de los circuitos rotóricos es necesario en cambio fijar los factores de conversión del rotor al estator. Un criterio que permite calcular fácilmente estos factores consiste en atribuir a una de las magnitudes de cada circuito rotótico, por ejemplo a la corriente, un valor congruente con aquel fijado para la corriente del circuito del inducido y de expresar los factores de conversión proporcionalmente a los valores unitarios de las corrientes. Esta determinación puede basarse sobre el examen de particulares condiciones de funcionamiento de la máquina, que serán, consideradas más adelante.

Predisponemos la máquina con el circuito inductor abierto y rotando a una velocidad ligeramente distinta de la nominal. Apliquemos a las tres fases del inducido una terna de tensiones de secuencia positiva y de frecuencia nominal. La amplitud de las tensiones debe ser regulada de tal manera que a régimen, cuando el flujo asume una disposición simétrica al eje directo, la amplitud de las corrientes sea igual a $\sqrt{2} I_n$.

La densidad del flujo en el entrehierro es igual al que, en funcionamiento en vacío, produciría la intensidad de las tensiones de fase igual a $\sqrt{2} X_{ad} I_n$, estando la máquina excitada por medio de uno cualquiera de los circuitos rotóricos dispuestos simétricamente al eje directo y todos los otros circuitos no recorridos por corriente. En modo análogo se regula la amplitud de las tensiones en régimen, de este modo cuando el flujo asume una disposición simétrica al eje en cuadratura, la amplitud de las corrientes sea igual a $\sqrt{2} I_n$. La densidad de flujo en el entrehierro es de valor igual al que, en funcionamiento en vacío, produciría la intensidad de las tensiones de fase igual a $\sqrt{2} X_{aq} I_n$, estando la máquina excitada por medio del arrollamiento auxiliar rotórico dispuesto simétricamente al eje en cuadratura y todos los otros circuitos no recorridos por corriente. Indicamos respectivamente con I_{fn} , I_{xd} , I_{xqn} las intensidades de las corrientes del arrollamiento inductor, de la espira de amortiguamiento simétrica al eje directo y de aquella simétrica al eje en cuadratura que satisfacen las condiciones de funcionamiento en vacío anteriormente consideradas. Tales intensidades I_{fn} , I_{xdn} , I_{xqn} pueden elegirse como valores unitarios para las corrientes de los respectivos circuitos rotóricos. Retomemos en consideración la máquina modelo. De las relaciones (29) y (30) resulta que cuando se hace circular separadamente en los arrollamientos d y q una corriente unidireccional de amplitud igual a $\sqrt{2} I_n$ los flujos totales concatenados por estos arrollamientos son respectivamente iguales a $\sqrt{2} L_d I_n$ o bien $\sqrt{2} L_q I_n$, mientras los correspondientes flujos de entrehierro resultan iguales a $\sqrt{2} I_{ad} I_n$ o bien $\sqrt{2} L_{aq} I_n$. Por lo tanto si para determinar los valores unitarios de las corrientes de los arrollamientos f , xd , xq de rotor de la máquina modelo, se aplica el mismo criterio enunciado para la máquina real, se llegará a un mismo valor de corriente para los arrollamientos correspondientes de las dos máquinas. Por otra parte este resultado aparece obvio cuando se considera que la transformación de Park no ha introducido modificaciones en los arrollamientos del rotor.

3.3.3 - Determinación de los valores relativos de los flujos concatenados con los arrollamientos d y q del estator y de los flujos concatenados con los circuitos rotóricos referidos al estator.

Haciendo circular separadamente en cada uno de los arrollamientos rotóricos las respectivas corrientes de intensidad unitaria, los flujos simétricos al eje directo concatenados con el arrollamiento d del estator y los flujos totales referidos al estator se pueden evaluar con las relaciones siguientes:

Arrollamiento f inductor.

$$[41] \quad \varphi_{dn} = k_{1f} L_{af} I_{fn} = \sqrt{2} L_{ad} I_n$$

$$[42] \quad \varphi_{fn} = k_{2f} L_{ff} I_{fn}$$

Arrollamiento xd auxiliar rotórico.

$$[43] \quad \varphi_{dn} = k_{1x} L_{axd} I_{xdn} = \sqrt{2} L_{ad} I_n$$

$$[44] \quad \varphi_{xdn} = k_{2x} L_{xxd} I_{xdn}$$

Y así k_{1f} , k_{2f} , k_{1x} , k_{2x} son las constantes que permiten referir los flujos de los circuitos rotóricos al arrollamiento d del estator. Los flujos simétricos al eje directo concatenados con el arrollamiento d del estator y producidos separadamente por las dos corrientes unitarias rotóricas, tienen igual intensidad; los valores de ambos flujos, referidos al estator, son por definición de las corrientes I_{fn} , I_{xdn} iguales a $\sqrt{2} L_{ad} I_n$.

