TEORÍA DE COMUNICACIONES - AÑO 2004

Cálculo del espectro de señales PAM

1. Repaso de DEE y DEP

- *Señales de energía*

En las señales con energía finita, el módulo cuadrado de su transformada de Fourier (TF) nos da su distribución espectral de energía. Si $x(t)$ es una señal de energía, y $X(f)$ su TF, tenemos que

$$d.e.e.\{x(t)\} \triangleq |X(f)|^2 = \mathcal{F}\{r_{xx}(\tau)\} \tag{1}$$

en donde $r_{xx}(\tau)$ es la función de autocorrelación de $x(t)$,

$$r_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t+\tau)\, dt$$

El motivo de esta definición es el teorema de Parseval,

$$\mathit{Energía}\{x(t)\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt \overset{\downarrow}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\, df \tag{2}$$

es decir, $|X(f)|^2$ nos dice como se distribuye la energía de $x(t)$ en el espectro.

- *Señales de potencia*

Para las señales de potencia finita, si bien usualmente es posible calcular su TF generalizada (usando deltas), en general no podemos calcular su módulo al cuadrado (justamente cuando hay deltas). Sin embargo, de la misma forma en que calculamos la potencia media de estas señales, podemos calcular cómo se distribuye su potencia en "cada frecuencia" del espectro, es decir su densidad espectral de potencia:

$$d.e.p.\{x(t)\} = s_{xx}(f) \triangleq \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda} |\mathcal{F}\{x_\lambda(t)\}|^2 \overset{\downarrow}{=} \mathcal{F}\{r_{xx}(\tau)\} \tag{3}$$

en donde $x(t)$ es una señal de potencia, $x_\lambda(t)$ es la versión esta señal truncada al intervalo $[-\lambda/2, \lambda/2]$ (es cero fuera del intervalo), y $r_{xx}(\tau)$ la función de autocorrelación de $x(t)$,

$$r_{xx}(\tau) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} x^*(t)x(t+\tau)\, dt$$

La igualdad señalada en (3) es la versión "temporal" del teorema de Wiener-Khintchine, que se puede probar de manera similar a éste úlitmo.

Cuando se trabaja con señales de potencia es útil definir la operación lineal de promedio temporal:

$$\langle f(t)\rangle \triangleq \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t)\, dt \tag{4}$$

Entonces $r_{xx}(\tau) = \langle x^*(t)x(t+\tau)\rangle$, y la versión dual de la ecuación (2) resulta:

$$Pot\{x(t)\} \triangleq \langle |x_\lambda(t)|^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_{xx}(f)\, df \tag{5}$$

- *Señales periódicas*

En la mayoría de los casos de interés las señales periódicas serán señales de potencia. En estos casos, utilizando la definición de *d.e.p.* ya vista y que:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda} sinc(\lambda f) \text{“}=\text{”} \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda} sinc^2(\lambda f) \text{“}=\text{”} \delta(f) \tag{6}$$

se demuestra que si $x(t)$ es un función periódica de período Λ y $c[n]$ son los coeficientes de su SF, entonces

$$s_{xx}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c^2[n]\ \delta(f - \frac{n}{\Lambda}) \tag{7}$$

Resultado que efectivamente verifica

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_{xx}(f)\ df = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c^2[n] = Pot\{x(t)\} \tag{8}$$

Es importante notar que al realizar el promedio temporal de una señal periódica basta promediarla en un período, es decir, para $g(t)$ periódica de período Λ

$$\langle g(t)\rangle \triangleq \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} g(t)\ dt = \frac{1}{\Lambda}\int_{\Lambda} g(t)\ dt \tag{9}$$

donde la última integral indica que el intervalo de integración es cualquiera de longitud Λ.

