

FUNCIONAMIENTO EN CORTOCIRCUITO DE LAS MAQUINAS SINCRONICAS

CC-04.PDF

4	Funcionamiento en cortocircuito de las maquinas sincronicas - Valores de las magnitudes de la maquina modelo y de las correspondientes de la maquina real	115 / 156
----------	--	------------------

4 - FUNCIONAMIENTO EN CORTOCIRCUITO DE LAS MAQUINAS SINCRONICAS - VALORES DE LAS MAGNITUDES DE LA MAQUINA MODELO Y DE LAS CORRESPONDIENTES DE LA MAQUINA REAL.

4.1 Generalidades

Examínese una máquina sincrónica y el funcionamiento siguiente al establecimiento del cortocircuito trifásico aislado de tierra en los terminales del arrollamiento del estator.

Supóngase que durante este funcionamiento la velocidad del rotor no sufra variaciones apreciables. Desprecie los fenómenos debidos a la saturación del hierro y también el valor de la resistencia de los arrollamientos del estator. Supóngase también de valor despreciable la impedancia de la falla, vista en el punto en el cual se produce respecto de los terminales de la máquina.-

El instante inicial del cortocircuito puede ser considerado tanto como final del funcionamiento en régimen, como inicial del funcionamiento en cortocircuito; será por lo tanto indicado con el símbolo $t=0$ o bien $t = 0+$ según se refiera a un funcionamiento o a otro.

Supóngase que la máquina antes del cortocircuito funcionara en carga y se conocen los valores de las tensiones de fase de inducido, de las corrientes erogadas y de su ángulo de fase, respectivamente indicadas con los símbolos.

$$\sqrt{2} U, \sqrt{2} I, < \varphi$$

En el instante $t = 0$ del funcionamiento antes indicado el flujo dispuesto simétricamente al eje directo concatenado con el circuito inductor, es aquel que resulta de la composición de los campos de inductor y de reacción longitudinal de inducido, ambos rotantes en sincronismo. La amplitud del flujo queda invariable en el tiempo: la corriente en el circuito inductor es de valor constante, las corrientes en los circuitos auxiliares rotoricos, simétricamente dispuestos respecto del eje directo, son de valor nulo. En el mismo instante el flujo simétrico respecto al eje en cuadratura que se concatena con los circuitos auxiliares rotoricos dispuestos simétricamente al mismo eje es el único campo de reacción transversal de inducido y rotante en sincronismo con el rotor.

También la amplitud de dicho flujo queda invariable en el tiempo y las corrientes en los circuitos auxiliares rotoricos son de valor nulo.

En el instante inicial del cortocircuito los flujos concatenados con los circuitos rotoricos simétricos respecto a los dos ejes no varían, así tampoco las corrientes de inductor y de inducido. Desde el inicio del funcionamiento dinámico el campo resultante debe ser separado en dos partes: uno rotante en sincronismo con el rotor (correspondiente al nuevo funcionamiento); el otro unidireccional (de amplitud que en el origen es igual y contraria a la variación sufrida por el campo rotante) de manera que el campo resultante es rotante y su valor pulsante.-

En los instantes sucesivos se produzcan en los circuitos cerrados

rotoricos (auxiliares y de inductor) fuerzas magnetomotrices que tenderán aún a conservar los flujos por ellos inicialmente concatenados. A tal conservación contrastan las disipaciones de energía (asociadas a las corrientes en los circuitos cerrados) que se presentan en cada caso como resistencias propias. En cada circuito cerrado, al desarrollarse estos fenómenos físicos y desde el instante en que se establece la falla $t = 0+$ circulan corrientes unidireccionales y corrientes alternas.

En los arrollamientos de las fases de inducido, circula en particular:

- a) - una corriente alterna o simétrica que puede ser descompuesta en una componente directa y una componente en cuadratura. La componente directa es la suma de una corriente sostenida y de dos componentes que decrecen exponencialmente (la que se extingue mas rápidamente se denomina subtransitoria y la otra transitoria). La componente en cuadratura decrece exponencialmente, estando constituida solo por la componente subtransitoria.
- b) - dos corrientes, una unidireccional y la otra armonica de segundo orden. En el instante inicial del cortocircuito, la suma de las amplitudes de las corrientes es de valor igual y contrario a la variación sufrida por la corriente alterna.

A las corrientes alternas unidireccionales y armonicas de segundo orden que circulan en los arrollamientos de las fases de inducido (estudiadas en el capitulo I) corresponden en los arrollamientos del rotor las unidireccionales y alternas a la secuencia fundamental. Examinemoslas en particular, ellas son:

- c) - una corriente unidireccional en el arrollamiento inductor preexistente al funcionamiento en cortocircuito. El valor de dicha corriente depende de la excitación y permanece constante aún despues de la eliminación de la falla a menos que la actuación del regulador no haga variar la tensión de inducido de la excitatriz.
- d) - corrientes unidireccionales inducidas en las espiras amortiguadoras y en los circuitos auxiliares rotóricos simetricos respecto del eje directo, y en el arrollamiento inductor. Las corrientes son causadas por el incremento que sufren las amplitudes del campo de reacción longitudinal rotante en sincronismo con el rotor. Ellas varían en los circuitos auxiliares rotoricos según las constantes de tiempo subtransitorias y en el arrollamiento inductor según las constantes de tiempo subtransitorias y transitorias.-
- e) - corrientes unidireccionales inducidas en las espiras amortiguadoras y en los circuitos auxiliares rotoricos simetricos el eje en cuadratura.

Tales corrientes son causadas por el incremento de amplitud del campo transversal rotante en sincronismo con el rotor y se extinguen según la correspondiente constante de tiempo subtransitoria.

- f) - corrientes alternas a frecuencia fundamental inducidas en el arrollamiento inductor y en los circuitos auxiliares rotóricos simétricos respecto del eje directo.-

Estas corrientes son causadas por la componente longitudinal del campo de reacción unidireccional y tienen amplitudes iguales y contrarias a las de las variaciones sufridas por las corrientes unidireccionales al inicio del cortocircuito. Ellas varían exponencialmente,

La constante de tiempo es aquella de las corrientes unidireccionales de las tres fases de inducido.

- g) - corrientes alternas a frecuencia fundamental inducidas en las espiras amortiguadoras y en los circuitos auxiliares rotóricos simétricos respecto del eje en cuadratura. Corrientes causadas por la componente transversal del campo de reacción unidireccional, y que tienen amplitudes iniciales contrarias a las variaciones sufridas por las corrientes unidireccionales en el instante inicial del cortocircuito, y que después varían exponencialmente y la constante de tiempo es aquella de las corrientes unidireccionales de las tres fases de inducido.-

La existencia en los distintos arrollamientos cerrados de la máquina de las corrientes descritas se releva experimentalmente mediante registros oscilograficos. La existencia y las variaciones de las que se ha hablado pueden ser determinadas también por vía analítica partiendo de las ecuaciones de los flujos y de las tensiones en los terminales de los arrollamientos de la máquina denominada modelo obtenida con la transformación de Park.-

4.2 - Valores del funcionamiento en carga.

Durante el funcionamiento que precede el cortocircuito, y en consecuencia en el instante $t=0$, la máquina real presenta las siguientes magnitudes:

- Las tensiones y las corrientes de las fases del inducido, magnitudes alternas simétricas de amplitud constante.-
- La tensión y la corriente en el arrollamiento inductor, magnitudes unidireccionales de amplitud constante;
- Las tensiones y las corrientes en las espiras amortiguadoras, magnitudes de valor nulo.

Con referencia al instante en el cual es eje magnetico de la fase "a" coincide con la dirección del eje directo de los polos, y suponiendo sea conocido el angulo " α " formado por el vector corriente de la fase "a" con la dirección del eje mismo, los valores instantaneos de las tensiones y de las corrientes de las fases de inducido y de los arrollamientos del rotor se pueden expresar con las relaciones

$$u_a = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \alpha + \varphi)$$

$$u_b = \sqrt{2} U \cos\left(\omega t + \alpha + \varphi - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$u_c = \sqrt{2} U \cos\left(\omega t + \alpha + \varphi + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$i_{la} = \sqrt{2} I_l \cos(\omega t + \alpha)$$

$$i_{lb} = \sqrt{2} I_l \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$i_{lc} = \sqrt{2} I_l \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$E_{f(0)} = \text{constante} \quad E_{xd(0)} = 0 \quad E_{xq(0)} = 0$$

$$I_{f(0)} = \frac{E_{f(0)}}{r_f} = \text{constante} \quad I_{xd(0)} = 0 \quad I_{xq(0)} = 0$$

La máquina modelo en cambio en el instante $t = 0$ presenta:

- Las tensiones y las corrientes de los arrollamientos "d, q" del estator, magnitudes unidireccionales de amplitud constante.
- La tensión y la corriente del arrollamiento 0 del estator, magnitud de valor nulo.
- La tensión y la corriente del arrollamiento inductor, magnitud unidireccional de amplitud constante.
- Las tensiones y las corrientes de las espiras amortiguadoras, magnitudes de valor nulo.
- Los valores de las tensiones y de las corrientes indicadas pueden expresarse con las relaciones

$$u_d = \sqrt{2} U \cos(\alpha + \varphi) \quad , \quad u_q = \sqrt{2} U \sin(\alpha + \varphi) \quad , \quad u_0 = 0$$

$$i_{ld} = \sqrt{2} I_l \cos \alpha \quad , \quad i_{lq} = \sqrt{2} I_l \sin \alpha \quad , \quad i_{l0} = 0$$

$$e_{f(0)} = E_{f(0)} = \text{constante}, \quad e_{xd(0)} = 0 \quad , \quad e_{xq(0)} = 0$$

$$i_{f(0)} = I_{f(0)} = \frac{e_{f(0)}}{r_f} = \text{constante} \quad , \quad i_{xd(0)} = 0 \quad , \quad i_{xq(0)} = 0$$

Todas las magnitudes referidas al sistema dimensional examinado en el parágrafo 3.3.2 satisfacen las ecuaciones numeradas de (72) a (82).

Teniendo en debida cuenta la condición de funcionamiento que se está estudiando, las magnitudes $p\phi_d$, $p\phi_q$, $p\phi_f$, $p\phi_{xd}$, $p\phi_{xq}$, i_{xd} , i_{xq} tienen valor nulo. La resistencia de las fases de inducido además debe considerarse de valor despreciable respecto de los valores de los otros parametros. Por lo tanto las ecuaciones de los flujos concatenados con los arrollamientos y aquellas que expresan las tensiones en los terminales de los mismo arrollamientos asumen la forma siguiente

$$\begin{aligned}
 [1] \quad \dot{\phi}_{d(0)} &= \dot{i}_{ad}(\dot{i}_{f(0)} - \dot{i}_{ld}) - \dot{i}_{ld}\dot{i}_{ld} \\
 [2] \quad \dot{\phi}_{q(0)} &= -\dot{i}_{aq}\dot{i}_{lq} - \dot{i}_{lq}\dot{i}_{lq} \\
 [3] \quad \dot{\phi}_0 &= 0 \\
 [4] \quad \dot{\phi}_{f(0)} &= \dot{i}_{lf}\dot{i}_{f(0)} + \dot{i}_{ad}(\dot{i}_{f(0)} - \dot{i}_{ld}) \\
 [5] \quad \dot{\phi}_{xd(0)} &= \dot{i}_{ad}(\dot{i}_{f(0)} - \dot{i}_{ld}) \\
 [6] \quad \dot{\phi}_{xq(0)} &= -\dot{i}_{aq}\dot{i}_{lq} \\
 [7] \quad \dot{u}_d &= \dot{X}_{aq}\dot{i}_{lq} + \dot{X}_{lq}\dot{i}_{lq} \\
 [8] \quad \dot{u}_q &= \dot{X}_{ad}(\dot{i}_{f(0)} - \dot{i}_{ld}) - \dot{X}_{ld}\dot{i}_{ld} \\
 [9] \quad \dot{u}_0 &= 0 \\
 [10] \quad \dot{e}_{f(0)} &= \dot{r}_f \dot{i}_{f(0)} \\
 [11] \quad \dot{e}_{xd(0)} &= 0 \\
 [12] \quad \dot{e}_{xq(0)} &= 0
 \end{aligned}$$

De la ecuación (8) se obtiene

$$[13] \quad \dot{i}_{f(0)} = \frac{\dot{u}_q + (\dot{X}_{ld} + \dot{X}_{ad})\dot{i}_{ld}}{\dot{X}_{ad}} = \frac{\dot{e}_{c\delta}}{\dot{X}_{ad}}$$

En consecuencia la relación (4) puede ser reducida como se indica.

$$\begin{aligned}
 [14] \quad \dot{\phi}_{f(0)} &= (\dot{i}_{lf} + \dot{i}_{ad}) \frac{\dot{e}_{c\delta}}{\dot{X}_{ad}} - \dot{i}_{ad}\dot{i}_{ld} = \\
 &= \frac{\dot{X}_{ff}}{\dot{X}_{ad}} \left[\dot{u}_q + \left(\dot{X}_d - \frac{\dot{X}_{ad}^2}{\dot{X}_{ff}} \right) \dot{i}_{ld} \right] = \frac{\dot{X}_{ff}}{\dot{X}_{ad}} \dot{e}'_q
 \end{aligned}$$

Como se observa los simbolos de las inductancias fueron reemplazados con los de las correspondientes reactancias, porque los parametros correspondientes tienen valores relativos iguales y se han introducido las siguientes simplificaciones

$$\begin{aligned}
 [15] \quad \dot{e}_{c\delta} &= \dot{u}_q + (\dot{X}_{ld} + \dot{X}_{ad})\dot{i}_{ld} \\
 [16] \quad \dot{X}'_d &= \dot{X}_d - \frac{\dot{X}_{ad}^2}{\dot{X}_{ff}} \\
 [17] \quad \dot{e}'_q &= \dot{u}_q + \dot{X}'_d \dot{i}_{ld}
 \end{aligned}$$

Substrayendo de la relación (5) la relación (4) se obtiene

$$\begin{aligned}
 [18] \quad \dot{\phi}_{xd(0)} &= \dot{\phi}_{f(0)} - \dot{X}_{ff}\dot{i}_{f(0)} + \dot{X}_{ad}\dot{i}_{f(0)} = \frac{\dot{X}_{ff}}{\dot{X}_{ad}} \dot{e}'_q - \frac{\dot{X}_{ff}}{\dot{X}_{ad}} \dot{e}_{c\delta} + \dot{e}_{c\delta} = \\
 &= \dot{e}_{c\delta} - \frac{\dot{X}_{ff}}{\dot{X}_{ad}} (\dot{e}_{c\delta} - \dot{e}'_q)
 \end{aligned}$$

Mientras que de las relaciones (7) y (6) se obtiene.

$$[19] \quad \begin{aligned} i_{lq} &= \frac{\dot{u}_d}{\dot{\chi}_q} \\ \dot{\varphi}_{xq(0)} &= - \frac{\dot{\chi}_{aq}}{\dot{\chi}_q} \dot{u}_d \end{aligned}$$

Las tensiones $e_{c\delta}$, e'_q del arrollamiento "d" de la máquina modelo referidas al arrollamiento de una fase del inducido de la máquina real conservan sus amplitudes $V\sqrt{2} E_{c\delta} = e_{c\delta}$, $V\sqrt{2} E'_q = e'_q$ y se transforman en magnitudes alternas y se denominan respectivamente tensión interna sincronica directa y tensión interna transitoria directa. Ambas han sido definidas en el paragrafo 1.4.-

A causa de las distintas convenciones adoptadas allí se indican con los símbolos $E_{c\delta}$, E'_q y se expresan con relaciones en las cuales la componente U_q de la tensión U se indica con el simbolo U_d .-

El ángulo entre los vectores tensiones internas directas y el vector tensión en bornes puede ser determinado en base a las relaciones a continuación descriptas y a la construcción gráfica representada en la figura 3.