Las relaciones de (29) a (33), de los flujos totales concatenados con el arrollamiento d del estator, con el arrollamiento f inductor y con el arrollamiento auxiliar rotórico xd, divididas por la intensidad que cada uno de estos flujos asume cuando se excita solamente el circuito afectado con la correspondiente corriente de valor unitario dan las siguientes relaciones:

$$[45] \quad \frac{\varphi_d}{\varphi_{dn}} = \frac{1}{k_{1f}} \frac{I_f}{I_{fn}} + \frac{1}{k_{1x}} \frac{I_{xd}}{I_{xdn}} - \sqrt{2} \frac{L_{da} I_n}{\varphi_{dn}} \frac{I_d}{\sqrt{2} I_n}$$

$$[46] \quad \frac{\varphi_f}{\varphi_{fn}} = \frac{1}{k_{2f}} \frac{I_f}{I_{fn}} + \frac{L_{fxd} I_{xdn}}{k_{2f} L_{ff} I_{fn}} \frac{I_{xd}}{I_{xdn}} - \frac{3}{2} \sqrt{2} \frac{L_{fa} I_n}{\varphi_{fn}} \frac{I_d}{\sqrt{2} I_n}$$

$$[47] \quad \frac{\varphi_{xd}}{\varphi_{xdn}} = \frac{L_{xdf} I_{fn}}{k_{2x} L_{xxd} I_{xdn}} \frac{I_f}{I_{fn}} + \frac{1}{k_{2x}} \frac{I_{xd}}{I_{xdn}} - \frac{3}{2} \sqrt{2} \frac{L_{xda} I_n}{\varphi_{xdn}} \frac{I_d}{\sqrt{2} I_n}$$

Las intensidades unitarias de las corrientes han sido definidas para todos los circuitos de manera congruente y su determinación llevada a cabo considerando despreciable la saturación del hierro. Esta condición, como se ha observado en el paragrafo 3.1, permite atribuir a los coeficientes de auto y mutua inducción valores independientes de las intensidades de los flujos. Además en las relaciones (45) a (47) los valores de los coeficientes de inducción mutua recíprocos son iguales porque los flujos están todos referidos al arrollamiento d del estator. Por lo tanto a las relaciones (45), (46), (47) se puede imponer las siguientes condiciones:

$$[48] \quad \frac{1}{k_{1f}} = \frac{3}{2} \sqrt{2} \frac{L_{fa} I_n}{\varphi_{fn}}$$

$$[49] \quad \frac{1}{k_{1x}} = \frac{3}{2} \sqrt{2} \frac{L_{xda} I_n}{\varphi_{xdn}}$$

$$[50] \quad \frac{L_{fxd} I_{xdn}}{k_{2f} L_{ff} I_{fn}} = \frac{L_{xdf} I_{fn}}{k_{2x} L_{xxd} I_{xdn}}$$

De las relaciones (41), (42), (43), (44) se pueden obtener los valores de las constantes k:

$$[51] \quad \frac{1}{k_{1f}} = \frac{L_{af} I_{fn}}{\varphi_{dn}}$$

$$[52] \quad \frac{1}{k_{2f}} = \frac{L_{ff} l_{fn}}{\Phi_{fn}}$$

$$[53] \quad \frac{1}{k_{1x}} = \frac{L_{axd} l_{xdn}}{\Phi_{dn}}$$

$$[54] \quad \frac{1}{k_{2x}} = \frac{L_{xxd} l_{xdn}}{\Phi_{xdn}}$$

Mientras de las relaciones (48), (49), (50), (53) se obtienen los valores de las relaciones entre los flujos totales concatenados con cada uno de los dos arrollamientos rotóricos y el flujo total concatenado con el arrollamiento d del estator:

$$[55] \quad \frac{\Phi_{fn}}{\Phi_{dn}} = \left(\frac{\frac{3}{2} \sqrt{2} l_n}{l_{fn}} \right)$$

$$[56] \quad \frac{\Phi_{xdn}}{\Phi_{dn}} = \left(\frac{\frac{3}{2} \sqrt{2} l_n}{l_{xdn}} \right)$$