- *Señales aleatorias*

En el caso de tener un proceso aleatorio, $X(t)$, en el que cada realización es una señal de potencia finita podría definirse para cada una su correspodiente $s_{XX}(f)$, que entonces sería otro proceso aleatorio. En este caso la densidad espectral de potencia del proceso $X(t)$ podría definirse como la esperanza del proceso $s_{XX}(f)$. Sin embargo, lo común es pedir la condición de potencia media finita al proceso completo (es decir en media estadística). Entonces, como la potencia instantánea del proceso es $P(t) = \mathrm{E}\{|X(t)|^2\}$, la condición que pediremos es que

$$\langle P(t)\rangle = \langle \mathrm{E}\{|X(t)|^2\}\rangle < +\infty \tag{10}$$

Esto no garantiza que cada realización sea una señal de potencia y por ello no se define la densidad espectral por realizaciones (aunque sí asegura que todo el conjunto de realizaciones con potencia infinita tiene probabilidad nula). Luego, para definir la densidad espectral del proceso lo que se hace es promediar estadísticamnte antes de tomar el límite que realiza la promediación temporal, resultando la siguiente definición ampliamente utilizada

$$D.E.P.\{X(t)\} = S_{XX}(f) \triangleq \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda}\ \mathrm{E}\left\{|\mathcal{F}\{X_\lambda(t)\}|^2\right\} \tag{11}$$

La versión más general del teorema de Wiener-Khintchine establece la manera de calcular esta densisdad espectral en función de la autocorrelación del proceso

$$S_{XX}(f) \stackrel{\downarrow}{=} \mathcal{F}\{\langle R_{XX}(t, t+\tau)\rangle\} \tag{12}$$

donde

$$R_{XX}(t, t+\tau) = \mathrm{E}\{x^*(t)x(t+\tau)\}$$

y la TF se calcula respecto a la variable τ. Notemos que la variación que pudiera tener $R_{XX}(t, t+\tau)$ con t resulta promediada temporalmente, hecho muy razonable si no olvidamos que estamos calculando cómo se distribuye la **potencia media** en el espectro (media en sentido temporal).

Si el proceso $X(t)$ es estacionario en sentido amplio, el teorema de Wiener-Khintchine se reduce a su versión más conocida, ya que la autocorrelación no depende de t, $(R_{XX}(t,t+\tau) = \overline{R}_{XX}(\tau))$ y el promedio temporal no tiene efecto. Luego:

$$S_{XX}(f) \stackrel{\perp}{=} \mathcal{F}\{\overline{R}_{XX}(\tau)\} \tag{13}$$

Es muy común que se defina la densidad espectral de potencia directamente para procesos estacionarios (porque es más sencillo, claro), sin hacer demasiadas aclaraciones al respecto. Sin embargo, como veremos enseguida, no todos los procesos aleatorios de utilidad son estacionarios.

2. Señales PAM

Denominaremos señales PAM (por la sigla en inglés de **modulación por amplitud de pulso**) a las que correspondan a la siguiente estructura:

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{A_n}\; p(t - nT - \theta) \tag{14}$$

en donde $\{\mathbf{A_n}\}$ es una secuencia estacionaria en sentido amplio (con media $\mathbf{a}$ y autocorrelación $R_{AA}[k]$) y de potencia media finita, que modela a los datos transmitidos, $p(t)$ la forma de pulso utilizada para transmitirlos por el canal (señal de energía), T el tiempo de símbolo, y θ es un retardo que prodrá suponerse aleatorio o no, de acuerdo al modelo que se tadpte al respecto, pero que en principio no debería afectar la densidad espectral de $X(t)$. Bajo estas condiciones $X(t)$ resulta un proceso aleatorio de potencia media finita (demostración que omitiremos por el momento). Notemos que la aleatoridad de $X(t)$ proviene de los datos (la parte informativa de la señal, la novedad que nos aporta cuando la recibimos), y posiblemente de θ.

¿Será estacionario?...Depende de la suposición que hagamos para θ:

- *θ constante (conocido o desconocido)*

En este caso lo único aleatorio son los datos. Un valor concocido de θ podría modelar una situación de sincronismo de símbolo perfecto, en tanto que un valor desconocido podría significar que se trata de un parámetro a estimar. En cualquier caso resulta

$$\mathrm{E}\{X(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{E}\{\mathbf{A_n}\}\; p(t-nT-\theta) = \mathbf{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t-nT-\theta) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{a}\; f(t-\theta) \tag{15}$$