$$[20] \quad \bar{I}_{la} = \bar{I}_{ld} + j\bar{I}_{lq}$$

donde

$$[21] \quad I_{ld} = \frac{i_{ld}}{\sqrt{2}} \quad , \quad I_{lq} = \frac{i_{lq}}{\sqrt{2}}$$

donde

$$U_d = \frac{u_d}{\sqrt{2}} \quad , \quad U_q = \frac{u_q}{\sqrt{2}}$$

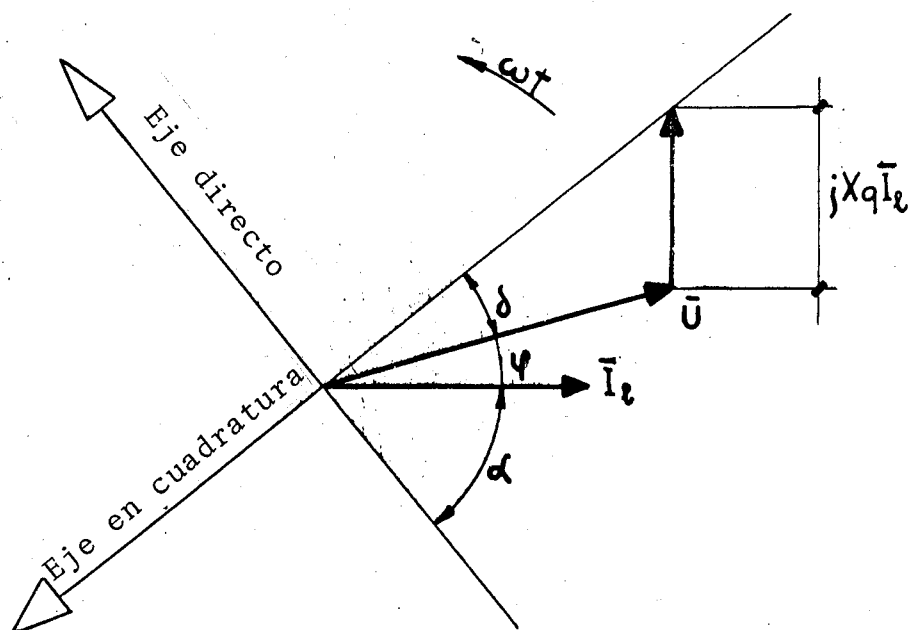


Fig. 27

$$\begin{aligned}
 [22] \quad \bar{E}_{c\delta} &= \bar{U}_q + jX_d \bar{I}_{ld} = \bar{U} + jX_d \bar{I}_{ld} + jX_q \bar{I}_{lq} = \\
 &= \bar{U} + jX_q \bar{I}_l + j(X_d - X_q) \bar{I}_{ld}
 \end{aligned}$$

$$[23] \quad \bar{E}'_q = \bar{U}_q + jX'_d \bar{I}_{ld} = \bar{E}_{c\delta} - j(X_d - X'_d) \bar{I}_{ld}$$

Conocidos los módulos U , I_1 y el ángulo de fase φ el vector U se puede construir gráficamente como se muestra en la figura 27.

$$\bar{U} + jX_q \bar{I}_l$$

Uniendo el origen de vector U con el extremo del vector $U + jX_q I_1$ se obtiene la dirección de las tensiones internas directas y en consecuencia resulta establecido la dirección del eje directo porque la dirección se encuentra $\pi/2$ grados eléctricos en adelante.-

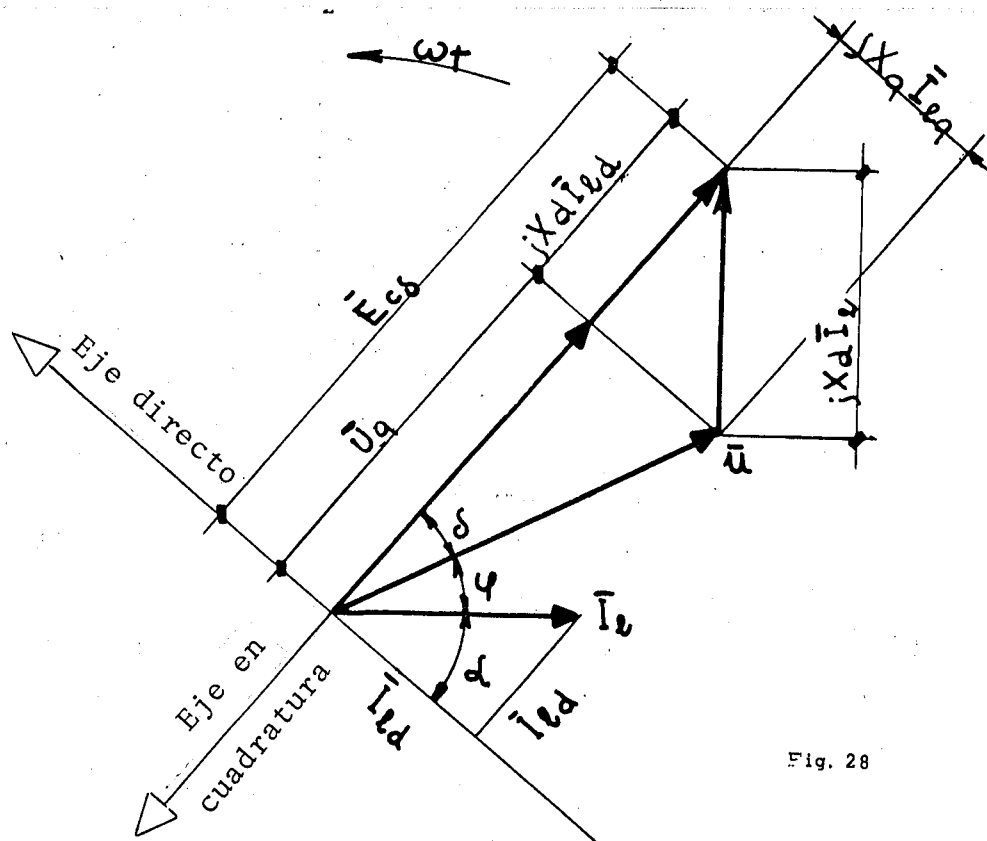


Fig. 28

El ángulo de cupla δ es aquel comprendido entre la dirección de las tensiones internas y la dirección de la tensión U . Sumando el ángulo de cupla δ al ángulo de fase φ se obtiene un ángulo complementario al ángulo α .

De la relación (22) se derivan directamente ya al diagrama de funcionamiento de Potier, como el de Blondel. En efecto para $X_d = X_q$ el vector $E_{c\delta} = U + jX_d I_1$ está construido como muestra la figura 28, mientras que para $X_d \neq X_q$ el vector $E_c = U + jX_q I_1 + j(X_d - X_q) I_{ld}$ se construye como muestra la fig. 29.

Los valores iniciales subtransitorios de las magnitudes de todos los arrollamientos de la máquina pueden ser determinados comodamente introduciendo en las expresiones de las tensiones en terminales la condición de conservación de los flujos. Por lo que se ha dicho la condición hace despreciables los terminos resistivos y confiere a las corrientes del estator y del rotor amplitudes constantes para todo el funcionamiento en cortocircuito. De esta manera las ecuaciones indicadas en el paragrafo 4.1 asumen la forma siguiente:

$$\begin{aligned} [1] \quad \dot{u}_d &= p \dot{\phi}_d - \dot{\omega} \dot{\phi}_q \\ [2] \quad \dot{u}_q &= p \dot{\phi}_q + \dot{\omega} \dot{\phi}_d \\ [3] \quad \dot{e}_f &= p \dot{\phi}_f \\ [4] \quad \dot{e}_{xd} &= p \dot{\phi}_{xd} = 0 \\ [5] \quad \dot{e}_{xq} &= p \dot{\phi}_{xq} = 0 \end{aligned}$$

Los flujos que entran en las ecuaciones citadas se pueden en cambio expresar como resulta del paragrafo 4.1. Y son los siguientes:

$$\begin{aligned} [6] \quad \dot{\phi}_d &= \dot{l}_{ad} (\dot{i}_f + \dot{i}_{xd} - \dot{i}_d) - \dot{l}_{ld} \dot{i}_d \\ [7] \quad \dot{\phi}_q &= \dot{l}_{aq} (\dot{i}_{xq} - \dot{i}_q) - \dot{l}_{lq} \dot{i}_q \\ [8] \quad \dot{\phi}_f &= \dot{l}_{lf} \dot{i}_f + \dot{l}_{ad} (\dot{i}_f + \dot{i}_{xd} - \dot{i}_d) \\ [9] \quad \dot{\phi}_{xd} &= \dot{l}_{ld} \dot{i}_{xd} + \dot{l}_{ad} (\dot{i}_f + \dot{i}_{xd} - \dot{i}_d) \\ [10] \quad \dot{\phi}_{xq} &= \dot{l}_{lq} \dot{i}_{xq} + \dot{l}_{aq} (\dot{i}_{xq} - \dot{i}_q) \end{aligned}$$

En el instante $t=0$, precedente al establecimiento del cortocircuito, y perteneciente aún al funcionamiento en carga, las corrientes, las tensiones, y los flujos en distintos arrollamientos son magnitudes unidireccionales y sus amplitudes conservan los valores determinados en el paragrafo 4.2, donde han sido expresados con las notaciones

$$\begin{aligned} & i_{f(0)} ; i_{xd(0)} ; i_{xq(0)} ; i_{ld} ; i_{lq} \\ e_{f(0)} &= i_{ff(0)} ; e_{xd(0)} = 0 ; e_{xq(0)} = 0 ; \dot{u}_d = \dot{X}_q i_{lq} ; \dot{u}_q = e_{c\delta} - \dot{X}_d i_{ld} ; \\ \dot{\phi}_{f(0)} &= \frac{\dot{X}_{ff}}{\dot{X}_{ad}} \dot{e}'_q ; \dot{\phi}_{xd(0)} = e_{c\delta} - \frac{\dot{X}_{ff}}{\dot{X}_{ad}} (e_{c\delta} - \dot{e}'_q) ; \dot{\phi}_{xq(0)} = - \frac{\dot{X}_{aq}}{\dot{X}_q} \dot{u}_q \\ \dot{\phi}_{d(0)} &= \frac{\dot{u}_q}{\dot{\omega}} ; \dot{\phi}_{q(0)} = - \frac{\dot{u}_d}{\dot{\omega}} \end{aligned}$$

En el instante $t=0 +$ que está en el origen del cortocircuito las tensiones u_d y u_q deben ser consideradas de valor nulo. Los fenómenos que se producen en la máquina a causa del cortocircuito se pueden estudiar aplicando el principio de la superposición de los efectos. Se puede entonces:

- Considerar todos los arrollamientos rotoricos desexcitados y dispuestos en cortocircuito y aplicar a los del estator tensiones iguales y contrarias a aquellas ya preexistentes entre los bornes de los arrollamientos.
- Componer las tensiones y las corrientes del funcionamiento ficticio con las correspondientes magnitudes que existían en el funcionamiento en carga.-

El funcionamiento ficticio, hipotizado para simular la condición de falla en terminales de los arrollamientos del estator, puede ser estudiado aplicando las ecuaciones enumeradas en este párrafo de (1) a (10), y teniendo en debida cuenta que los arrollamientos del estator constituyen una carga inductiva respecto de la fuente de tensión externa mientras que los arrollamientos del rotor estan desexcitados y cortocircuitados. En consecuencia los valores de los flujos concatenados de los arrollamientos del rotor y de las tensiones en sus terminales deben ser nulos.-

Distinganse con el simbolo Δ'' los valores instantáneos que asumen todas las magnitudes de los arrollamientos de la máquina y conservense las convenciones de signo hasta aquí adoptadas para las corrientes. A partir del instante $t=0+$, instante inicial del funcionamiento ficticio que se examina, para los flujos concatenados de los arrollamientos se pueden escribir las relaciones.

$$[11] \quad i_{lf} \Delta'' i_f + i_{ad} (\Delta'' i_f + \Delta'' i_{xd} - \Delta'' i_d) = 0$$

$$[12] \quad i_{lxd} \Delta'' i_{xd} + i_{ad} (\Delta'' i_f + \Delta'' i_{xd} - \Delta'' i_d) = 0$$

$$[13] \quad i_{lxq} \Delta'' i_{xq} + i_{aq} (\Delta'' i_{xq} - \Delta'' i_q) = 0$$

$$[14] \quad i_{ad} (\Delta'' i_f + \Delta'' i_{xd} - \Delta'' i_d) - i_{ld} \Delta'' i_d = \dot{\phi}_d''$$

$$[15] \quad i_{aq} (\Delta'' i_{xq} - \Delta'' i_q) - i_{lq} \Delta'' i_q = \dot{\phi}_q''$$

Mientras las tensiones en los terminales de los arrollamientos del estator asumen los valores.

$$[16] \quad -(\dot{e}_c \delta - \dot{X}_d i_{ld}) = p \dot{\phi}_q'' + \omega \dot{\phi}_d''$$

$$[17] \quad -\dot{X}_q i_{lq} = p \dot{\phi}_d'' - \omega \dot{\phi}_q''$$

Sustrayendo de la relación (11) la (12) se obtiene

$$i_{lf} \Delta'' i_f - i_{lxd} \Delta'' i_{xd} = 0$$

de la que se obtiene

$$[18] \quad \Delta'' i_f = \frac{i_{lxd}}{i_{lf}} \Delta'' i_{xd}$$

Introduciendo la expresión (18) en la relación (12) se obtiene:

$$i_{lxd} \Delta'' i_{xd} + \frac{i_{ad} i_{lxd}}{i_{lf}} \Delta'' i_{xd} + i_{ad} \Delta'' i_{xd} = i_{ad} \Delta'' i_d$$

de donde:

$$[19] \quad \Delta'' i_{xd} = i_{ad} \left(\frac{i_{lf}}{i_{lxd} i_{lf} + i_{ad} i_{lxd} + i_{ad} i_{lf}} \right) \Delta'' i_d$$

por sustitución en la (18) se obtiene

$$[20] \quad \Delta'' i_f = i_{ad} \left(\frac{i_{lxd}}{i_{lxd} i_{lf} + i_{ad} i_{lxd} + i_{ad} i_{lf}} \right) \Delta'' i_d$$

El flujo Φ_d'' puede ser expresado en función de los valores instantáneos de la corriente $\Delta i_d''$ es decir

$$[21] \quad \dot{\Phi}_d'' = - \left(i_{ld} + \frac{i_{ad} i_{lxd} i_{lf}}{i_{lxd} i_{lf} + i_{ad} i_{lxd} + i_{ad} i_{lf}} \right) \Delta'' i_d = - i_d'' \Delta'' i_d$$

en la que se ha puesto

$$[22] \quad i_{ld} + \frac{i_{ad} i_{lxd} i_{lf}}{i_{lxd} i_{lf} + i_{ad} i_{lxd} + i_{ad} i_{lf}} = i_{ld} + \frac{1}{\frac{1}{i_{ad}} + \frac{1}{i_{lxd}} + \frac{1}{i_{lf}}} = i_d''$$

De la ecuación (13) se obtiene

$$[23] \quad \Delta'' i_{xq} = \frac{i_{aq}}{i_{lxq} + i_{aq}} \Delta'' i_q$$

El flujo Φ_q'' puede a su vez ser expresado en función de los valores instantáneos de la corriente $\Delta'' i_q$, es decir:

$$[24] \quad \dot{\Phi}_q'' = - \left(i_{lq} + \frac{i_{aq} i_{lxq}}{i_{aq} + i_{lxq}} \right) \Delta'' i_q = - i_q'' \Delta'' i_q$$

habiendo puesto

$$[25] \quad i_{lq} + \frac{i_{aq} i_{lxq}}{i_{lxq} + i_{aq}} = i_{lq} + \frac{1}{\frac{1}{i_{lq}} + \frac{1}{i_{aq}}} = i_q''$$

Las relaciones (21) y (24) permiten transformar las ecuaciones (16) y (17) como sigue

$$[26] \quad -(\dot{e}_{c\delta} - \dot{X}_d i_{ld}) = - i_q'' p \Delta'' i_q - \omega i_d'' \Delta'' i_d$$

$$[27] \quad -\dot{X}_q i_{lq} = - i_d'' p \Delta'' i_d + \omega i_q'' \Delta'' i_q$$

De la ecuación (27) se obtiene:

$$[28] \quad \Delta'' i_q = \frac{\dot{l}_d'' p \Delta'' i_d}{\omega \dot{l}_q''} - \frac{\dot{X}_q \dot{i}_{lq}}{\omega \dot{l}_q''}$$

y por lo tanto

$$[29] \quad p \Delta'' i_q = \frac{\dot{l}_d''}{\omega \dot{l}_q''} p^2 \Delta'' i_d$$

En consecuencia substituyendo en la (26) la (29) se obtiene la ecuación diferencial de segundo orden

$$[30] \quad p^2 \Delta'' i_d + \omega^2 \Delta'' i_d = \omega^2 \frac{(\dot{e}_{c\delta} - \dot{X}_d \dot{i}_{ld})}{\omega \dot{l}_d''}$$

La integral general de la ecuación diferencial es del tipo

$$[31] \quad \Delta'' i_d = \frac{\dot{u}}{\omega \dot{l}_d''} \cos \delta - \frac{\dot{u}}{\omega \dot{l}_d''} \cos (\omega t + \delta)$$

$$[32] \quad \Delta'' i_d = \frac{\dot{u}_q}{\dot{X}_d''} - \frac{\dot{u}}{\dot{X}_d''} \cos (\omega t + \delta)$$

habiendo puesto $\omega \dot{l}_d'' = \dot{X}_d''$

$$\dot{e}_{c\delta} - \dot{X}_d \dot{i}_{ld} = \dot{u} \cos \delta = \dot{u}_q$$

Mientras que de la ecuación (28) se obtiene otra ecuación diferencial

$$\Delta'' i_q = \frac{\dot{l}_d''}{\omega \dot{l}_q''} p \left[\frac{\dot{u}_q}{\dot{X}_d''} - \frac{\dot{u}}{\dot{X}_d''} \cos (\omega t + \delta) \right] - \frac{\dot{X}_q}{\omega \dot{l}_q''} \dot{i}_{lq}$$

que resuelta permite escribir

$$[33] \quad \Delta'' i_q = \frac{\dot{u}}{\dot{X}_q''} \sin (\omega t + \delta) - \frac{\dot{X}_q}{\dot{X}_q''} \dot{i}_{lq}$$

Los valores instantaneos de las corrientes i_d , i_q durante el funcionamiento en cortocircuito de la máquina, se obtienen con la suma de las corrientes $\Delta'' i_d$, $\Delta'' i_q$ (calculadas con las relaciones (32) y (33)) con las corrientes circulantes en los arrollamientos d y q antes del cortocircuito.