Del conjunto de las relaciones arriba indicadas y realizando en ellas algunas sustituciones por brevedad no indicadas resultan los valores de los parámetros indicados en las fórmulas (45), (46), (47):

$$[57] \quad \frac{1}{k_{1f}} = \frac{3}{2} \sqrt{2} \frac{L_{fa} l_n}{\Phi_{fn}} = \frac{L_{af} l_{fn}}{\sqrt{2} L_{ad} l_n} = \frac{L_{ad}}{L_{ad}} = 1$$

$$[58] \quad \frac{1}{k_{1x}} = \frac{3}{2} \sqrt{2} \frac{L_{xda} l_n}{\Phi_{xdn}} = \frac{L_{axd} l_{xdn}}{\sqrt{2} L_{ad} l_n} = \frac{L_{ad}}{L_{ad}} = 1$$

$$[59] \quad \frac{1}{k_{2f}} = \frac{L_{ff} l_{fn}}{\sqrt{2} L_{ad} l_n} \left(\frac{l_{fn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} l_n} \right)$$

$$[60] \quad \frac{1}{k_{2x}} = \frac{L_{xxd} l_{xdn}}{\sqrt{2} L_{ad} l_n} \left(\frac{l_{xdn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} l_n} \right)$$

$$[61] \quad \frac{L_{fxd} l_{xdn}}{k_{2f} L_{ff} l_{fn}} = \frac{L_{xdf} l_{fn}}{k_{2x} L_{xxd} l_{xdn}} = \frac{L_{fxd} l_{xdn}}{\sqrt{2} L_{ad} l_n} \left(\frac{l_{fn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} l_n} \right) =$$

$$[62] \quad = \frac{L_{xdf} l_{fn}}{\sqrt{2} L_{ad} l_n} \left(\frac{l_{xdn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} l_n} \right)$$

$$[63] \quad \frac{\sqrt{2} L_d l_n}{\Phi_{dn}} = \frac{\sqrt{2} L_d l_n}{\sqrt{2} L_{ad} l_n} = \frac{L_d}{L_{ad}}$$

Introduciendo en las relaciones (45), (46), (47) aquellas enumeradas de (57) a (63) se obtiene:

$$[64] \quad \frac{\varphi_d}{\varphi_{dn}} = \frac{L_{af} l_{fn}}{\sqrt{2} L_{ad} l_n} \frac{i_f}{l_{fn}} + \frac{L_{axd} l_{xdn}}{\sqrt{2} L_{ad} l_n} \frac{i_{xd}}{l_{xdn}} - \frac{L_d}{L_{ad}} \frac{i_d}{\sqrt{2} l_n}$$

$$[65] \quad \frac{\varphi_f}{\varphi_{fn}} = \frac{L_{ff} l_{fn}}{\sqrt{2} L_{ad} l_n} \left(\frac{l_{fn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} l_n} \right) \frac{i_f}{l_{fn}} + \\ + \frac{L_{fxd} l_{xdn}}{\sqrt{2} L_{ad} l_n} \left(\frac{l_{fn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} l_n} \right) \frac{i_{xd}}{l_{xdn}} - \frac{L_{ad}}{L_{ad}} \frac{i_d}{\sqrt{2} l_n}$$

$$[66] \quad \frac{\varphi_{xd}}{\varphi_{xdn}} = \frac{L_{xd} l_{fn}}{\sqrt{2} L_{ad} l_n} \left(\frac{l_{xdn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} l_n} \right) \frac{i_f}{l_{fn}} + \\ + \frac{L_{xxd} l_{xdn}}{\sqrt{2} L_{ad} l_n} \left(\frac{l_{xdn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} l_n} \right) \frac{i_{xd}}{l_{xdn}} - \frac{L_{ad}}{L_{ad}} \frac{i_d}{\sqrt{2} l_n}$$

Si examinamos las tres expresiones, también prescindiendo del procedimiento seguido para obtenerlas, se pueden hacer las siguientes observaciones.

La primera relación expresa el valor relativo del flujo total concatenado con el arrollamiento d del estator, respecto al valor unitario $\sqrt{2} L_{ad} l_n$. Los términos que la componen en efecto son adimensionales: cada uno inversamente proporcional al flujo $\sqrt{2} L_{ad} l_n$; cada corriente expresada en valor relativo al correspondiente valor unitario. Las otras dos relaciones expresan los flujos totales concatenados respectivamente con el arrollamiento f inductor y con la espira de amortiguamiento xd: ambas transferidas al arrollamiento d del estator y referidas al valor unitario $\sqrt{2} L_{ad} l_n$. Los términos de estas relaciones son adimensionales: cada uno inversamente proporcional al flujo $\sqrt{2} L_{ad} l_n$; cada corriente expresada en valor relativo al correspondiente valor unitario. Los términos referidos a los parámetros de auto y mutua inducción de los arrollamientos rotóricos, contienen factores que los transfieren al estator. La relación entre el valor unitario de la corriente de cada arrollamiento rotórico es $3/2$ del valor máximo de la corriente nominal de las fases del inducido de la máquina real, puede ser considerado como correspondiente a una relación de espiras.