$$\begin{aligned} R_{XX}(t,t+\tau) &= \mathrm{E}\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{A_n}^*\; p^*(t-nT-\theta) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{A_m}\; p(t+\tau-mT-\theta)\} = \\ & \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{AA}[m-n]\; p^*(t-nT-\theta)\; p(t+\tau-mT-\theta) = \\ & \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{AA}[k] \sum_{m=-\infty}^{\infty} p^*(t-mT+kT-\theta)\; p(t+\tau-mT-\theta) \stackrel{\triangle}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{AA}[k]\; f_k(t-\theta) \end{aligned} \tag{16}$$

en donde las funciones $f(\cdot)$ y $f_k(\cdot)$, con $k \in \mathbb{N}$, definidas implícitamente en las ecuaciones anteriores resultan periódicas, con período T . Notar que aunque la notación no lo indica, τ es un parámetro de las funciones $f_k(\cdot)$. Luego, tanto $\mathrm{E}\{X(t)\}$ como $R_{XX}(t,t+\tau)$ son periódicas en la variable t con el mismo período, resultando que $X(t)$ no es un proceso estacionario en sentido amplio (de hecho a los procesos que presentan estas características se los llama cicloestacionarios). Entonces, para obtener su densidad espectral necesitaremos el promedio temporal de $R_{XX}(t,t+\tau)$, y como indicamos en la ecuación (9), es suficiente promediar en un período,

$$\langle R_{XX}(t,t+\tau)\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{AA}[k]\langle f_k(t-\theta)\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{AA}[k]\; \frac{1}{T}\int_T f_k(t-\theta)\; dt \stackrel{\triangle}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{AA}[k]\; \overline{f_k} \tag{17}$$

- *θ aleatorio con distribuición $\mathcal{U}[0,T]$*

Una suposición muy común es suponer que θ está distribuido uniformemente en un período. Esta situación podría modelar un desconocimiento total sobre el valor del retardo (un retardo mayor a T no se considera ya que no es posible distinguirlo de un desplazamiento en la secuencia de datos). En este caso, usando esperanza condicional podemos aprovechar los resultados anteriores para calcular la media y la autocorrelación de $X(t)$

$$\mathrm{E}\{X(t)\} = \mathrm{E}_\theta\{\mathrm{E}\{X(t)/\theta\}\} = \mathbf{a}\,\frac{1}{T}\int_T f(t-\theta)\;d\theta = \mathbf{a}\,\overline{f} \tag{18}$$

$$R_{XX}(t,t+\tau) = \mathrm{E}_\theta\{\mathrm{E}\{X^*(t)X(t+\tau)/\theta\}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{AA}[k]\,\frac{1}{T}\int_T f_k(t-\theta)\;d\theta = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{AA}[k]\;\overline{f_k} \tag{19}$$

Dos cosas notables suceden. La autocorrelación coincide con la del caso anterior promediada temporalmente, en (17) (veremos enseguida que esto no es causalidad). Y la segunda es que como las funciones $f(\cdot)$ y $f_k(\cdot)$ al ser promediadas en un período resultan constantes ($\overline{f}$ y $\overline{f_k}$ respectivamente) e iguales a su valor medio (el c_0 de la SF) ahora $X(t)$ sí es estacionario en sentido amplio. Éste es el principal motivo por el cual se hace esta suposición sobre θ, especialmente cuando uno ha definido la densidad espectral sólo para procesos estacionarios. Por el contrario, de acuerdo a la definición que adopatmos no sólo no es necesario que el proceso sea estacionario, sino que el resultado, como veremos a continuación, no depende de la suposción hecha para θ.

- *θ aleatorio con distribución arbitraria $f_\theta(\cdot)$*

Este caso en realidad cubre a los dos anteriores ya que el caso θ constante podría asimilarse a $f_\theta(\cdot) = \delta(\theta-\theta_0)$, con θ_0 el parámetro conocido o desconocido. Nuevamente usando esperanza condicional obtenemos

$$\mathrm{E}\{X(t)\} = \mathrm{E}_\theta\{\mathrm{E}\{X(t)/\theta\}\} = \mathbf{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\theta)\;f_\theta(\theta)\;d\theta \tag{20}$$

$$R_{XX}(t,t+\tau) = \mathrm{E}_\theta\{\mathrm{E}\{X^*(t)X(t+\tau)/\theta\}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{AA}[k]\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(t-\theta)\;f_\theta(\theta)\;d\theta \tag{21}$$