Se obtienen así las relaciones (34) y (37)

$$\begin{aligned}
 [34] \quad i_d &= \frac{\dot{u}_q}{\dot{X}_d''} - \frac{\dot{u}}{\dot{X}_d''} \cos(\omega t + \delta) + i_{ld} = \frac{\dot{u}_q + \dot{X}_d'' i_{ld}}{\dot{X}_d''} - \frac{\dot{u}}{\dot{X}_d''} \cos(\omega t + \delta) = \\
 &= \frac{\dot{e}_q''}{\dot{X}_d''} - \frac{\dot{u}}{\dot{X}_d''} \cos(\omega t + \delta) = i_{d(0)}'' - \frac{\dot{u}}{\dot{X}_d''} \cos(\omega t + \delta)
 \end{aligned}$$

porque

$$[35] \quad \dot{u}_q + \dot{X}_d'' i_{ld} = e_{c\delta} - (\dot{X}_d - \dot{X}_d'') i_{ld} = e_q''$$

$$[36] \quad \frac{\dot{e}_q''}{\dot{X}_d''} = i_{d(0)}''$$

$$\begin{aligned}
 [37] \quad i_q &= \frac{\dot{u}}{\dot{X}_q''} \sin(\omega t + \delta) - \frac{\dot{X}_q}{\dot{X}_q''} i_{lq} + i_{lq} = - \frac{(\dot{X}_q - \dot{X}_q'') i_{lq}}{\dot{X}_q''} + \frac{\dot{u}}{\dot{X}_q''} \sin(\omega t + \delta) = \\
 &= - \frac{\dot{e}_d''}{\dot{X}_q''} + \frac{\dot{u}}{\dot{X}_q''} \sin(\omega t + \delta) = -i_{q(0)}'' + \frac{\dot{u}}{\dot{X}_q''} \sin(\omega t + \delta)
 \end{aligned}$$

porque

$$[38] \quad (\dot{X}_q - \dot{X}_q'') i_{lq} = e_d''$$

$$\frac{\dot{e}_d''}{\dot{X}_q''} = i_{q(0)}''$$

Se debe notar que las i_d , i_q están ambas constituídas por una corriente unidireccional y una alterna a la frecuencia fundamental. Del procedimiento seguido para determinar dichas corrientes se releva además que de los terminos $\omega \varphi_d$, $\omega \varphi_q$ dependen las unidireccionales mientras que las alternas dependen de los términos $p \dot{\varphi}_d$, $p \dot{\varphi}_q$.

Las tensiones e_q'' , e_d'' y las corrientes $i_{d(0)}''$, $i_{q(0)}''$ magnitudes unidireccionales de amplitud constante, referidas de los arrollamientos de la máquina modelo al arrollamiento de una fase de inducido de la máquina real conservan las amplitudes

$$\sqrt{2} E_q'' = e_q'', \sqrt{2} E_d'' = e_d'', \sqrt{2} I_{d(0)}'' = i_{d(0)}'', \sqrt{2} I_{q(0)}'' = i_{q(0)}''$$

Estas se transforman en magnitudes alternas y los respectivos valores se denominan: valor inicial de la tensión interna subtransitoria directa, de la subtransitoria en cuadratura, valor inicial de la corriente alterna subtransitoria directa, de la subtransitoria en cuadratura. Todas las magnitudes se definen como se ha enunciado en el paragrafo 1.4. La simbología introducida en este capítulo para designar las tensiones internas difiere sin embargo, de la adoptada en la primera parte de este trabajo. En efecto el símbolo d se ha cambiado con el símbolo q , esto a causa de la convención introducida a partir del capítulo 3.

Si se elije como instante inicial del cortocircuito aquel en el cual el eje magnetico de la fase "a" coincide con la direcci3n del eje directo, las corrientes alternas de las tres fases de inducido (expresadas en(A)) asumen los valores instant3neos:

$$\begin{aligned}
 [40] \quad i_a &= -\sqrt{2} \left[\frac{E''_q}{X''_d} \cos \omega t + \frac{E''_d}{X''_q} \sin \omega t \right] \\
 [41] \quad i_b &= -\sqrt{2} \left[\frac{E''_q}{X''_d} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{E''_d}{X''_q} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\
 [42] \quad i_c &= -\sqrt{2} \left[\frac{E''_q}{X''_d} \cos \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{E''_d}{X''_q} \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Estas derivan de expresiones mas generales en las cuales figuran los 3ngulos ωt incrementados del 3ngulo ψ formado por el eje de la fase "a" con la direcci3n del eje polar en el instante $t=0+$.

Las magnitudes $u \cos (\omega t + \delta)$, $u \sin (\omega t + \delta)$, $(u/X''_d) \cos (\omega t + \delta)$, $(u/X''_q) \sin (\omega t + \delta)$ son magnitudes alternas de amplitud constante. Referidas de los arrollamientos d y q de la m3quina modelo al arrollamiento de una fase de inducido de la m3quina real, se transforman en la suma de dos magnitudes: una unidireccional y la otra armonica de segundo orden. Dichas amplitudes dependen del instante de iniciaci3n del cortocircuito. Cuando el instante inicial del cortocircuito es aquel en el cual la fase "a" se superpone a la direcci3n del eje directo, las corrientes unidireccionales y de segunda armonica (expresadas en(A)) asumen as3 sus valores instant3neos:

NOTA : este modo de tratar el tema permite obtener solo los valores iniciales , o sea aquellos del instante $t=0+$ y exactamente

$$\sqrt{2} U/X''_d \cos \delta$$

$$\sqrt{2} U/X''_d \cos(\delta - 2\pi/3)$$

$$\sqrt{2} U/X''_d \cos(\delta + 2\pi/3)$$

respecto del instante $t=0+$ al cual se hace referencia resulta:

$$\cos \psi = 1 \quad \text{y} \quad \sin \psi = 0$$

Pag 128 bis

fase a):

$$[43] \quad \frac{\sqrt{2}}{2} U \cos \delta \left(\frac{1}{X_d''} + \frac{1}{X_q''} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} U \left(\frac{1}{X_d''} - \frac{1}{X_q''} \right) \cos (2\omega t + \delta) =$$

$$= \sqrt{2} \frac{U}{X_2} \cos \delta + \frac{\sqrt{2}}{2} U \frac{X_q'' - X_d''}{X_d'' X_q''} \cos (2\omega t + \delta)$$

fase b):

$$[44] \quad \sqrt{2} \frac{U}{X_2} \cos \left(\delta - \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} U \frac{X_q'' - X_d''}{X_d'' X_q''} \cos \left(2\omega t + \delta - \frac{2\pi}{3} \right)$$

fase c):

$$[45] \quad \sqrt{2} \frac{U}{X_2} \cos \left(\delta + \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} U \frac{X_q'' - X_d''}{X_d'' X_q''} \cos \left(2\omega t + \delta + \frac{2\pi}{3} \right)$$

La reactancia X_2 es

$$X_2 = \frac{1}{2} \frac{X_q'' + X_d''}{X_d'' X_q''}$$

mientras la tensión

$$\sqrt{2} U \cos \delta = \sqrt{2} U_q.$$

Las relaciones (19) y (18) permiten obtener los valores instantáneos de las corrientes $\Delta'' i_{xd}$, $\Delta'' i_{xf}$ de los arrollamientos del rotor dispuestos simétricamente respecto del eje directo. De la relación (19) se obtiene en particular:

$$[46] \quad \Delta'' i_{xd} = i_{xd} = \frac{\dot{X}_{ad} \dot{X}_{lf}}{\dot{X}_{lxd} \dot{X}_{lf} + \dot{X}_{ad} \dot{X}_{lxd} + \dot{X}_{ad} \dot{X}_{lf}} \left[\frac{\dot{i}_q}{\dot{X}_d''} - \frac{\dot{i}}{\dot{X}_d''} \cos (\omega t + \delta) \right]$$

El ángulo δ es generalmente pequeño y entonces $\cos(\omega t + \delta) = \cos \delta \cos \omega t$; en consecuencia la relación (46) puede ser transformada, expresando la diferencia entre las reactancias $(X_d - X_d'')$ en función de las reactancias de dispersión y de reacción de los distintos arrollamientos es decir:

$$(\dot{X}_d - \dot{X}_d'') = \frac{\dot{X}_{ad}^2 (\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd})}{\dot{X}_{lxd} \dot{X}_{lf} + \dot{X}_{ad} \dot{X}_{lxd} + \dot{X}_{ad} \dot{X}_{lf}}$$

Multiplicando numerador y denominador de la relación (46) por $(X_d - X_d'')$ se obtiene la relación

$$\begin{aligned} \Delta'' i_{xd} = i_{xd} &= \frac{\dot{X}_{ad} \dot{X}_{lf}}{\dot{X}_{lxd} \dot{X}_{lf} + \dot{X}_{ad} \dot{X}_{lxd} + \dot{X}_{ad} \dot{X}_{lf}} \cdot \frac{\dot{X}_{lxd} \dot{X}_{lf} + \dot{X}_{ad} \dot{X}_{lxd} + \dot{X}_{ad} \dot{X}_{lf}}{\dot{X}_{ad}^2 (\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd})} \\ [47] \quad \frac{\dot{u}_q}{\dot{X}_d''} (\dot{X}_d - \dot{X}_d'') (1 - \cos \omega t) &= \\ &= \frac{\dot{X}_{lf}}{\dot{X}_{ad} (\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd})} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{u}_q}{\dot{X}_d''} - \dot{u}_q \right) (1 - \cos \omega t) = \\ &= \frac{\dot{X}_{lf}}{\dot{X}_{ad} (\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd})} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{e}_q''}{\dot{X}_d''} - \dot{X}_d i_{ld} - \dot{u}_q \right) (1 - \cos \omega t) = \\ &= \frac{\dot{X}_{lf}}{\dot{X}_{ad} (\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd})} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{e}_q''}{\dot{X}_d''} - \dot{e}_{c\delta} \right) (1 - \cos \omega t) = \\ &= i_{xd(0)}'' (1 - \cos \omega t). \end{aligned}$$

De las relaciones (18) y (47) se obtiene la corriente $\Delta'' i_f$.

$$[48] \quad \Delta'' i_f = \frac{\dot{X}_{lxd}}{\dot{X}_{lf}} \Delta'' i_{xd} = \frac{\dot{X}_{lxd}}{\dot{X}_{ad} (\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd})} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{e}_q''}{\dot{X}_d''} - \dot{e}_{c\delta} \right) (1 - \cos \omega t)$$

Agregando a la corriente $\Delta'' i_f$ (48) la de excitación del funcionamiento en carga se obtiene:

$$\begin{aligned} [49] \quad i_f &= i_{f(0)} + \Delta'' i_f = i_{f(0)}'' - \left[\frac{\dot{X}_{lxd}}{\dot{X}_{ad} (\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd})} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{e}_q''}{\dot{X}_d''} - \dot{e}_{c\delta} \right) \right] \cos \omega t \\ i_{f(0)}'' &= \left[\frac{\dot{X}_{lxd}}{\dot{X}_{ad} (\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd})} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{e}_q''}{\dot{X}_d''} \right) + \frac{\dot{X}_{lf}}{\dot{X}_{ad} (\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd})} \dot{e}_{c\delta} \right] \end{aligned}$$

Para el arrollamiento del rotor dispuesto simétricamente al eje q se pueden obtener los valores instantáneos de las corrientes $\Delta'' i_{xq}$ de la relación (2,3) es decir:

$$\begin{aligned}
 [50] \quad \Delta'' i_{xq} = i_{xq} &= \frac{\dot{X}_{aq}}{\dot{X}_{lxq} + \dot{X}_{aq}} \left[\frac{\dot{u}}{\dot{X}_q''} \sin(\omega t + \delta) - \frac{\dot{X}_q}{\dot{X}_q''} i_{lq} \right] = \\
 &= \frac{1}{\dot{X}_{aq}} \frac{\dot{X}_{aq}^2}{\dot{X}_{lxq} + \dot{X}_{aq}} \left[\frac{\dot{u}}{\dot{X}_q''} \sin(\omega t + \delta) - \frac{\dot{X}_q}{\dot{X}_q''} i_{lq} \right] = \\
 &= \frac{\dot{X}_q - \dot{X}_q''}{\dot{X}_{aq} \dot{X}_q''} \dot{u} \sin(\omega t + \delta) - \frac{\dot{X}_q}{\dot{X}_{aq}} \frac{\dot{e}_d''}{\dot{X}_q''} = \\
 &= \frac{\dot{X}_q - \dot{X}_q''}{\dot{X}_{aq} \dot{X}_q''} \dot{u} \sin(\omega t + \delta) - i_{xq(0)}''
 \end{aligned}$$

Las reactancias $(X_q - X_q'')$ y la tensión $(X_q - X_q'')$ i_{lq} quedan expresadas en la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 (\dot{X}_q - \dot{X}_q'') &= \frac{X_{aq}^2}{\dot{X}_{lxq} + \dot{X}_{aq}} \\
 (\dot{X}_q - \dot{X}_q'') i_{lq} &= \dot{e}_d''
 \end{aligned}$$