Se llama nuevamente la atención sobre los valores de los coeficientes (57) y (58), referidos respectivamente a los coeficientes de mutua inducción del arrollamiento d del estator con el arrollamiento inductor y con la espira de amortiguamiento. Los valores relativos de los dos coeficientes son iguales a la unidad. En efecto los flujos de entrehierro producidos separadamente por las corrientes unitarias del inductor y de la espira de amortiguamiento (por el criterio con el cual se han elegido las intensidades de estas corrientes) son iguales al valor introducido como base de las expresiones.

siones de (64) a (66)

En el paragrafo 3.3.2, que se refiere a la elección del sistema dimensional de las magnitudes y los parámetros medibles del inducido se ha obtenido como valor unitario de los flujos:

$$\sqrt{2} L_n I_n = \sqrt{2} \frac{E_n}{\omega_n}$$

Tal valor no coincide con aquel que se ha adoptado como valor base para obtener las relaciones antes mencionadas. Es decir:

$$\sqrt{2} L_{ad} I_n = \sqrt{2} \frac{X_{ad} I_n}{\omega_n}$$

Deseando transformar las relaciones (64), (65), (66) de manera de conservar los valores unitarios empleados normalmente para los arrollamientos del estator, es necesario multiplicar todos los términos de las relaciones por el factor:

$$\frac{\sqrt{2} L_{ad} I_n}{\sqrt{2} L_n I_n} = \frac{L_{ad}}{L_n}$$

Este procedimiento lleva a las relaciones siguientes:

$$[67] \quad \frac{\varphi_d}{\varphi_{dn}} = \frac{L_{ad}}{L_n} \frac{i_f}{I_{fn}} + \frac{L_{ad}}{L_n} \frac{i_{xd}}{I_{xdn}} - \frac{L_d}{L_n} \frac{i_d}{\sqrt{2} I_n}$$

$$[68] \quad \frac{\varphi_f}{\varphi_{fn}} = \frac{L_{ff} I_{fn}}{\sqrt{2} L_n I_n} \left(\frac{I_{fn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} I_n} \right) \frac{i_f}{I_{fn}} + \frac{L_{fxd} I_{xdn}}{\sqrt{2} L_n I_n} \left(\frac{I_{fn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} I_n} \right) \frac{i_{xd}}{I_{xdn}} - \frac{L_{ad}}{L_n} \frac{i_d}{\sqrt{2} I_n}$$

$$[69] \quad \frac{\varphi_{xd}}{\varphi_{xdn}} = \frac{L_{xdf} I_{fn}}{\sqrt{2} L_n I_n} \left(\frac{I_{xdn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} I_n} \right) \frac{i_{xd}}{I_{xdn}} + \frac{L_{xxd} I_{xdn}}{\sqrt{2} L_n I_n} \left(\frac{I_{xdn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} I_n} \right) \frac{i_{xd}}{I_{xdn}} - \frac{L_{ad}}{L_n} \frac{i_d}{\sqrt{2} I_n}$$

Los flujos, las corrientes y los parámetros de las relaciones (67), (68), (69) están expresados en valores relativos respecto a aquellos unitarios elegidos en el paragrafo 3.3.2.

Las consideraciones para los flujos dispuestos simetricamente al eje directo, se pueden extender también a los flujos dispuestos simetricamente al eje en cuadratura. Debemos recordar que la máquina considerada tiene jaula amortiguadora constituida por dos barras por polo; por lo tanto simétricamente al eje en cuadratura del espacio interpolar actúa solamente la espira amortiguadora constituida por dos barras: una por cada semipolo contiguo. De las relaciones (30) y (34) se pueden obtener (con un procedimiento análogo a aquel descrito en detalle por las relaciones (29), (32), (33)) dos relaciones formalmente correspondientes a la (67) y (69). Precisamente:

$$[70] \quad \frac{\varphi_q}{\varphi_{qn}} = \frac{L_{aq}}{L_n} \frac{i_{xq}}{I_{xqn}} - \frac{L_q}{L_n} \frac{i_q}{\sqrt{2} I_n}$$

$$[71] \quad \frac{\varphi_{xq}}{\varphi_{xqn}} = \frac{L_{xxq} l_{xqn}}{\sqrt{2} L_n l_n} \left(\frac{l_{xqn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} l_n} \right) \frac{i_{xq}}{l_{xqn}} - \frac{L_{aq}}{L_n} \frac{i_q}{\sqrt{2} l_n}$$

Los valores relativos de las magnitudes y de los parámetros, contenidos en las relaciones (70) y (71) se obtienen con expresiones formalmente iguales a aquellas formuladas para los correspondientes valores directos, sustituyendo en ellas el símbolo d por el símbolo q.