Las corrientes i_f , i_{xd} , i_{xq} del rotor referidas a los arrollamientos f , xd , xq de la máquina real, conservan las amplitudes y quedan magnitudes unidireccionales y alternas a la frecuencia fundamental. Los valores de las magnitudes de la máquina real se distinguen de los correspondientes de la máquina modelo (como ya ha sido hecho para las magnitudes de los arrollamientos del estator) con notaciones mayúsculas. Por lo tanto expresadas en(A) las corrientes rotoricas son:

$$\begin{aligned}
 [51] \quad i_{xd} &= \left[\frac{\dot{X}_{lf}}{\dot{X}_{ad}(\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd})} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{E}_q''}{\dot{X}_d''} - \dot{E}_{c\delta} \right) \right] I_{xdn} (1 - \cos \omega t) = \\
 &= I_{xd(0)}'' I_{xdn} (1 - \cos \omega t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [52] \quad i_f &= \left[\frac{\dot{X}_{lxd}}{\dot{X}_{ad}(\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd})} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{E}_q''}{\dot{X}_d''} \right) + \frac{\dot{X}_{lf}}{\dot{X}_{ad}(\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd})} \dot{E}_{c\delta} \right] I_{fn} - \\
 &- \left[\frac{\dot{X}_{lxd}}{\dot{X}_{ad}(\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd})} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{E}_q''}{\dot{X}_d''} - \dot{E}_{c\delta} \right) \right] I_{fn} \cos \omega t = I_{f(0)}'' I_{fn} - \\
 &- \left[\frac{\dot{X}_{lxd}}{\dot{X}_{ad}(\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd})} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{E}_q''}{\dot{X}_d''} - \dot{E}_{c\delta} \right) \right] I_{fn} \cos \omega t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [53] \quad i_{xq} &= \left(\frac{\dot{X}_q - \dot{X}_q''}{\dot{X}_{aq}} \frac{\dot{u}}{\dot{X}_q''} \right) I_{xqn} \sin(\omega t + \delta) - \left(\frac{\dot{X}_q}{\dot{X}_{aq}} \frac{\dot{E}_d''}{\dot{X}_q''} \right) I_{xqn} = \\
 &= \left(\frac{\dot{X}_q - \dot{X}_q''}{\dot{X}_{aq}} \frac{\dot{u}}{\dot{X}_q''} \right) I_{xqn} \sin(\omega t + \delta) - i_{xq(0)}'' I_{xqn}
 \end{aligned}$$

Nota: El metodo para transferir las corrientes unidireccionales y alternas de los arrollamientos de la máquina modelo, a los correspondientes de la máquina real ha sido tratado en el capítulo 3º.-

4.4 Valores transitorios iniciales de las magnitudes del estator y del rotor para un cortocircuito trifásico simétrico.

Haciendo siempre referencia a la máquina modelo. Los valores instantáneos relativos a las corrientes, a las fuerzas electromotrices, a los flujos y a las tensiones de los arrollamientos del estator y del rotor, sienten la influencia de las corrientes que circulan en las espiras amortiguadoras desde el inicio del cortocircuito.-

Los valores instantáneos de cada magnitud por lo tanto se consideran compuestos por los que alcanzaría la misma magnitud en caso de que no existieran los arrollamientos auxiliares rotóricos (dispuestos simétricamente a ambos ejes) y por valores incrementales que dependen de las fuerzas magnetomotrices producidas por los arrollamientos auxiliares. Los primeros valores se denominan generalmente transitorios, los segundos componentes subtransitorios.-

Considerese como hipótesis que las corrientes iniciales transitorias sean sostenidas por todo el funcionamiento en cortocircuito, en dicho caso se puede seguir un procedimiento análogo a aquel introducido en el paragrafo 4.3 para determinar dichos valores, En efecto el funcionamiento en cortocircuito de la máquina iniciado en el instante $t=0+$, se puede examinar como equivalente a la superposición de dos funcionamientos: uno el preexistente al establecimiento del cortocircuito, el otro ficticio. Aquí la máquina tiene el circuito f del rotor cortocircuitado y desexcitado, los circuitos x_d y x_q auxiliares

del rotor abiertos. En los terminales de cada uno de los arrollamientos d, q del estator está aplicada además una tensión de valor igual y contraria a la del funcionamiento real.

Se distinguen con el símbolo Δ' los valores instantáneos de las magnitudes de los arrollamientos de la máquina considerados activos excluyendo las de los arrollamientos auxiliares. Para las corrientes y las tensiones además se conservan las convenciones de signo hasta aquí adoptadas.

A partir del instante $t=0+$ considerado como instante inicial del funcionamiento ficticio en examen, los flujos concatenados de los arrollamientos resultan:

$$[1] \quad i_{lf} \Delta' i_f + i_{ad} (\Delta' i_f - \Delta' i_d) = 0$$

$$[2] \quad i_{ad} (\Delta' i_f - \Delta' i_d) - i_{ld} \Delta' i_d = \dot{\phi}_d'$$

$$[3] \quad i_{aq} \Delta' i_q - i_{lq} \Delta' i_q = \dot{\phi}_q'$$

Las tensiones en los terminales de los arrollamientos del estator en cambio asumen las siguientes expresiones:

$$[4] \quad -(e_{cd} - \dot{X}_d i_{ld}) = p \dot{\phi}_q' + \omega \dot{\phi}_d'$$

$$[5] \quad -\dot{X}_q i_{lq} = p \dot{\phi}_d' - \omega \dot{\phi}_q'$$

De la relación (1) se obtiene

$$[6] \quad \Delta' i_f = \frac{i_{ad}}{i_{lf} + i_{ad}} \Delta' i_d = \frac{i_{ad}}{i_{ff}} \Delta' i_d$$

El flujo Φ'_d puede ser expresado en función de los valores instantáneos de la corriente $\Delta' i_d$. Es decir:

$$[7] \quad \begin{aligned} \Phi'_d &= - \left(i_{ld} + i_{ad} - \frac{i_{ad}^2}{i_{ff}} \right) \Delta' i_d = \\ &= - \left(i_d - \frac{i_{ad}^2}{i_{ff}} \right) \Delta' i_d = - i'_d \Delta' i_d \end{aligned}$$

habiendo puesto

$$[8] \quad \left(i_d - \frac{i_{ad}^2}{i_{ff}} \right) = i_{ld} + \frac{i_{ad} i_{ff} - i_{ad}^2}{i_{lf} + i_{ad}} = i_{ld} + \frac{1}{\frac{1}{i_{ad}} + \frac{1}{i_{lf}}} = i'_d$$

El flujo Φ'_q en base a la relación (3) resulta

$$[9] \quad \Phi'_q = - (i_{aq} + i_{lq}) \Delta' i_q = - i'_q \Delta' i_q$$

Las relaciones (7) y (9) permiten las siguientes transformaciones de las ecuaciones (4) y (5)

$$[10] \quad - (e_{c\delta} - \dot{X}_d i_{ld}) = - i'_q p \Delta' i_q - \omega i'_d \Delta' i_d$$

$$[11] \quad - \dot{X}_q i_{lq} = - i'_d p \Delta' i_d + \omega i'_q \Delta' i_q$$

De la relación (11) se obtiene

$$[12] \quad \Delta' i_q = \frac{i'_d p \Delta' i_d}{\omega i'_q} - \frac{\dot{X}_q i_{lq}}{\omega i'_q}$$

por lo tanto

$$[13] \quad p \Delta' i_q = \frac{i'_d}{\omega i'_q} p^2 \Delta' i_d$$

Entonces por sustitución en la (10) se obtiene la ecuación diferencial de segundo orden

$$[14] \quad p^2 \Delta' i_d + \omega^2 \Delta' i_d = \omega^2 \frac{(e_{c\delta} - \dot{X}_d i_{ld})}{\omega i'_d}$$

La integral general de la ecuación es del tipo

$$[15] \quad \Delta' i_d = \frac{\dot{u}}{\dot{X}'_d} \cos \delta - \frac{u}{\dot{X}'_d} \cos (\omega t + \delta)$$

$$[16] \quad \Delta' i_d = \frac{u_q}{\dot{X}'_d} - \frac{u}{\dot{X}'_d} \cos(\omega t + \delta)$$

habiendo puesto

$$[17] \quad \omega l'_d = \dot{X}'_d$$

$$[18] \quad e'_c \delta - \dot{X}'_d i_{ld} = \dot{u}_q = \dot{u} \cos \delta$$

De la ecuación (12) se obtiene la ecuación diferencial

$$[19] \quad \Delta' i_q = \frac{l'_d}{\omega l'_q} p \left[\frac{\dot{u}_q}{\dot{X}'_d} - \frac{\dot{u}}{\dot{X}'_d} \cos(\omega t + \delta) \right] - \frac{\dot{X}'_q i_{lq}}{\dot{X}'_d}$$

y entonces

$$[20] \quad \Delta' i_q = \frac{\dot{u}}{\dot{X}'_q} \sin(\omega t + \delta) - \dot{i}_{lq}$$

Los valores instantáneos de las corrientes transitorias i_d, i_q durante el funcionamiento en cortocircuito de la máquina, se obtienen sumando las corrientes i'_d, i'_q (calculadas con las relaciones (16) y (20)) con las corrientes que circulan en los arrollamientos d y q antes del cortocircuito.

Se obtienen así las relaciones

$$[21] \quad i_d = \frac{\dot{u}_q}{\dot{X}'_d} - \frac{\dot{u}}{\dot{X}'_d} \cos(\omega t + \delta) + i_{ld} = \frac{\dot{u}_q + \dot{X}'_d i_{ld}}{\dot{X}'_d} - \frac{\dot{u}}{\dot{X}'_d} \cos(\omega t + \delta) =$$

$$= \frac{e'_q}{\dot{X}'_d} - \frac{\dot{u}}{\dot{X}'_d} \cos(\omega t + \delta) = i'_{d(0)} - \frac{\dot{u}}{\dot{X}'_d} \cos(\omega t + \delta)$$

habiendo indicado con

$$[22] \quad \dot{u}_q + \dot{X}'_d i_{ld} = e'_c \delta - (\dot{X}'_d - \dot{X}'_d) i_{ld} = e'_q$$

$$[23] \quad \frac{e'_q}{\dot{X}'_d} = i'_{d(0)}$$

$$[24] \quad \dot{i}_q = \frac{\dot{u}}{\dot{X}'_q} \sin(\omega t + \delta) - \dot{i}_{lq} + i_{lq} = \frac{\dot{u}}{\dot{X}'_q} \sin(\omega t + \delta)$$

La corriente i_d está compuesta por una corriente unidireccional y una alterna a la frecuencia fundamental, mientras que la corriente i_q solo está constituida por una alterna a la frecuencia fundamental.-

La tensión e'_q y la corriente $i'_{d(0)}$, magnitudes unidireccionales de amplitud constante, referidas de los arrollamientos de la máquina modelo al arrollamiento de una fase de inducido de la máquina real, conservan las amplitudes.

$$\sqrt{2} e'_q = e'_q \quad , \quad \sqrt{2} i'_{d(0)} = i'_{d(0)}$$

Sin embargo se transforman en magnitudes alternas y se denominan: valor inicial de la tensión interna transitoria directa y valor de la corriente alterna transitoria directa. A las magnitudes corresponden las definiciones que se presentaron en el paragrafo 1.4. La simbología introducida en este capítulo para designar las tensiones internas, como ya se ha dicho, difiere de la adoptada en la primera parte de este trabajo.-

Eligiendo como instante inicial del funcionamiento en cortocircuito aquel en el cual el eje magnético de la fase "a" coincide con la dirección del eje directo, las corrientes alternas transitorias de las tres fases de inducido (expresadas en (A)) asumen los valores instantáneos:

$$[25] \quad i_a = -\sqrt{2} \frac{E'_q}{X'_d} \cos \omega t$$

$$[26] \quad i_b = -\sqrt{2} \frac{E'_q}{X'_d} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$[27] \quad i_c = -\sqrt{2} \frac{E'_q}{X'_d} \cos \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right)$$

Estos valores derivan de expresiones mas generales en las cuales los angulos ωt se han incrementado del ángulo ψ formado en el instante $t=0+$ entre el eje de la fase "a" y la dirección del eje polar.

Las magnitudes $u \cos (\omega t + \delta)$, $u \sin (\omega t + \delta)$, $(u/X'_d) \cos (\omega t + \delta)$, $(u/X'_q) \sin (\omega t + \delta)$ son magnitudes alternas con amplitud constante, referidas de los arrollamientos d y q de la máquina modelo, al arrollamiento de una fase del inducido de la máquina real, se transforman en la suma de dos magnitudes, una unidireccional y la otra armónica de segundo orden. Sus amplitudes dependen del instante de inicio del cortocircuito; cuando dicho instante coincide con aquel en el cual el eje de la fase "a" se superpone al eje directo, las corrientes unidireccionales y alternas de segunda armónica (expresadas en A) asumen para las tres fases los siguientes valores instantáneos.

NOTA : este modo de tratar el tema permite obtener solo los valores iniciales, es decir en el instante $t=0+$ y exactamente :

$$\sqrt{2} U/X'_d \cos \delta$$

$$\sqrt{2} U/X'_d \cos (\delta - 2\pi/3)$$

$$\sqrt{2} U/X'_d \cos (\delta + 2\pi/3)$$

En efecto en el instante $t=0+$ al cual se hace referencia resulta :

$$\cos \psi = 1 \quad \text{y} \quad \sin \psi = 0$$

sigue pag 134 bis

fase a):

$$[28] \quad \frac{\sqrt{2}}{2} U \cos \delta \left(\frac{1}{X'_d} + \frac{1}{X_q} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} U \left(\frac{1}{X'_d} - \frac{1}{X_q} \right) \cos (2\omega t + \delta)$$

fase b):

$$[29] \quad \frac{\sqrt{2}}{2} U \cos \left(\delta - \frac{2\pi}{3} \right) \left(\frac{1}{X'_d} + \frac{1}{X_q} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} U \left(\frac{1}{X'_d} - \frac{1}{X_q} \right) \cdot \cos \left(2\omega t + \delta - \frac{2\pi}{3} \right)$$

fase c):

$$[30] \quad \frac{\sqrt{2}}{2} U \cos \left(\delta + \frac{2\pi}{3} \right) \left(\frac{1}{X'_d} + \frac{1}{X_q} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} U \left(\frac{1}{X'_d} - \frac{1}{X_q} \right) \cdot \cos \left(2\omega t + \delta + \frac{2\pi}{3} \right)$$

De las relaciones (6) y (16) se obtiene la expresión de la corriente $\Delta' i_f$ para el arrollamiento de excitación del rotor. Esta corriente cuando δ es pequeño vale:

$$[31] \quad \Delta' i_f = \frac{\dot{I}_{ad}}{\dot{I}_{ff}} \Delta' i_d = \frac{\dot{X}_{ad}}{\dot{X}_{ff}} \frac{\dot{u}_q}{\dot{X}'_d} (1 - \cos \omega t)$$

Agregando a la corriente $\Delta' i_f$ (31) la de excitación del funcionamiento bajo carga, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 [32] \quad i_f &= i_{f(0)} + \Delta' i_f = \frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left[\frac{\dot{X}_{ad}^2}{\dot{X}_{ff}} \frac{\dot{u}_q}{\dot{X}'_d} (1 - \cos \omega t) + \dot{e}_c \delta \right] = \\
 &= \frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left[(\dot{X}_d - \dot{X}'_d) \frac{\dot{u}_q}{\dot{X}'_d} + \dot{e}_c \delta \right] - \\
 &- \frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left[(\dot{X}_d - \dot{X}'_d) \frac{\dot{u}_q}{\dot{X}'_d} \right] \cos \omega t = \\
 &= \frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{u}_q}{\dot{X}'_d} - \dot{u}_q + \dot{e}_c \delta \right) - \\
 &- \frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{u}_q}{\dot{X}'_d} - \dot{u}_q \right) \cos \omega t = \\
 &= \frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{e}'_q}{\dot{X}'_d} \right) - \frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{e}'_q}{\dot{X}'_d} - \dot{e}_c \delta \right) \cos \omega t = \\
 &= i_{f(0)} - \frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{e}'_q}{\dot{X}'_d} - \dot{e}_c \delta \right) \cos \omega t
 \end{aligned}$$

La corriente i_f referida del arrollamiento f de la máquina modelo al arrollamiento de la máquina real, conserva la amplitud y está constituida por una corriente unidireccional y una alterna a la frecuencia fundamental. Las magnitudes del arrollamiento de la máquina real se distinguen de las correspondientes a la máquina modelo y su valor será indicado en caracteres mayusculas como se ha hecho al considerar las magnitudes de los arrollamientos del estator.

Por lo tanto la corriente del arrollamiento de excitación (expresada en A) resulta

$$[33] \quad i_f = \left[\frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{E}'_q}{\dot{X}'_d} \right) \right] I_{fn} - \left[\frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{E}'_q}{\dot{X}'_d} - \dot{E}_c \delta \right) \right] I_{fn} \cos \omega t$$

4.5 Valores permanentes de las magnitudes de estator y de rotor.

El régimen permanente de cortocircuito se establece cuando las magnitudes de los circuitos de estator y de rotor asumen amplitudes invariables en el tiempo. Supongase que se verifican las condiciones admitidas en el paragrafo 4.1 como también que la tensión de excitación es constante por toda el funcionamiento en cortocircuito. En este caso, recordemoslo, la tensión de excitación ha quedado constante en el valor que correspondía al funcionamiento en carga. Las corrientes unidireccionales

de los arrollamientos de la máquina modelo entonces asumen los valores permanentes de cortocircuito, a partir del instante $t=0+$ de inicio del cortocircuito, después de un lapso del orden de minutos. Los valores se determinan aplicando un método análogo al utilizado en los parágrafos 4.3 y 4.4.-

Con $\Delta i_d, \Delta i_q$ se indican los valores permanentes de las corrientes unidireccionales que circulan en los arrollamientos d,q del estator, cuando se aplica en sus terminales una tensión de valor igual y contrario a aquella que precedía el cortocircuito, habiendo dispuesto sin embargo en cortocircuito el arrollamiento f del rotor. Las corrientes inducidas en el arrollamiento f del rotor y en los arrollamientos auxiliares rotóricos (durante el funcionamiento ficticio antes examinado) asumen en régimen valores nulos.

$$\Delta i_f = 0, \quad \Delta i_{xd} = 0, \quad \Delta i_{xq} = 0$$

Las tensiones en los terminales de los arrollamientos d,q del estator en cambio pueden expresarse con las siguientes relaciones

$$[1] \quad -(\dot{e}_{c\delta} - \dot{X}_d i_{ld}) = -\dot{X}_d \Delta i_d$$

$$[2] \quad -\dot{X}_q i_{lq} = \dot{X}_q \Delta i_q$$

de donde

$$[3] \quad \Delta i_d = \frac{(\dot{e}_{c\delta} - \dot{X}_d i_{ld})}{\dot{X}_d}$$

$$[4] \quad \Delta i_q = -i_{lq}$$

Los valores de la corrientes de cortocircuito permanente para los arrollamientos d,q,f de la máquina son la suma de la corrientes $\Delta i_d, \Delta i_q, \Delta i_f$ con las corrientes de funcionamiento en carga. Se obtienen así las relaciones:

$$[5] \quad i_{d(\infty)} = \Delta i_d + i_{ld} = \frac{\dot{e}_{c\delta}}{\dot{X}_d}$$

$$[6] \quad i_{q(\infty)} = \Delta i_q + i_{lq} = 0$$

$$[7] \quad i_{f(\infty)} = i_{f(0)} = \frac{\dot{e}_{f(0)}}{\dot{X}_f} = \frac{\dot{e}_{c\delta}}{\dot{X}_{ad}}$$

El símbolo (∞) indica el instante en el cual las magnitudes asumen el valor de régimen, que debe ser mas bien remoto respecto del instante $t=0+$.

La corriente $i_{d(\infty)}$ unidireccional, referida del arrollamiento de la máquina modelo al arrollamiento de una fase del inducido de la máquina real, conserva la amplitud $\sqrt{2} I_d = i_{d(\infty)}$ y se transforma en alterna denominada corriente de cortocircuito permanente. En el caso que el instante de referencia de las magnitudes alternas de la fase "a" sea aquel en el cual el eje magnético de dicha fase coincide con el eje directo, las corrientes alternas permanentes de las tres fases de inducido (expresadas en A) asumen los valores instantáneos:

$$[8] \quad i_a = \sqrt{2} \frac{E_c \delta}{X_d} \cos \omega t$$

$$[9] \quad i_b = \sqrt{2} \frac{E_c \delta}{X_d} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$[10] \quad i_c = \sqrt{2} \frac{E_c \delta}{X_d} \cos \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right)$$

La corriente $i_f (\infty)$, referida del arrollamiento f de la máquina modelo al correspondiente arrollamiento real, conserva su amplitud y queda magnitud unidireccional. Y así la corriente del arrollamiento de excitación durante el funcionamiento en cortocircuito permanente (expresada en A) resulta:

$$[11] \quad I_{f(\infty)} = i_{f(\infty)} = \frac{\dot{E}_c \delta}{X_{ad}} I_{fn}$$

4.6 Constante de tiempo subtransitoria de las corrientes unidireccionales de la máquina modelo y de las correspondientes magnitudes de la máquina real.

En los paragrafos 4.2 y 4.3 se han determinado los valores iniciales de las corrientes unidireccionales y alternas para los arrollamientos de la máquina modelo. Las hipótesis son dos: la primera incluye los efectos de los circuitos auxiliares rotóricos, la segunda los desprecia. Las evaluaciones fueron efectuadas considerando que se conservan los flujos concatenados de los arrollamientos recorridos por corrientes; se desprecian en consecuencia los terminos resistivos de las tensiones entre los terminales de los mismos arrollamientos. Se llega así a la determinación de los valores de las magnitudes unidireccionales y alternas que a causa de las hipótesis introducidas, resultan de amplitud constante.

Tomamos ahora en consideración las corrientes unidireccionales; relevamos del paragrafo 4.2 los valores subtransitorios, del paragrafo 4.3 en cambio los transitorios. Efectuamos entonces las diferencias entre los valores iniciales subtransitorios y los transitorios. Habremos así determinado los valores iniciales de las componentes subtransitorias. La componente unidireccional subtransitoria para el arrollamiento q del estator aquellas x_d y x_q del rotor es la única corriente que circula en ellos.

En realidad, como es obvio, las componentes subtransitorias de todas las corrientes unidireccionales tienen amplitudes que varían en el tiempo: en efecto, tienden a extinguirse mas o menos rapidamente según las resistencias propias de los arrollamientos auxiliares rotóricos dispuestos simetricamente a los dos ejes. La buscada ley de decremento de las componentes subtransitorias se puede facilmente determinar procediendo en la siguiente forma.

Se esquematiza ante todo el funcionamiento en cortocircuito de la máquina como resulta según los paragrafos 4.2 y 4.3. Esto implica asumir equivalente al cortocircuito la superposición del funcionamiento bajo carga con uno ficticio. En caso de que los arrollamientos rotoricos sean desexcitados y cortocircuitados y sea aplicada a cada uno de los arrollamientos del estator una tensión de valor igual y contrario a aquella en carga.

Tomamos ahora en consideración para todas las magnitudes solo las corrientes unidireccionales y consideramos invariantes en el tiempo sus valores transitorios.

A este fin es necesario:

- Eliminar las corrientes alternas de las ecuaciones de funcionamiento ficticio de la máquina modelo introduciendo en las ecuaciones de las tensiones entre terminales de los arrollamientos d, q las condiciones:

$$p\dot{\Phi}_d = 0 \quad ; \quad p\dot{\Phi}_q = 0$$

- Realizar invariantes en el tiempo los valores transitorios de las corrientes unidireccionales despreciando las disipaciones de energía electromagnética en el arrollamiento f del rotor eliminando entonces el termino resistivo en la ecuación de la tensión en terminales de este arrollamiento.

La condición implica nulo el termino $p\dot{\Phi}_f$ ya que en funcionamiento ficticio es también nula la tensión e_f .

Los simbolos Δ'' expresan los valores instantáneos de las corrientes subtransitorias durante el funcionamiento ficticio **supuesto** y estos valores se consideran la suma de los instantáneos transitorios Δ' y de las componentes subtransitorias ($\Delta'' - \Delta'$).-

Si se introducen por fin en las relaciones entre los flujos y las tensiones entre los terminales de los arrollamientos las condiciones antes examinadas.

$$p\dot{\Phi}_d = 0 \quad , \quad p\dot{\Phi}_q = 0 \quad , \quad p\dot{\Phi}_f = 0$$

Se llega a las expresiones:

$$[1] \quad \dot{\Phi}_d'' = -\dot{i}_d[(\Delta''\dot{i}_d - \Delta'\dot{i}_d) + \Delta'\dot{i}_d] + \dot{i}_{ad}[(\Delta''\dot{i}_f - \Delta'\dot{i}_f) + \Delta'\dot{i}_f] + \dot{i}_{ad}\Delta''\dot{i}_{xd}$$

$$[2] \quad \dot{\Phi}_f'' = \dot{i}_{ff}[(\Delta''\dot{i}_f - \Delta'\dot{i}_f) + \Delta'\dot{i}_f] + \dot{i}_{ad}\Delta''\dot{i}_{xd} - \dot{i}_{ad}[(\Delta''\dot{i}_d - \Delta'\dot{i}_d) + \Delta'\dot{i}_d]$$

$$[3] \quad \dot{\Phi}_{xd}'' = \dot{i}_{xxd}\Delta''\dot{i}_{xd} + \dot{i}_{ad}[(\Delta''\dot{i}_f - \Delta'\dot{i}_f) + \Delta'\dot{i}_f] - \dot{i}_{ad}[(\Delta''\dot{i}_d - \Delta'\dot{i}_d) + \Delta'\dot{i}_d]$$

$$[4] \quad p\dot{\Phi}_d'' = 0$$

$$[5] \quad p\dot{\Phi}_f'' = 0$$

$$[6] \quad \dot{i}_{xd}\Delta''\dot{i}_{xd} + p\dot{\Phi}_{xd}'' = 0$$

$$[7] \quad \dot{\Phi}_q'' = -\dot{i}_q[(\Delta''\dot{i}_q - \Delta'\dot{i}_q) + \Delta'\dot{i}_q] + \dot{i}_{aq}\Delta''\dot{i}_{xq}$$

$$[8] \quad \dot{\Phi}_{xq}'' = \dot{i}_{xxq}\Delta''\dot{i}_{xq} - \dot{i}_{aq}[(\Delta''\dot{i}_q - \Delta'\dot{i}_q) + \Delta'\dot{i}_q]$$

$$[9] \quad p\dot{\Phi}_q'' = 0$$

$$[10] \quad \dot{i}_{xq}\Delta''\dot{i}_{xq} + p\dot{\Phi}_{xq}'' = 0$$

Donde $\Delta' i_d = \text{constante}$, $\Delta' i_f = \text{constante}$, $\Delta' i_q = \text{constante}$, mientras los terminos $\Delta' i_{xd}$, $\Delta' i_{xq}$ no aparecen porque tienen valor nulo.

Derivando la relación (2) e igualandola a cero como resulta de la (5) se obtiene

$$[11] \quad p \Delta'' i_f = \frac{i_{ad}}{i_{ff}} p \Delta'' i_d - \frac{i_{ad}}{i_{ff}} p \Delta'' i_{xd}$$

Mientras derivando la (1) e igualandola a cero como requiere la relación (4) se obtiene:

$$[12] \quad p \Delta'' i_f = \frac{i_d}{i_{ad}} p \Delta'' i_d - p \Delta'' i_{xd}$$

siendo $p \Delta' i_f = 0$, $p \Delta' i_d = 0$.

Las relaciones (11) y (12) permiten expresar la magnitud $p \Delta'' i_d$ en función de la $p \Delta'' i_{xd}$ y precisamente

$$\left(\frac{i_d}{i_{ad}} - \frac{i_{ad}}{i_{ff}} \right) p \Delta'' i_d = \left(1 - \frac{i_{ad}}{i_{ff}} \right) p \Delta'' i_{xd}$$

Desarrollando esta expresión y considerando el termino

$$\left(i_d - \frac{i_{ad}^2}{i_{ff}} \right) = i_d'$$

se encuentra

$$[13] \quad p \Delta'' i_d = \frac{i_{ad}(i_{ff} - i_{ad})}{i_d' i_{ff}} p \Delta'' i_{xd}$$

Por sustitución de las relaciones (12) y (13) en la (6) se obtiene

$$[14] \quad i_{xd} \Delta'' i_{xd} + \left[i_{xxd} + \frac{i_{ad} i_d (i_{ff} - i_{ad})}{i_d' i_{ff}} - i_{ad} - \frac{i_{ad}^2 (i_{ff} - i_{ad})}{i_d' i_{ff}} \right] p \Delta'' i_{xd} = 0$$

Operando sobre el termino

$$i_{xxd} + \frac{i_{ad} i_d (i_{ff} - i_{ad})}{i_d' i_{ff}} - i_{ad} - \frac{i_{ad}^2 (i_{ff} - i_{ad})}{i_d' i_{ff}}$$

las transformaciones que se han desarrollado en la nota I la relación (14) se transforma:

$$\Delta'' i_{xd} + \frac{i_d''}{i_d'} \left[\frac{1}{r_{xd}} \left(i_{xxd} - \frac{i_{ad}^2}{i_{ff}} \right) \right] p \Delta'' i_{xd} = 0$$

$$[15] \quad \Delta'' i_{xd} + \frac{\dot{X}_d''}{\dot{X}_d'} T_{d(0)}'' p \Delta'' i_{xd} = 0$$

Aquí el termino

$$[16] \quad \dot{T}_{d(0)}'' = \frac{1}{r_{xd}} \left(i_{xxd} - \frac{i_{ad}^2}{i_{ff}} \right) = \frac{1}{r_{xd}} \left(i_{lxd} + \frac{i_{ad} i_{ff} - i_{ad}^2}{i_{lf} + i_{ad}} \right) =$$

$$= \frac{1}{r_{xd}} \left(i_{lxd} + \frac{1}{\frac{1}{i_{ad}} + \frac{1}{i_{lf}}} \right)$$

es el valor correspondiente a la constante de tiempo subtransitoria directa correspondiente a los funcionamientos en vacío, mientras el término.

$$[17] \quad \frac{\dot{X}_d''}{\dot{X}_d'} T_{d(0)}'' = T_d''$$

es la constante de tiempo subtransitoria directa correspondiente a los funcionamientos en cortocircuito.

La integral general de la ecuación (15) debe también satisfacer la relación (48) del paragrafo 4.3 en el instante $t=0+$; por lo que asume la forma

$$\Delta'' i_{xd} = i_{xd(0)}'' e^{-t/T_d''}$$

en consecuencia

$$[19] \quad i_{xd} = \Delta'' i_{xd} = i_{xd(0)}'' e^{-t/T_d''} = \frac{\dot{X}_{lf}}{\dot{X}_{ad}(\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd})} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{e}_q''}{\dot{X}_d''} - \dot{e}_{c\delta} \right) e^{-t/T_d''}$$

De las relaciones (13) y (11) se puede relevar que las funciones $\Delta'' i_{xd}$, $(\Delta'' i_d - \Delta' i_d)$ y $(\Delta'' i_f - \Delta' i_f)$ tienen la misma constante de tiempo. En consecuencia para indicar las corrientes unidireccionales de los arrollamientos d,f de la máquina modelo se pueden escribir las relaciones siguientes

$$[21] \quad i_d = (\Delta'' i_d - \Delta' i_d) + \Delta' i_d + i_{ld} = (\Delta'' i_d - \Delta' i_d)_{t=0+} e^{-t/T_d''} +$$

$$+ \Delta' i_{dt=0+} + i_{ld} = (i_{d(0)}'' - i_{d(0)}') e^{-t/T_d''} + i_{d(0)}' =$$

$$= \left(\frac{\dot{e}_q''}{\dot{X}_d''} - \frac{\dot{e}_q'}{\dot{X}_d'} \right) e^{-t/T_d''} + \frac{\dot{e}_q'}{\dot{X}_d'}$$

siendo:

$$\Delta'' i_{dt=0+} + i_{ld} = i_{d(0)}'' \quad (\text{relación (34) paragrafo 4.3})$$

$$\Delta' i_{dt=0+} + i_{ld} = i_{d(0)}' \quad (\text{relación (21) paragrafo 4.4})$$

$$\begin{aligned} [22] \quad i_f &= (\Delta'' i_f - \Delta' i_f) + \Delta' i_f + i_{f(0)} = (\Delta'' i_f - \Delta' i_f)_{t=0+} e^{-t/T_d''} + \\ &+ \Delta' i_{ft=0+} + i_{f(0)} = (i_{f(0)}'' - i_{f(0)}') e^{-t/T_d''} + i_{f(0)}' = \\ &= \frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left\{ \left[\frac{\dot{X}_{lxd}}{\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd}} \dot{X}_d \frac{\dot{E}_q''}{\dot{X}_d''} + \frac{\dot{X}_{lf}}{\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd}} \dot{E}_{c\delta} - \dot{X}_d \frac{\dot{E}_q'}{\dot{X}_d'} \right] e^{-t/T_d''} + \dot{X}_d \frac{\dot{E}_q'}{\dot{X}_d'} \right\} \end{aligned}$$

siendo:

$$\Delta'' i_{ft=0+} + i_{f(0)} = i_{f(0)}'' \quad (\text{relación (49) paragrafo 4.3})$$

$$\Delta' i_{ft=0+} + i_{f(0)} = i_{f(0)}' \quad (\text{relación (32) paragrafo 4.4})$$