La descripción antes mencionada es válida para las máquinas con dos barras amortiguadoras por polo; todavía puede ser fácilmente extendida a cualquier otro circuito auxiliar que exista o se forme temporalmente desde el inicio del cortocircuito en el hierro del rotor escasamente laminado. Debe destacarse la necesidad para cada espira auxiliar de fijar un valor unitario de la corriente correspondiente a ella y estudiar la interacción de cada espira auxiliar con todos los otros circuitos del rotor y estator dispuestos simétricamente al eje de simetría de la espira misma. En los estudios que no requieran evaluar rigurosamente las magnitudes de cada uno de los circuitos auxiliares rotóricos, es posible sustituir su conjunto con dos espiras equivalentes: una dispuesta simétricamente al eje directo, la otra simétricamente al eje en cuadratura y considerar ambas espiras recorridas por corrientes ficticias. El valor unitario para las corrientes de las dos espiras puede ser elegido siguiendo el método descrito en el parágrafo 3.3.2. Aplicando tal criterio a las máquinas de construcción normal, los coeficientes recíprocos de mutua inducción entre las espiras equivalentes dispuestas simétricamente al eje directo y el circuito inductor, asumen frecuentemente valores relativos poco diferentes de aquellos de las reactancias de reacción de armadura directa.

El arrollamiento 0 del estator de la máquina ideal de Park está recorrido por corriente solamente en los funcionamientos desequilibrados. El flujo del arrollamiento se evalúa con la relación (31).

$$\varphi_0 = -L_0 i_0$$

Refiriendo el flujo φ_0 al valor unitario del flujo del estator se obtiene la relación:

$$[72] \quad \frac{\varphi_0}{\varphi_n} = -\frac{L_0}{L_n} \frac{i_0}{\sqrt{2} l_n}$$

3.3.4 - Valores relativos de las magnitudes y de los parámetros de los arrollamientos d, q, o y de los circuitos rotóricos referidos al inducido.-

Se hace referencia a las magnitudes y a la unidad elegida en el parágrafo 3.3.2 y a las relaciones obtenidas en el parágrafo 3.3.3.

Los valores relativos de las magnitudes y de los parámetros de los arrollamientos del estator y del rotor de la máquina modelo, referidos todos al estator, se pueden determinar con las relaciones que se indican a continuación.

Flujos concatenados con los arrollamientos d,q, o del estator.

$$\dot{\Phi}_d = \frac{\dot{\Phi}_d}{\sqrt{2} L_n I_n} = \Phi_d \frac{\omega}{E_n}$$

$$\dot{\Phi}_q = \frac{\dot{\Phi}_q}{\sqrt{2} L_n I_n} = \Phi_q \frac{\omega}{E_n}$$

$$\dot{\Phi}_0 = \frac{\dot{\Phi}_0}{\sqrt{2} L_n I_n} = \Phi_0 \frac{\omega}{E_n}$$

Flujos concatenados con los arrollamientos del rotor(*)

$$\dot{\Phi}_f = \frac{\Phi_f}{\Phi_{fn}} \cdot \frac{\sqrt{2} L_{ad} I_n}{\sqrt{2} L_n I_n} = \Phi_f \left(\frac{I_{fn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} I_n} \right) \cdot \frac{\omega}{E_n}$$

$$\dot{\Phi}_{xd} = \frac{\Phi_{xd}}{\Phi_{xdn}} \cdot \frac{\sqrt{2} L_{ad} I_n}{\sqrt{2} L_n I_n} = \Phi_{xd} \left(\frac{I_{xdn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} I_n} \right) \cdot \frac{\omega}{E_n}$$

$$\dot{\Phi}_{xq} = \frac{\Phi_{xq}}{\Phi_{xqn}} \cdot \frac{\sqrt{2} L_{aq} I_n}{\sqrt{2} L_n I_n} = \Phi_{xq} \left(\frac{I_{xqn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} I_n} \right) \cdot \frac{\omega}{E_n}$$

(*) Los valores relativos de los flujos $\Phi_f, \Phi_{nd}, \Phi_{nq}$ derivan directamente de las relaciones (55), (56) y (41)

Tensiones de los arrollamientos d,q, o del estator

$$\dot{u}_d = \frac{u_d}{\sqrt{2} E_n}$$

$$\dot{u}_q = \frac{u_q}{\sqrt{2} E_n}$$

$$\dot{u}_0 = \frac{u_0}{\sqrt{2} E_n}$$

Tensiones de los arrollamientos del rotor (**)

$$\dot{e}_f = e_f \left(\frac{I_{fn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} I_n} \right) \frac{1}{\sqrt{2} E_n}$$

$$\dot{e}_{xd} = e_{xd} \left(\frac{I_{xdn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} I_n} \right) \frac{1}{\sqrt{2} E_n}$$

$$\dot{e}_{xq} = e_{xq} \left(\frac{I_{xqn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} I_n} \right) \frac{1}{\sqrt{2} E_n}$$

(**) Los valores relativos de las tensiones e_f, e_{xd}, e_{xq} derivan directamente de las relaciones de los respectivos flujos.

Corrientes de los arrollamientos d,q, o del estator

$$i_d = i_d \frac{1}{\sqrt{2} l_n}$$

$$i_q = i_q \frac{1}{\sqrt{2} l_n}$$

$$i_0 = i_0 \frac{1}{\sqrt{2} l_n}$$

Corriente de los arrollamientos del rotor.

$$i_f = i_f \frac{1}{l_{fn}}$$

$$i_{xd} = i_{xd} \frac{1}{l_{xdn}}$$

$$i_{xq} = i_{xq} \frac{1}{l_{xqn}}$$

Inductancias y resistencias medibles del estator.

- Inductancia sincrónica directa y autoinductancia del arrollamiento d:
- Inductancia sincrónica en cuadratura y autoinductancia del arrollamiento q:
- Inductancia de dispersión directa del inducido y del arrollamiento d:
- Inductancia de dispersión en cuadratura del inducido y del arrollamiento q:
- Inductancia de reacción de armadura directa e inductancia mutua entre los arrollamientos d,f, xd:
- Inductancia de reacción de armadura en cuadratura e inductancia mutua entre los arrollamientos q, xq:
- Autoinductancia del arrollamiento 0:
- Resistencia de una fase del inducido y de los arrollamientos d,q,0:

$$i_d = L_d \frac{1}{L_n}$$

$$i_q = L_q \frac{1}{L_n}$$

$$i_{ld} = L_{ld} \frac{1}{L_n}$$

$$i_{lq} = L_{lq} \frac{1}{L_n}$$

$$i_{ad} = L_{ad} \frac{1}{L_n}$$

$$i_{aq} = L_{aq} \frac{1}{L_n}$$

$$i_0 = L_0 \frac{1}{L_n}$$

$$i_a = R_a \frac{1}{Z_n}$$

Inductancias y resistencias de los arrollamientos del rotor.

$$i_{ff} = \frac{L_{ff} l_{fn}}{\sqrt{2} L_n l_n} \left(\frac{l_{fn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} l_n} \right) = \frac{3}{2} L_{ff} \left(\frac{l_{fn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} l_n} \right)^2 \cdot \frac{1}{L_n}$$

$$\begin{aligned}
i_{xxd} &= \frac{L_{xxd} l_{xdn}}{\sqrt{2} L_n l_n} \left(\frac{l_{xdn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} l_n} \right) = \frac{3}{2} L_{xxd} \left(\frac{l_{xdn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} l_n} \right)^2 \cdot \frac{1}{L_n} \\
i_{xxq} &= \frac{L_{xxq} l_{xqn}}{\sqrt{2} L_n l_n} \left(\frac{l_{xqn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} l_n} \right) = \frac{3}{2} L_{xxq} \left(\frac{l_{xqn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} l_n} \right)^2 \cdot \frac{1}{L_n} \\
i_f &= \frac{3}{2} R_f \left(\frac{l_{fn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} l_n} \right)^2 \cdot \frac{1}{Z_n} \\
i_{xd} &= \frac{3}{2} R_{xd} \left(\frac{l_{xdn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} l_n} \right)^2 \cdot \frac{1}{Z_n} \\
i_{xq} &= \frac{3}{2} R_{xq} \left(\frac{l_{xqn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} l_n} \right)^2 \cdot \frac{1}{Z_n}
\end{aligned}$$

Inductancias mutuas

$$\begin{aligned}
i_{af} &= i_{fa} = L_{ad} \frac{1}{L_n} = i_{ad} \\
i_{axd} &= i_{xda} = L_{ad} \frac{1}{L_n} = i_{ad} \\
i_{axq} &= i_{xqa} = L_{aq} \frac{1}{L_n} = i_{aq} \\
i_{fxd} &= i_{xdf} = \frac{L_{fxd} l_{xdn}}{\sqrt{2} L_n l_n} \left(\frac{l_{fn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} l_n} \right) = \frac{L_{xdf} l_{fn}}{\sqrt{2} L_n l_n} \left(\frac{l_{xdn}}{\frac{3}{2} \sqrt{2} l_n} \right) = \\
&= \frac{3}{2} L_{fxd} \left[\frac{l_{xdn} l_{fn}}{\left(\frac{3}{2} \sqrt{2} l_n \right)^2} \right] \cdot \frac{1}{L_n} \cong i_{ad}
\end{aligned}$$

3.4 - FLUJOS Y TENSIONES DE LOS ARROLLAMIENTOS EN LA MAQUINA MODELO: EXPRESIONES EN VALORES RELATIVOS.