La corriente unidireccional i_d expresada en valores relativos con la relación (21) referida del arrollamiento d de la máquina modelo al arrollamiento de una fase de la máquina real, se convierte en alterna. Eligiendo como inicio del funcionamiento en cortocircuito el instante en el cual el eje magnetico de la fase "a" coincide con el eje directo, la componente directa de la corriente alterna de fase (expresada en (A)) asume los valores instantáneos:

fase a):

$$[23] \quad i_d = \sqrt{2} \left\{ \left(\frac{E_q''}{X_d''} - \frac{E_q'}{X_d'} \right) e^{-t/T_d''} + \frac{E_q'}{X_d'} \right\} \cos \omega t$$

Las corrientes unidireccionales i_{xd} , i_f expresadas en valores relativos con las relaciones (19) y (22) referidas de los arrollamientos x_d , f de la máquina modelo a los correspondientes del rotor de la máquina real (expresados en A) resultan

$$[24] \quad i_{xd} = \left[\frac{\dot{X}_{lf}}{\dot{X}_{ad}(\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd})} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{E}_q''}{\dot{X}_d''} - \dot{E}_{c\delta} \right) \right] I_{xdn} e^{-t/T_d''}$$

$$[25] \quad i_f = \frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left\{ \left[\frac{\dot{X}_{lxd}}{\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd}} \dot{X}_d \frac{\dot{E}_q''}{\dot{X}_d''} + \frac{\dot{X}_{lf}}{\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd}} \dot{E}_{c\delta} - \dot{X}_d \frac{\dot{E}_q'}{\dot{X}_d'} \right] e^{-t/T_d''} + \dot{X}_d \frac{\dot{E}_q'}{\dot{X}_d'} \right\} I_{fn}$$

Con respecto a las corrientes de los arrollamientos dispuestos simétricamente al eje q se puede proceder en la siguiente forma. Se deriva la relación (7) y en base a la relación (9) se la iguala a cero. Se obtiene la siguiente relación.

$$[26] \quad p \Delta'' i_q = \frac{\dot{I}_{aq}}{\dot{I}_q} p \Delta'' i_{xq}$$

Se deriva la relación (8) y se sustituye en ella la expresión (26)

$$[27] \quad p \dot{\Phi}_{xq}'' = i_{xxq} p \Delta'' i_{xq} - i_{aq} p \Delta'' i_q = i_{xxq} p \Delta'' i_{xq} - \frac{i_{aq}^2}{i_q} p \Delta'' i_{xq}$$

En base entonces a la relación (27), la (10) resulta:

$$[28] \quad i_{xd} \Delta'' i_{xq} + \left(i_{xxq} - \frac{i_{aq}^2}{i_q} \right) p \Delta'' i_{xq} = 0$$

Operando sobre el término $i_{xxq} - \frac{i_{aq}^2}{i_q}$ las transformaciones desarrolladas en la nota II la relación (28) asume la forma:

$$[29] \quad \Delta'' i_{xq} + \frac{i_q''}{i_q} \left(\frac{i_{xxq}}{i_{xq}} \right) p \Delta'' i_{xq} = 0$$

$$\Delta'' i_{xq} + \frac{\dot{X}_q''}{\dot{X}_q} T_{q(0)}'' p \Delta'' i_{xq} = 0$$

El término $T_{q(0)}''$ es el valor relativo de la constante de tiempo del arrollamiento x_q de la máquina modelo, mientras el término

$$[30] \quad \frac{\dot{X}_q''}{\dot{X}_q} T_{q(0)}''$$

es la constante de tiempo subtransitoria en cuadratura correspondiente a los funcionamientos en cortocircuito.-

La integral general de la ecuación (29) debe también satisfacer la relación (50) del paragrafo 4.3 en el instante $t=0+$; y por lo tanto asume la forma

$$\Delta'' i_{xq} = i_{xq(0)}'' e^{-t/T_q''}$$

consecuentemente

$$[31] \quad i_{xq} = \Delta'' i_{xq} = i_{xq(0)}'' e^{-t/T_q''} = \frac{\dot{X}_q}{\dot{X}_{aq}} \frac{\dot{e}_d''}{\dot{X}_q''} e^{-t/T_q''}$$

De la relación (26) se observa que las funciones i_{xq} y $(i_{iq} - i_q)$ tienen la misma constante de tiempo. La corriente unidireccional del arrollamiento q de la máquina modelo entonces se puede escribir con la relación

$$[32] \quad i_q = (\Delta'' i_q - \Delta' i_q) + \Delta' i_q + i_{lq} = (\Delta'' i_q - \Delta' i_q)_{t=0+} e^{-t/T_q''} + \Delta' i_{qt=0+} + i_{lq} = i_{q(0)}'' e^{-t/T_q''} = \frac{\dot{e}_d''}{\dot{X}_q''} e^{-t/T_q''}$$

siendo:

$$\Delta'' i_{qt=0+} + i_{lq} = i_{q(0)}'' \quad (\text{relación (37) paragrafo 4.3})$$

$$\Delta' i_{qt=0+} + i_{lq} = 0 \quad (\text{relación (20) paragrafo 4.4})$$

La corriente unidireccional i_q expresada en valores relativos con la relación (32), referida del arrollamiento q de la máquina modelo al arrollamiento de una fase de la máquina real se transforma en alterna.

Se elige como inicio del funcionamiento en cortocircuito el instante en el cual el eje magnético de la fase "a" coincide con el eje directo, la componente según el eje en cuadratura de la corriente alterna de fase (expresada en (A)) asume los valores instantáneos:

fase a):

$$[33] \quad i_q = \sqrt{2} \frac{E_d''}{X_q''} e^{-t/T_q''} \sin \omega t$$

La corriente unidireccional i_{xq} expresada en valores relativos con la relación (31), referida del arrollamiento xq de la máquina modelo al arrollamiento auxiliar del rotor de la máquina real (expresada en (A)) resulta

$$[34] \quad i_{xq} = \left(\frac{\dot{X}_q}{\dot{X}_{aq}} \frac{\dot{E}_d''}{\dot{X}_q''} \right) i_{xqn} e^{-t/T_q''}$$

NOTA I:

$$\begin{aligned} i_{xxd} + \frac{i_{ad} i_d' (i_{ff}' - i_{ad}')}{i_d' i_{ff}'} - i_{ad}' - \frac{i_{ad}'^2 (i_{ff}' - i_{ad}')}{i_d' i_{ff}'} &= \\ &= \frac{1}{i_d' i_{ff}'} (i_{xxd} - i_d' i_{ff}' + i_{ad}' (i_{ff}' - i_{ad}') (i_d' - i_{ad}') - i_{ad}' i_d' i_{ff}') = \\ &= \frac{1}{i_d' i_{ff}'} (i_{lxd} i_d' i_{ff}' + i_{ad}' i_{lf}' i_{ld}') = \frac{1}{i_d' i_{ff}'} \left(i_{lxd} i_{ff}' \left(i_{ld}' + \frac{i_{lf}' i_{ad}'}{i_{ff}'} \right) + i_{ad}' i_{lf}' i_{ld}' \right) = \\ &= \frac{1}{i_d' i_{ff}'} (i_{lxd} i_{ff}' i_{ld}' + i_{lxd} i_{lf}' i_{ad}' + i_{ad}' i_{lf}' i_{ld}') = \\ &= \frac{1}{i_d' i_{ff}'} (i_{lxd} i_{lf}' i_{ld}' + i_{lxd} i_{ad}' i_{ld}' + i_{lf}' i_{ad}' i_{ld}' + i_{lxd} i_{lf}' i_{ad}') = \\ &= \frac{1}{i_d' i_{ff}'} [i_{ld}' (i_{lxd} i_{lf}' + i_{lxd} i_{ad}' + i_{lf}' i_{ad}') + i_{lxd} i_{lf}' i_{ad}'] = \\ &= \frac{1}{i_d' i_{ff}'} \left\{ i_{ld}' + \frac{i_{lxd} i_{lf}' i_{ad}'}{i_{lxd} i_{lf}' + i_{lxd} i_{ad}' + i_{lf}' i_{ad}'} [(i_{lf}' + i_{ad}') (i_{lxd}' + i_{ad}') - i_{ad}'^2] \right\} = \\ &= \frac{1}{i_d' i_{ff}'} [i_d'' (i_{ff}' i_{xxd} - i_{ad}'^2)] = \frac{i_d''}{i_d'} \left(i_{xxd} - \frac{i_{ad}'^2}{i_{ff}'} \right) \end{aligned}$$

NOTA II:

$$\left(i_{xxq} - \frac{i_{aq}^2}{i_q} \right) = \frac{1}{i_q} (i_q i_{xxq} - i_{aq}^2) = \frac{i_q''}{i_q} i_{xxq}$$

siendo:

$$\begin{aligned} i_q'' &= i_{lq} + \frac{i_{aq} i_{lxq}}{i_{xxq}} = i_q - i_{aq} + \frac{i_{aq} i_{lxq}}{i_{lxq} + i_{aq}} = \\ &= i_q - \frac{i_{aq}^2}{i_{xxq}} = \frac{i_q i_{xxq} - i_{aq}^2}{i_{xxq}} \end{aligned}$$

4.7 Constante de tiempo transitoria de las corrientes unidireccionales de la máquina modelo y de las correspondientes magnitudes de la máquina real.

Se han determinado en el paragrafo 4.3 los valores iniciales de las corrientes unidireccionales para los arrollamientos d, f de la máquina modelo, despreciando los efectos de los circuitos auxiliares rotoricos. Mientras que en el paragrafo 4.4 se han determinado los valores de las corrientes unidireccionales permanentes para los mismos arrollamientos de la máquina modelo. Las hipotesis introducidas para determinar los valores iniciales transitorios de las corrientes han realizado estas magnitudes de amplitud constante.

Para cada corriente se efectuan las diferencias entre los valores iniciales transitorios y los valores de regimen permanente de cortocircuito y se determinan así los valores de las componentes transitorias.-

En rigor las componentes tienen amplitudes variables en el tiempo y tienden a extinguirse mas o menos rapidamente según el valor de la resistencia propia del arrollamiento f de rotor. La busqueda del decremento para las componentes transitorias puede ser facilmente efectuada de la siguiente manera. El funcionamiento en cortocircuito de la máquina puede ser visto como equivalente a la superposición del funcionamiento en carga y uno ficticio.

En este último, el arrollamiento f del rotor es desexcitado y cortocircuitado, mientras se aplica una tensión de valor igual y contrario al existente antes del cortocircuito en el arrollamiento d del estator.

Tomemos en consideración para todas las magnitudes solo las unidireccionales y tengamos presente que durante el funcionamiento en cortocircuito permanente sus valores no varían en el tiempo.-

Es necesario introducir en la ecuación entre los terminales del arrollamiento d la condición

$$p \dot{\Phi}_d = 0$$

para eliminar las corrientes alternas de las ecuaciones de funcionamiento ficticio de las máquinas modelo. Para realizar variables en el tiempo los valores de las componentes transitorias de las corrientes unidireccionales, es necesario incluir los efectos de las disipaciones de energía electromagnetica en el arrollamiento f del rotor e incluir entonces el termino resistivo en la ecuación de la tensión en los terminales de dicho arrollamiento.

La condición implica que el término $p \Phi_f$ asume valores distintos de cero ya que en el funcionamiento ficticio es nula la tensión e_f .

Los simbolos Δ' expresan los valores instantaneos de las corrientes transitorias durante el funcionamiento ficticio supuesto las corrientes transitorias se consideran suma de los valores permanentes y de las componentes transitorias ($\Delta' - \Delta$). Introduciendo por fin en las relaciones de los flujos y de las tensiones entre los terminales de los arrollamientos las condiciones antes examinadas.

$$p \dot{\Phi}_d = 0 \quad p \dot{\Phi}_f \neq 0 \quad r_f \Delta' i_f \neq 0$$

Se llega a las expresiones

$$[1] \quad \dot{\Phi}_d' = -i_d[(\Delta' i_d - \Delta i_d) + \Delta i_d] + i_{ad} \Delta' i_f$$

$$[2] \quad \dot{\Phi}_f' = i_{ff} \Delta' i_f - i_{ad}[(\Delta' i_d - \Delta i_d) + \Delta i_d]$$

$$[3] \quad p \dot{\Phi}_d' = 0$$

$$[4] \quad r_f \Delta' i_f + p \dot{\Phi}_f' = 0$$

donde

$$[5] \quad \Delta i_d = \text{constante}$$

Derivando las relaciones (1) y (2)

$$[6] \quad p \dot{\Phi}_d' = -i_d p \Delta' i_d + i_{ad} p \Delta' i_f$$

$$[7] \quad p \dot{\Phi}_f' = i_{ff} p \Delta' i_f - i_d p \Delta' i_d$$

Igualando la relación (6) a cero se halla:

$$[8] \quad p \Delta' i_d = \frac{i_{ad}}{i_d} p \Delta' i_f$$

El termino $p \dot{\Phi}_f'$ de la relación (4) se puede substituir con la expresión (7).

En esta última el término $p \Delta' i_d$ con la expresión (8) Se obtiene así la ecuación diferencial:

$$r_f \Delta' i_f + i_{ff} p \Delta' i_f - \frac{i_{ad}^2}{i_d} p \Delta' i_f = 0$$

de la cual se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta' i_f + \frac{i_{ff}}{i_f} \left(1 - \frac{i_{ad}^2}{i_{ff} i_d} \right) p \Delta' i_f &= 0 \\ \Delta' i_f + \left[\frac{1}{i_d} \left(i_d - \frac{i_{ad}^2}{i_{ff}} \right) \right] \frac{i_{ff}}{i_f} p \Delta' i_f &= 0 \\ [9] \quad \Delta' i_f + \frac{\dot{X}'_d}{\dot{X}_d} T'_{d(0)} p \Delta' i_f &= 0 \end{aligned}$$

donde el término

$$[10] \quad T'_{d(0)} = \frac{i_{ff}}{i_f}$$

es el valor relativo de la constante de tiempo transitoria directa correspondiente a los funcionamientos vacío, mientras el término

$$[11] \quad \frac{\dot{X}'_d}{\dot{X}_d} T'_{d(0)} = T'_d$$

es la constante de tiempo transitoria directa correspondiente a los funcionamientos en cortocircuito.