Las relaciones de los flujos totales concatenados con los arrollamientos de la máquina modelo de (29), a (34), pueden ser transformados en correspondencia entre magnitudes y parámetros indicados en valores relativos. Con tal sentido hasta emplear las relaciones que hemos obtenido en el parágrafo 3.3.3. Se llega de este modo a las expresiones transcritas a continuación para mayor comodidad.

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}_d &= i_{ad} \dot{i}_f + i_{ad} \dot{i}_{xd} - i_d \dot{i}_d \\
\dot{\Phi}_q &= i_{aq} \dot{i}_{xq} - i_q \dot{i}_q \\
\dot{\Phi}_0 &= -i_0 \dot{i}_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_f &= \dot{l}_{ff} i_f + \dot{l}_{ad} i_{xd} - \dot{l}_{ad} i_d \\ \dot{\Phi}_{xd} &= \dot{l}_{ad} i_f + \dot{l}_{xxd} i_{xd} - \dot{l}_{ad} i_d \\ \dot{\Phi}_{xq} &= \dot{l}_{xxq} i_{xq} - \dot{l}_{aq} i_q\end{aligned}$$

De las reactancias sincrónicas de la máquina real derivan los coeficientes de autoinducción l_d y l_q de los arrollamientos d,q, del estator.

Cada uno de ellos (por definición de la reactancia sincrónica) puede ser considerado igual a la suma de dos coeficientes, los cuales dependen a su vez de las reactancias de dispersión y de reacción de armadura:

$$\begin{aligned}l_d &= l_{ld} + l_{ad} \\ l_q &= l_{lq} + l_{aq}\end{aligned}$$

La descomposición se puede extender también a los coeficientes de autoinducción de los otros arrollamientos que actúan simétricamente a los dos ejes de la máquina. En efecto, excitando cada uno de los distintos arrollamientos rotóricos se obtienen los flujos totales, a su vez descomponibles respecto al arrollamiento del estator dispuesto simétricamente al mismo eje, en flujos dispersos y flujos útiles. La simbología utilizada en este capítulo permite introducir las relaciones:

$$\begin{aligned}\dot{l}_{ff} &= \dot{l}_{lf} + \dot{l}_{af} = \dot{l}_{lf} + \dot{l}_{ad} \\ \dot{l}_{xxd} &= \dot{l}_{lxd} + \dot{l}_{axd} = \dot{l}_{lxd} + \dot{l}_{ad} \\ \dot{l}_{xxq} &= \dot{l}_{lxq} + \dot{l}_{axq} = \dot{l}_{lxq} + \dot{l}_{aq}\end{aligned}$$

En base a estas, las relaciones de los flujos totales concatenados con los arrollamientos de la máquina modelo se pueden poner bajo esta forma:

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_d &= \dot{l}_{ad} (\dot{i}_f + \dot{i}_{xd} - \dot{i}_d) - \dot{l}_{ld} \dot{i}_d \\ \dot{\Phi}_q &= \dot{l}_{aq} (\dot{i}_{xq} - \dot{i}_q) - \dot{l}_{lq} \dot{i}_q \\ \dot{\Phi}_f &= \dot{l}_{lf} \dot{i}_f + \dot{l}_{ad} (\dot{i}_f + \dot{i}_{xd} - \dot{i}_d) \\ \dot{\Phi}_{xd} &= \dot{l}_{lxd} \dot{i}_{xd} + \dot{l}_{ad} (\dot{i}_f + \dot{i}_{xd} - \dot{i}_d) \\ \dot{\Phi}_{xq} &= \dot{l}_{lxq} \dot{i}_{xq} + \dot{l}_{aq} (\dot{i}_{xq} - \dot{i}_q)\end{aligned}$$