La integral general de la ecuación (19) es una función del tipo

$$\Delta' i_f = \Delta' i_{ft=0+} e^{-t/T'_d} = (i'_{f(0)} - i_{f(0)}) e^{-t/T'_d}$$

El valor de la corriente $\Delta' i_f$ en el instante $t=0+$ se puede obtener de la relación (32) del paragrafo 4.4 y resulta:

$$\Delta' i_{ft=0+} = \frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left(\frac{\dot{X}_d}{\dot{X}'_d} \dot{e}'_q - \dot{e}_{c\delta} \right)$$

La corriente unidireccional del arrollamiento f se puede entonces expresar con la relación.

$$[12] \quad i_f = \Delta' i_f + i_{f0} = \frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left[\left(\frac{\dot{X}_d}{\dot{X}'_d} \dot{e}'_q - \dot{e}_{c\delta} \right) e^{-t/T'_d} + \dot{e}_{c\delta} \right]$$

De la relación (8) se releva que las funciones $\Delta' i_f$ y $(\Delta' i_d - \Delta i_d)$ tienen la misma constante de tiempo. La corriente unidireccional del arrollamiento d de la máquina modelo se puede entonces escribir con la relación

$$\begin{aligned} [13] \quad i_d &= (\Delta' i_d - \Delta i_d) + i_{ld} = (\Delta' i_{dt=0+} - \Delta i_d) e^{-t/T'_d} + i_{d(\infty)} = \\ &= (i'_{d(0)} - i_{d(\infty)}) e^{-t/T'_d} + i_{d(\infty)} = \left(\frac{\dot{e}'_q}{\dot{X}'_d} - \frac{\dot{e}_{c\delta}}{\dot{X}_d} \right) e^{-t/T'_d} + \frac{\dot{e}_{c\delta}}{\dot{X}_d} \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} \Delta' i_{dt=0+} + i_{ld} &= i'_{d(0)} & (\text{relación (21) paragrafo 4.4}) \\ \Delta i_d + i_{ld} &= i_{d(\infty)} & (\text{relación (5) paragrafo 4.5}) \end{aligned}$$

La corriente unidireccional i_d expresada en valores relativos con la relación (13) referida del arrollamiento d de la máquina modelo al arrollamiento de una fase de la máquina real, se transforma en una corriente alterna. Elijiendo como instante de inicio del funcionamiento en cortocircuito aquel en el cual el eje magnetico de la fase "a" coincide con el eje directo; la corriente alterna de fase (expresada en A)) asume los valores instantáneos.

fase a):

$$[14] \quad i_a = \sqrt{2} \left\{ \left(\frac{E'_q}{X'_d} - \frac{E_{c\delta}}{X_d} \right) e^{-t/T'_d} + \frac{E_{c\delta}}{X_d} \right\}$$

La corriente unidireccional, expresada en valores relativos con la relación (12) referida del arrollamiento f de la máquina modelo al arrollamiento inductor del rotor de la máquina real (expresado en A) resulta

$$[15] \quad i_f = \frac{1}{X_{ad}} \left[\left(\frac{\dot{X}_d}{X'_d} \dot{E}'_q - \dot{E}_{c\delta} \right) i_{fn} e^{-t/T'_d} + \dot{E}_{c\delta} \right] i_{fn}$$

4.8 Constante de tiempo de las corrientes alternas de los arrollamientos de la máquina modelo y de las correspondientes magnitudes de la máquina real.-

Las corrientes alternas que circulan en los arrollamientos del estator y del rotor de la máquina modelo durante un funcionamiento en cortocircuito, se han examinado en los paragrafos 4.3 y 4.4. Las amplitudes de corrientes han resultado invariables en el tiempo porque el fenomeno ha sido estudiado como si los flujos concatenados en el instante inicial del cortocircuito por los arrollamientos de la misma máquina fuesen sostenidos, despreciando entonces las disipaciones de las energías electromagneticas en las resistencias de los arrollamientos. En realidad las corrientes alternas de todos los arrollamientos se extinguen con ley exponencial con constante de tiempo mas o menos breve, según las resistencias d, q del estator. En efecto tales corrientes tienen origen en el hecho que las amplitudes de las corrientes unidireccionales circulantes en los funcionamientos precedentes al cortocircuito, no pueden sufrir variaciones de amplitud en el instante de la falla.

Las corrientes alternas de los arrollamientos de la máquina modelo tienen como correspondiente en la máquina real las corrientes alternas de los arrollamientos rotóricos, las corrientes unidireccionales y armónicas de segundo orden en los arrollamientos estatoricos. Generalmente la constante de tiempo de dichas corrientes se puede considerar aproximadamente igual a la relación entre la inductancia de secuencia negativa y la resistencia de una fase del inducido.

$$T_a = \frac{l_2}{r_a}$$

En esta relación la inductancia l_2 resulta el valor medio de los que asume la inductancia de fase de inducido, si en el instante en el cual inicia el cortocircuito el eje magnetico de la fase coincide con el directo o bien con el eje en cuadratura.

4.9 Corrientes en los arrollamientos estatoricos y rotoricos de las máquinas sincronicas durante un funcionamiento en cortocircuito trifasico.-

En los capitulos precedentes se han estudiado los valores y las variaciones de las corrientes que circulan en los arrollamientos de una máquina sincronica durante su funcionamiento en cortocircuito en base al comportamiento de una máquina modelo, a su vez obtenida de la máquina real con la transformación de Park. A su vez las corrientes en la máquina modelo han sido referidas a los arrollamientos de la máquina real.

Las relaciones obtenidas con este procedimiento serán agrupadas en los puntos 4.9.1 y 4.9.2 indicando las condiciones características de su empleo.

Máquinas Modelo

4.9.1. Valores iniciales subtransitorios de las corrientes de cortocircuito unidireccionales y alternas.-

$$[1] \quad d) \quad \dot{i}_d = \frac{\dot{e}_d''}{\dot{X}_d''} - \frac{\dot{u}}{\dot{X}_d''} \cos(\omega t + \delta) = \dot{i}_{d(0)}'' - \frac{\dot{u}}{\dot{X}_d''} \cos(\omega t + \delta)$$

$$[2] \quad q) \quad \dot{i}_q = -\frac{\dot{e}_q''}{\dot{X}_q''} + \frac{\dot{u}}{\dot{X}_q''} \sin(\omega t + \delta) = -\dot{i}_{q(0)}'' + \frac{\dot{u}}{\dot{X}_q''} \sin(\omega t + \delta)$$

$$[3] \quad f) \quad \dot{i}_f = \left[\frac{\dot{X}_{lxd}}{\dot{X}_{ad}(\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd})} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{e}_q''}{\dot{X}_d''} \right) + \frac{\dot{X}_{lf}}{\dot{X}_{ad}(\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd})} \dot{e}_c \delta \right] -$$

$$- \left[\frac{\dot{X}_{lxd}}{\dot{X}_{ad}(\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd})} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{e}_q''}{\dot{X}_d''} - \dot{e}_c \delta \right) \right] \cos \omega t$$

$$[4] \quad xd) \quad \dot{i}_{xd} = \frac{\dot{X}_{lf}}{\dot{X}_{ad}(\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd})} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{e}_q''}{\dot{X}_d''} - \dot{e}_c \delta \right) (1 - \cos \omega t) =$$

$$= \dot{i}_{xd(0)}'' (1 - \cos \omega t)$$

$$[5] \quad xq) \quad \dot{i}_{xq} = -\frac{\dot{X}_q}{\dot{X}_{aq}} \frac{\dot{e}_d''}{\dot{X}_q''} + \frac{\dot{X}_q - \dot{X}_q''}{\dot{X}_{aq} \dot{X}_q''} \dot{u} \sin(\omega t + \delta) =$$

$$= -\dot{i}_{xq(0)}'' + \frac{\dot{X}_q - \dot{X}_q''}{\dot{X}_{aq} \dot{X}_q''} \dot{u} \sin(\omega t + \delta)$$

Valores iniciales transitorios de las corrientes de cortocircuito unidireccionales y alternas.

$$[6] \quad d) \quad \dot{i}_d = \frac{\dot{e}_d'}{\dot{X}_d'} - \frac{\dot{u}}{\dot{X}_d'} \cos(\omega t + \delta) = \dot{i}_{d(0)}' - \frac{\dot{u}}{\dot{X}_d'} \cos(\omega t + \delta)$$

$$[7] \quad q) \quad \dot{i}_q = \frac{\dot{u}}{\dot{X}_q} \sin(\omega t + \delta)$$

$$[8] \quad f) \quad \dot{i}_f = \left[\frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{e}'_q}{\dot{X}'_d} \right) \right] - \left[\frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{e}'_q}{\dot{X}'_d} - \dot{e}_c \delta \right) \right] \cos \omega t$$

$$[9] \quad xd) \quad \dot{i}_{xd} = 0$$

$$[10] \quad xq) \quad \dot{i}_{xq} = 0$$

Valores de las corrientes de cortocircuito unidireccionales permanentes. -

$$[11] \quad d) \quad \dot{i}_d = \frac{\dot{e}_c \delta}{\dot{X}_d} = \dot{i}_{d(\infty)}$$

$$[12] \quad q) \quad \dot{i}_q = 0$$

$$[13] \quad f) \quad \dot{i}_f = \frac{\dot{e}_c \delta}{\dot{X}_{ad}} = \dot{i}_{f(\infty)} = \dot{i}_{f(0)}$$

$$[14] \quad xd) \quad \dot{i}_{xd} = 0$$

$$[15] \quad xq) \quad \dot{i}_{xq} = 0$$

Componentes subtransitorias de las corrientes de cortocircuito unidireccionales.

$$[16] \quad d) \quad (\Delta'' \dot{i}_d = \Delta' \dot{i}_d) e^{-t/T_d''}$$

$$(\dot{i}_{d(0)}'' = \dot{i}_{d(0)}') e^{-t/T_d''}$$

$$[17] \quad q) \quad (\Delta'' \dot{i}_q = \Delta' \dot{i}_q) e^{-t/T_q''}$$

$$\dot{i}_{q(0)}'' e^{-t/T_q''}$$

$$[18] \quad f) \quad (\Delta'' \dot{i}_f = \Delta' \dot{i}_f) e^{-t/T_d''}$$

$$(\dot{i}_{f(0)}'' = \dot{i}_{f(0)}') e^{-t/T_d''}$$

$$[19] \quad xd) \quad \dot{i}_{xd(0)}'' e^{-t/T_d''}$$

$$[20] \quad xq) \quad \dot{i}_{xq(0)}'' e^{-t/T_q''}$$

Componentes transitorias de las corrientes de cortocircuito unidireccionales.

$$[21] \quad d) \quad (\Delta' \dot{i}_d = \Delta \dot{i}_d) e^{-t/T_d'}$$

$$(\dot{i}_{d(0)}' = \dot{i}_{d(\infty)}') e^{-t/T_d'}$$

$$[22] \quad f) \quad \Delta' \dot{i}_f e^{-t/T_d'} = (\dot{i}_{f(0)}' - \dot{i}_{f(\infty)}') e^{-t/T_d'}$$

Corrientes de cortocircuito unidireccionales de las máquinas con espiras amortiguadoras o circuitos auxiliares rotoricos.-

$$\begin{aligned}
 [23] \quad \dot{i}_d &= (\dot{i}_{d(0)} - \dot{i}_{d(0)}'') e^{-t/T_d''} + (\dot{i}_{d(0)}' - \dot{i}_{d(\infty)}') e^{-t/T_d'} + \dot{i}_{d(\infty)} \\
 [24] \quad \dot{i}_q &= \dot{i}_{q(0)}'' e^{-t/T_q''} \\
 [25] \quad \dot{i}_f &= (\dot{i}_{f(0)}' - \dot{i}_{f(0)}'') e^{-t/T_d''} + (\dot{i}_{f(0)} - \dot{i}_{f(0)}') e^{-t/T_d'} + \dot{i}_{f(\infty)} \\
 [26] \quad x_d) \quad \dot{i}_{xd} &= \dot{i}_{xd(0)}'' e^{-t/T_d''} \\
 [27] \quad x_q) \quad \dot{i}_{xq} &= \dot{i}_{xq(0)}'' e^{-t/T_q''}
 \end{aligned}$$

Corrientes de cortocircuito alternas en las máquinas con espiras amortiguadoras o circuitos auxiliares rotoricos.-

$$\begin{aligned}
 [28] \quad \dot{i}_d &= -\frac{\dot{u}}{\dot{X}_d''} e^{-t/T_a} \cos(\omega t + \delta) \\
 [29] \quad \dot{i}_q &= -\frac{\dot{u}}{\dot{X}_q''} e^{-t/T_a} \sin(\omega t + \delta) \\
 [30] \quad \dot{i}_f &= -\left[\frac{\dot{X}_{lxd}}{\dot{X}_{ad}(\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd})} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{e}_q''}{\dot{X}_d''} - \dot{e}_c \delta \right) \right] e^{-t/T_a} \cos \omega t \\
 [31] \quad \dot{i}_{xd} &= -\left[\frac{\dot{X}_{lf}}{\dot{X}_{ad}(\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd})} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{e}_q''}{\dot{X}_d''} - \dot{e}_c \delta \right) \right] e^{-t/T_a} \cos \omega t \\
 [32] \quad \dot{i}_{xq} &= \frac{\dot{X}_q - \dot{X}_q''}{\dot{X}_{aq} \dot{X}_q''} \dot{u} e^{-t/T_a} \sin(\omega t + \delta)
 \end{aligned}$$

Corrientes de cortocircuito unidireccionales de las máquinas sin espiras amortiguadoras o circuitos auxiliares rotoricos.

$$\begin{aligned}
 [33] \quad d) \quad \dot{i}_d &= (\dot{i}_{d(0)}' - \dot{i}_{d(\infty)}') e^{-t/T_d'} + \dot{i}_{d(\infty)} \\
 [34] \quad q) \quad \dot{i}_q &= 0 \\
 [35] \quad f) \quad \dot{i}_f &= (\dot{i}_{f(0)}' - \dot{i}_{f(\infty)}') e^{-t/T_d'} + \dot{i}_{f(\infty)}
 \end{aligned}$$

Corrientes de cortocircuito alternas de las máquinas sin espiras amortiguadoras o circuitos auxiliares rotoricos.

$$\begin{aligned}
 [36] \quad d) \quad \dot{i}_d &\sim -\frac{\dot{u}}{\dot{X}_d'} e^{-t/T_a} \cos(\omega t + \delta) \\
 [37] \quad q) \quad \dot{i}_q &\sim -\frac{\dot{u}}{\dot{X}_q} e^{-t/T_a} \sin(\omega t + \delta) \\
 [38] \quad f) \quad \dot{i}_f &\sim -\frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{e}_q'}{\dot{X}_d'} - \dot{e}_c \delta \right) e^{-t/T_a} \cos \omega t
 \end{aligned}$$

Nota: el valor de la constante de tiempo introducido en estas ultimas relaciones es distinto de aquel de la constante de tiempo que aparece en las relaciones de las maquinas con espiras amortiguadoras o circuitos auxiliares rotoricos. En efecto la presencia de las espiras amortiguadoras y de los circuitos auxiliares rotoricos que se forman en el hierro no suficientemente laminado de las estructuras rotoricas, reduce los valores iniciales de las inductancias de fase del inductor.

Máquina Real

4.9.2 Corrientes de cortocircuito alternas de fase de inducido de las máquinas sincronicas con espiras amortiguadoras o circuitos auxiliares rotoricos.

fase a)

$$[1] \quad i_a = \sqrt{2} \left\{ \left[\left(\frac{E_q''}{X_d''} - \frac{E_q'}{X_d'} \right) e^{-t/T_d''} + \left(\frac{E_q'}{X_d'} - \frac{E_c \delta}{X_d} \right) e^{-t/T_d'} + \frac{E_c \delta}{X_d} \right] \cos(\omega t + \psi) + \frac{E_d''}{X_q''} e^{-t/T_q''} \sin(\omega t + \psi) \right\}$$

fase b)

$$[2] \quad i_b = \sqrt{2} \left\{ \left[\left(\frac{E_q''}{X_d''} - \frac{E_q'}{X_d'} \right) e^{-t/T_d''} + \left(\frac{E_q'}{X_d'} - \frac{E_c \delta}{X_d} \right) e^{-t/T_d'} + \frac{E_c \delta}{X_d} \right] \cos\left(\omega t + \psi - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{E_d''}{X_q''} e^{-t/T_q''} \sin\left(\omega t + \psi - \frac{2\pi}{3}\right) \right\}$$

fase c)

$$[3] \quad i_c = \sqrt{2} \left\{ \left[\left(\frac{E_q''}{X_d''} - \frac{E_q'}{X_d'} \right) e^{-t/T_d''} + \left(\frac{E_q'}{X_d'} - \frac{E_c \delta}{X_d} \right) e^{-t/T_d'} + \frac{E_c \delta}{X_d} \right] \cos\left(\omega t + \psi + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{E_d''}{X_q''} e^{-t/T_q''} \sin\left(\omega t + \psi + \frac{2\pi}{3}\right) \right\}$$

Corrientes de cortocircuito unidireccionales y armonicas de segundo orden de las máquinas sincronicas con espiras amortiguadoras o circuitos auxiliares rotoricos.-

fase a)

$$[4] \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \left[U \cos(\psi - \delta) \left(\frac{X_q'' + X_d''}{X_d'' X_q''} \right) \right] e^{-t/T_a} - \frac{\sqrt{2}}{2} \left[U \left(\frac{X_q'' - X_d''}{X_d'' X_q''} \right) \right] \cos(2\omega t + \psi + \delta) e^{-t/T_a}$$

fase b)

$$[5] \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \left[U \cos\left(\psi - \delta - \frac{2\pi}{3}\right) \left(\frac{X_q'' + X_d''}{X_d'' X_q''} \right) \right] e^{-t/T_a} - \frac{\sqrt{2}}{2} \left[U \left(\frac{X_q'' - X_d''}{X_d'' X_q''} \right) \right] \cos\left(2\omega t + \psi + \delta - \frac{2\pi}{3}\right) e^{-t/T_a}$$

fase c)

$$[6] \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \left[U \cos\left(\psi - \delta + \frac{2\pi}{3}\right) \left(\frac{X_q'' + X_d''}{X_d'' X_q''} \right) \right] e^{-t/T_a} - \frac{\sqrt{2}}{2} \left[U \left(\frac{X_q'' - X_d''}{X_d'' X_q''} \right) \right] \cos\left(2\omega t + \psi + \delta + \frac{2\pi}{3}\right) e^{-t/T_a}$$

Corrientes unidireccionales de los arrollamientos rotoricos de las máquinas sincronicas con espiras amortiguadoras o circuitos auxiliares rotoricos.

$$[7] f) \quad i_f = \frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left\{ \left[\frac{\dot{X}_{lxd}}{\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd}} \dot{X}_d \frac{\dot{E}_q''}{\dot{X}_d''} + \frac{\dot{X}_{lf}}{\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd}} \dot{E}_{c\delta} - \dot{X}_d \frac{\dot{E}_q'}{\dot{X}_d'} \right] e^{-t/T_d''} + \left[\left(\dot{X}_d \frac{\dot{E}_d'}{\dot{X}_d'} - \dot{E}_{c\delta} \right) e^{-t/T_d'} + \dot{E}_{c\delta} \right] l_{fn} \right\}$$

$$[8] xd) \quad i_{xd} = \frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left[\frac{\dot{X}_{lf}}{\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd}} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{E}_q''}{\dot{X}_d''} - \dot{E}_{c\delta} \right) \right] e^{-t/T_d''} l_{xdn}$$

$$[9] xq) \quad i_{xq} = \frac{1}{\dot{X}_{aq}} \left(\dot{X}_q \frac{\dot{E}_q''}{\dot{X}_q''} \right) e^{-t/T_q''} l_{xqn}$$

Corrientes alternas en los arrollamientos rotoricos de las máquinas sincronicas con espiras amortiguadoras o circuitos auxiliares rotoricos.

Las expresiones siguientes solo son aplicables cuando el ángulo de cupla δ es pequeño.

$$[10] f) \quad i_f = - \frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left[\frac{\dot{X}_{lxd}}{\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd}} \dot{X}_d \frac{\dot{E}_q''}{\dot{X}_d''} - \frac{\dot{X}_{lxd}}{\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd}} \dot{E}_{c\delta} \right] e^{-t/T_a} l_{fn} \cos \omega t$$

$$[11] xd) \quad i_{xd} = - \frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left[\frac{\dot{X}_{lf}}{\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd}} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{E}_q''}{\dot{X}_d''} - \dot{E}_{c\delta} \right) \right] e^{-t/T_a} l_{xdn} \cos \omega t$$

$$[12] xq) \quad i_{xq} = - \frac{1}{\dot{X}_{aq}} \left(\dot{X}_q \frac{\dot{E}_q''}{\dot{X}_q''} \right) e^{-t/T_a} l_{xqn} \sin \omega t$$

Corrientes de cortocircuito alternas de las fases de inducido de las máquinas sincronicas sin espiras amortiguadoras ni circuitos auxiliares rotoricos.

fase a)

$$[13] \quad i_a = \sqrt{2} \left[\left(\frac{E_q'}{\dot{X}_d'} - \frac{E_{c\delta}}{\dot{X}_d} \right) e^{-t/T_d'} + \frac{E_{c\delta}}{\dot{X}_d} \right] \cos(\omega t + \psi)$$

fase b)

$$[14] \quad i_b = \sqrt{2} \left[\left(\frac{E_q'}{\dot{X}_d'} - \frac{E_{c\delta}}{\dot{X}_d} \right) e^{-t/T_d'} + \frac{E_{c\delta}}{\dot{X}_d} \right] \cos \left(\omega t + \psi - \frac{2\pi}{3} \right)$$

fase c)

$$[15] \quad i_c = \sqrt{2} \left[\left(\frac{E_q'}{\dot{X}_d'} - \frac{E_{c\delta}}{\dot{X}_d} \right) e^{-t/T_d'} + \frac{E_{c\delta}}{\dot{X}_d} \right] \cos \left(\omega t + \psi + \frac{2\pi}{3} \right)$$

Corriente de cortocircuito unidireccionales y armónicas de segundo orden de las máquinas sincrónicas sin espiras amortiguadoras ni circuitos auxiliares rotoricos.

fase a)

$$[16] \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \left[U \cos(\psi - \delta) \left(\frac{X_q + X'_d}{X'_d X_q} \right) \right] e^{-t/T_a} - \frac{\sqrt{2}}{2} \left[U \left(\frac{X_q - X'_d}{X'_d X_q} \right) \right] \cos(2\omega t + \psi + \delta) e^{-t/T_a}$$

fase b)

$$[17] \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \left[U \cos\left(\psi - \delta - \frac{2\pi}{3}\right) \left(\frac{X_q + X'_d}{X'_d X_q} \right) \right] e^{-t/T_a} - \frac{\sqrt{2}}{2} \left[U \left(\frac{X_q - X'_d}{X'_d X_q} \right) \right] \cos\left(2\omega t + \psi + \delta - \frac{2\pi}{3}\right) e^{-t/T_a}$$

fase c)

$$[18] \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \left[U \cos\left(\psi - \delta + \frac{2\pi}{3}\right) \left(\frac{X_q + X'_d}{X'_d X_q} \right) \right] e^{-t/T_a} - \frac{\sqrt{2}}{2} \left[U \left(\frac{X_q - X'_d}{X'_d X_q} \right) \right] \cos\left(2\omega t + \psi + \delta + \frac{2\pi}{3}\right) e^{-t/T_a}$$

Corriente unidireccional del arrollamiento inductor.

$$[19] \quad f) \quad i_f = \frac{1}{X_{ad}} \left[\left(\dot{X}_d \frac{\dot{E}'_q}{X'_d} - \dot{E}_c \delta \right) e^{-t/T'_d} + \dot{E}_c \delta \right] I_{fn}$$

$$[20] \quad f) \quad i_f = \frac{1}{X_{ad}} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{E}'_q}{X'_d} \right) e^{-t/T_a} I_{fn} \cos \omega t$$

4.10 Corrientes en los arrollamientos estatoricos y rotoricos de las máquinas sincrónicas equipadas con reguladores de tensión.

Consideremos una falla en terminales de las fases de inducido de una máquina sincrónica equipada con un regulador de tensión. La actuación del regulador tiende a variar la tensión de excitación; en consecuencia las variaciones de la corriente unidireccional del arrollamiento inductor y de las corrientes alternas de las fases de inducido durante el cortocircuito difieren de aquellas que se han ilustrado precedentemente.

El estudio de estas corrientes se puede efectuar aplicando el método presentado en el capítulo 3.

En particular debe tenerse presente:

- los valores iniciales de las corrientes de las fases de inducido y de las corrientes de los arrollamientos rotoricos no son influenciados por la actuación del regulador de tensión ya que se manifiestan solo cuando se ha establecido la falla.
- las componentes subtransitorias de las corrientes de estator y de rotor para las máquinas sincrónicas con espiras amortiguadoras o circuitos auxiliares rotoricos, no resienten de la actuación de los reguladores de tensión.

Eliminando la componente subtransitoria de la corriente unidireccional del inductor quedan tres componentes: una permanente y dos exponenciales. Las constantes de tiempo de las funciones exponenciales son iguales a la constante de tiempo transitoria de cortocircuito (T'_d) y a aquella de la respuesta de la excitatriz (T_e).

La corriente unidireccional del arrollamiento inductor satisface entonces la relación.

$$[1] \quad i_f = (\alpha + \beta e^{-t/T'_d} + \gamma e^{-t/T_e})$$

en la cual las constantes α , β , γ de la (1) se pueden obtener de los valores en el contorno de la misma función.

a) inicio del funcionamiento en cortocircuito $t=0+$

El regulador de tensión no puede variar instantáneamente la tensión de excitación, por lo tanto al iniciar la perturbación, el incremento de la corriente unidireccional de excitación dependerá de la variación de la fuerza magneto motriz de las corrientes alternas de inducido.-

$$[2] \quad i_{ft=0+} = \frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{E}'_q}{\dot{X}'_d} \right) = \alpha + \beta + \gamma$$

$$[3] \quad \left(\frac{di_f}{dt} \right)_{t=0+} = - \frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{E}'_q}{\dot{X}'_d} - \dot{E}_c \delta \right) \frac{1}{T'_d} = - \frac{\beta}{T'_d} - \frac{\gamma}{T_e}$$

b) Extinción de todas las componentes variables de la corriente de excitación $t=\infty$

La corriente unidireccional de excitación a partir del instante indicado no puede asumir mas que un valor congruente con aquel alcanzado en el mismo instante por la tensión de excitación.

Indicado tal valor con E_∞ resulta:

$$[4] \quad i_{ft=\infty} = \alpha = \frac{\dot{E}_\infty}{\dot{X}_{ad}}$$

De las relaciones (2) y (4) se obtiene

$$[5] \quad \gamma = \frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{E}'_q}{\dot{X}'_d} \right) - \alpha - \beta = \frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{E}'_q}{\dot{X}'_d} - \dot{E}_\infty \right) - \beta$$

De la relación (3)

$$[6] \quad \beta T_e + \gamma T'_d = \frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{E}'_q}{\dot{X}'_d} - \dot{E}_c \delta \right) T_e$$

Introduciendo la relación (5) en la (6) es eliminada la constante γ :

$$[7] \quad -\beta(T'_d - T_e) + \frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{E}'_q}{\dot{X}'_d} - \dot{E}_\infty \right) T'_d = \frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{E}'_q}{\dot{X}'_d} - \dot{E}_c \delta \right) T_e$$

Resolviendo la (7) respecto de β se obtiene:

$$[8] \quad \beta = \frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{E}'_q}{\dot{X}'_d} - \dot{E}_\infty \right) \frac{T'_d}{T'_d - T_e} - \frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left(\dot{X}_d \frac{\dot{E}'_d}{\dot{X}'_d} - \dot{E}_{c\delta} \right) \frac{T_e}{T'_d - T_e}$$

De las relaciones (5) y (8) se obtiene

$$[9] \quad \dot{\gamma} = \frac{1}{\dot{X}_{ad}} (\dot{E}_\infty - \dot{E}_{c\delta}) \frac{T_e}{T'_d - T_e}$$

Sustituyendo en la relación (1) los valores de las constantes se obtiene

$$[10] \quad i_f = \frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left[\left(\dot{X}_d \frac{\dot{E}'_q}{\dot{X}'_d} - \dot{E}_{c\delta} \right) e^{-t/T'_d} + \dot{E}_{c\delta} \right] + (\dot{E}_\infty - \dot{E}_{c\delta}) f(t)$$

donde

$$[11] \quad f(t) = 1 - \left(\frac{T'_d e^{-t/T'_d} - T_e e^{-t/T_e}}{T'_d - T_e} \right)$$

La corriente de excitación está constituida en las máquinas con espiras amortiguadoras y circuitos auxiliares rotoricos ademas que por los términos de la relación (10) también por la componente subtransitoria: su expresión puede ser obtenida de la relación (7) del paragrafo 4.8.2 y de la relación (10) del paragrafo 4.10 y exactamente.

$$[12] \quad i_f = \frac{1}{\dot{X}_{ad}} \left\{ \left[\frac{\dot{X}_{lxd}}{\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd}} \dot{X}_d \frac{\dot{E}''_q}{\dot{X}''_d} + \frac{\dot{X}_{lf}}{\dot{X}_{lf} + \dot{X}_{lxd}} \dot{E}_{c\delta} - \dot{X}_d \frac{\dot{E}'_q}{\dot{X}'_d} \right] e^{-t/T''_d} + \left(\dot{X}_d \frac{\dot{E}'_q}{\dot{X}'_d} - \dot{E}_{c\delta} \right) e^{-t/T'_d} + \dot{E}_{c\delta} + (\dot{E}_\infty - \dot{E}_{c\delta}) f(t) \right\} I_{fn}$$

También las corrientes alternas en las fases de inducido, a causa de la actuación del regulador de tensión sufren un incremento. Teniendo en cuenta los valores asumidos durante el funcionamiento en cortocircuito por la corriente unidireccional del circuito inductor, resulta que el regulador de tensión varía solo los valores instantáneos de las componentes transitorias y sostenidas. En base a la relación (1) del paragrafo 4.8.2 y a la (12) del paragrafo 4.9 se obtiene la siguiente:

(fase α)

$$[13] \quad i_a = -\sqrt{2} \left\{ \left[\left(\frac{E''_q}{\dot{X}''_d} - \frac{E'_q}{\dot{X}'_d} \right) e^{-t/T''_d} + \left(\frac{E'_q}{\dot{X}'_d} - \frac{E_{c\delta}}{\dot{X}_d} \right) e^{-t/T'_d} + \frac{E_{c\delta}}{\dot{X}_d} + \left(\frac{E_\infty}{\dot{X}_d} - \frac{E_{c\delta}}{\dot{X}_d} \right) f(t) \right] \cos(\omega t + \psi) + \frac{E''_d}{\dot{X}''_q} e^{-t/T''_q} \right\} \sin(\omega t + \psi)$$

Las corrientes alternas de otras fases se evalúan con relaciones análogas a la relación (13) agregando a los ángulos $\omega t + \psi$ los respectivos ángulos $-2\pi/3$, y $+2\pi/3$. La corriente alterna para el arrollamiento f, como también las corrientes unidireccionales y de segunda armónica para las fases de inducido, no son influenciadas por el regulador de tensión, entonces sus valores instantáneos son aquellos de las expresiones del paragrafo 4.8.2.-

4.11 Notas al capítulo 4º.

Las relaciones de las corrientes de cortocircuito para las fases del inducido de las máquinas sincronicas obtenidas en los paragrafos 4.8.2 y 4.9 corresponden a las estudiadas en los capítulos 1 y 2. Para lograrlas también formalmente iguales, es necesario considerar que las tensiones internas son evidenciadas con simbolos distintos: al símbolo d de los capítulos 1 y 2 se ha substituído en el capítulo 4 el símbolo q y viceversa. La substitución es hecha obviamente para las tensiones internas que figuran también en las relaciones de las corrientes rotóricas indicadas en los paragrafos 4.8.2. y 4.9 - El capítulo 4 en cambio es dedicado solo al funcionamiento de las máquinas sincronicas debido a una falla trifasica aislada de tierra entre los terminales de las fases de inducido. El tratado puede ser extendido a los cortocircuitos trifasicos aislados de tierra en un punto cualquiera de los circuitos exteriores al inducido. Cuando la impedancia externa vista en el punto de falla respecto a los terminales de la máquina sea substancialmente inductiva, se pueden adoptar aún para las corrientes de todos los arrollamientos las relaciones de los paragrafos 4.8.2 y 4.9

Es logico que se deba sumar a los valores de las reactancias funcionales X''_d , X''_q , X'_d , X'_q que aparecen en las expresiones de las corrientes y de las constantes de tiempo el valor de la reactancia de fase de los circuitos externos.

En el capítulo 4 han sido considerados nulos los valores de la corriente, de la tensión y del flujo en el arrollamiento 0 de la máquina modelo, a causa del tipo de cortocircuito. Por lo que se refiere a los funcionamientos en cortocircuito desequilibrados es necesario examinar las variaciones de las magnitudes del arrollamiento 0, transformar sucesivamente los valores instantáneos de las magnitudes de los tres arrollamientos d , q , 0 en los valores instantáneos de las magnitudes de las fases a , b , c de la máquina real.-