Las relaciones de las tensiones en bornes de los arrollamientos de la máquina modelo de (35) a (40), a continuación se pueden transformar en relaciones entre magnitudes y parámetros expresados en valor relativo. Con tal sentido basta emplear las relaciones de los flujos de (73) a (77). Se llega entonces a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}[78] \quad \dot{u}_d &= -\dot{i}_a \dot{i}_d + p \dot{\Phi}_d - \dot{\omega} \dot{\Phi}_q = -\dot{i}_a \dot{i}_d + p [\dot{l}_{ad} (\dot{i}_f + \dot{i}_{xd} - \dot{i}_d) - \\ &\quad - \dot{l}_{ld} \dot{i}_d] - \frac{\omega}{\omega_n} [\dot{l}_{aq} (\dot{i}_{xq} - \dot{i}_q) - \dot{l}_{lq} \dot{i}_q]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[79] \quad \dot{u}_q &= -\dot{i}_a \dot{i}_q + p \dot{\Phi}_q + \dot{\omega} \dot{\Phi}_d = -\dot{i}_a \dot{i}_q + p [\dot{l}_{aq} (\dot{i}_{xq} - \dot{i}_q) - \\ &\quad - \dot{l}_{lq} \dot{i}_q] + \frac{\omega}{\omega_n} [\dot{l}_{ad} (\dot{i}_f + \dot{i}_{xd} - \dot{i}_d) - \dot{l}_{ld} \dot{i}_d]\end{aligned}$$

$$[80] \quad \dot{u}_0 = -\dot{r}_a i_0 + p \dot{\phi}_0 = -\dot{r}_a i_0 - p \dot{l}_0 i_0$$

$$[81] \quad \dot{e}_f = \dot{r}_f i_f + p \dot{\phi}_f = \dot{r}_f i_f + p [\dot{l}_{ad} (i_f + i_{xd} - i_d) + \dot{l}_{lf} i_f]$$

$$[82] \quad 0 = \dot{r}_{xd} i_{xd} + p \dot{\phi}_{xd} = \dot{r}_{xd} i_{xd} + p [\dot{l}_{ad} (i_f + i_{xd} - i_d) + \dot{l}_{ld} i_{xd}]$$

$$[83] \quad 0 = \dot{r}_{xq} i_{xq} + p \dot{\phi}_{xq} = \dot{r}_{xq} i_{xq} + p [\dot{l}_{aq} (i_{xq} - i_q) + \dot{l}_{lxq} i_{xq}]$$

Observaciones finales

El conjunto de las relaciones de los flujos concatenados por los arrollamientos de la máquina modelo y de las relaciones de las tensiones en bornes de los arrollamientos constituyen dos sistemas de ecuaciones a coeficientes constantes.

En los casos en que la rotación del rotor es a velocidad constante las tensiones en bornes de los arrollamientos están expresadas por ecuaciones lineales. Resolviendo estos dos sistemas se determinan valores y variación de las tensiones y de las corrientes de todos los arrollamientos del estator y del rotor. Deben no obstante ser conocidos los valores de los parámetros y fijados los valores que asumen las distintas magnitudes durante las condiciones de funcionamiento en el contorno.

En los funcionamientos dinámicos cuando el rotor gira a velocidad constante, la primitiva de cada corriente resulta una combinación lineal entre una función unidireccional y una función alterna de frecuencia fundamental. Las amplitudes de estas corrientes decrecen exponencialmente según constantes de tiempo que dependen de las resistencias de los arrollamientos. En particular la resistencia de los arrollamientos del estator determina la constante de tiempo de la corriente alterna y las resistencias de los arrollamientos del rotor influyen sobre las constantes de tiempo de las corrientes unidireccionales.

Examinando oportunamente las ecuaciones correspondientes a las tensiones de los arrollamientos d y q del estator se puede llegar a las siguientes conclusiones.

- Los términos $\dot{\omega} \phi_d, \dot{\omega} \phi_q$ introducen en las expresiones de los valores instantáneos de las tensiones los efectos de la rotación del rotor y de los pares de escobillas en las cuales terminan los arrollamientos del estator. De estas tensiones dependen las amplitudes de las corrientes unidireccionales.
- Los términos $p \dot{\phi}_d, p \dot{\phi}_q$ introducen en las expresiones de los valores instantáneos de las tensiones los efectos de las variaciones de los flujos.

De dichas tensiones dependen las amplitudes de las corrientes alternas, que compensan en el instante inicial de los funcionamientos dinámicos las bruscas variaciones sufridas por las amplitudes de las corrientes unidireccionales. Para transferir las corrientes de los arrollamientos de la máquina modelo a aquellos de la máquina real, es necesario recordar que las corrientes unidireccionales y alternas de los arrollamientos del rotor no sufren ninguna modificación. Para los arrollamientos del estator en cambio, las corrientes unidireccionales se transforman en las corrientes alternas de las tres fases y aquellas alternas en las corrientes de las tres fases unidireccionales y armónicas de segundo orden. Estas transformaciones se obtienen aplicando las relaciones (26), (27), (28) del parágrafo 3.2.