Salvo en casos muy particulares como el anterior, $X(t)$ resulta no estacionario, aunque sí cicloestacionario. Luego, lo que nos interesa es el promedio temporal de la autocorrelación. Usando la linealidad del promedio temporal (y algún teorema para intercambiar el orden de integración) tenemos

$$\langle R_{XX}(t,t+\tau)\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{AA}[k]\langle\int f_k(t-\theta)\;f_\theta(t)\;d\theta\rangle \stackrel{\perp}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{AA}[k]\int \overline{f_k}\;f_\theta(\theta)\;d\theta \tag{22}$$

Como $\overline{f_k}$ es una constante, podemos extraerlo de la integral, obteniéndose

$$\langle R_{XX}(t,t+\tau)\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{AA}[k]\;\overline{f_k}\int f_\theta(\theta)\;d\theta = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{AA}[k]\;\overline{f_k} \tag{23}$$

que coincide con el resultado en (17) como habíamos anticipado. Este resultado es consistente con la idea de que la potencia de una señal no cambia con su ubicación temporal, del mismo modo que sucede con la energía. Recordemos que en las señales de energía un desplazamiento temporal se traduce en fase de su TF y ésto claramente no afecta a la densidad espectral de energía, que depende sólo del módulo de la TF.

3. D.E.P. de Señales PAM

De lo analizado en la sección anterior queda claro que lo primero que necesitamos para obtener la densidad espectral de potenecia del proceso $X(t)$ dado por la ecuación (14), es calcular $\overline{f_k}$, el valor medio de la función $f_k(\cdot)$ definida en la ecuación (16). Entonces

$$\overline{f_k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T p^*(t-mT+kT)\, p(t+\tau-mT)\, dt = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-mT}^{T-mT} p^*(u+kT)\, p(u+\tau)\, dt \quad (24)$$

Las integrales están definidas sobre intervalos de largo T distintos, y que cubren todo el eje real. Luego, sumado las integrles y recordando que $p(t)$ es una señal de energía obtenemos

$$\overline{f_k} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} p^*(u+kT)\, p(u+\tau)\, dt = r_{pp}(\tau - kT) \quad (25)$$

Afortunadamente, los valores buscados no eran más que la correlación de la forma de pulso en distintos instantes. Nótese además que la dependencia de f_k con τ aquí se hace explícita. Reemplazando ahora este resultado en la ecuación (23) tenemos

$$\langle R_{XX}(t, t+\tau) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{AA}[k]\, \overline{f_k} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{AA}[k]\, r_{pp}(\tau - kT) \quad (26)$$

Ecuación muy similar a una convolución discreta, excepto que la dependencia con τ es continua. Ahora sí, aplicando la TF (de tiempo contínuo) obtenemos la densidad espectral de $X(t)$

$$S_{XX}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{AA}[k]\, \mathcal{F}\{r_{pp}(\tau - kT)\} = |P(f)|^2\, \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{AA}[k]\, e^{-j2\pi f T} \quad (27)$$

donde $P(f)$ es la TF de $p(t)$. La sumatoria en esta ecuación no es más que la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD) de la autocorrelación de la secuencia de datos. Por motivos idénticos a los explicados en la sección 1 para procesos aleatorios continuos, ésta es la manera de calcular la densidad espectral de una secuencia aleatoria estacionaria. Entonces la expresión final para la densidad espectral de potencia buscada es

$$S_{XX}(f) = \frac{1}{T}\, |P(f)|^2\, S_{AA}(e^{-j2\pi f T}) \quad (28)$$

En definitiva, la densidad espectral de potencia de señales PAM es el producto de la densidad de energía de la forma de pulso, por la densidad espectral de potencia de la secuencia de datos, por la tasa de símbolos $(1/T)$.

Referencias

[1] G.R. Cooper, and C.D. McGillem, *Probabilistic Methods of Signal and System Analysis*, Holt, Reinhart, and Winston, New York, 1971.

[2] W.A. Gardner, *Cyclostationary in Communications and Signal Processing*, IEEE Press, New York, 1994.

[3] A.V. Oppenheim, A. S. Willsky con la colaboración de I. Young, *Señales y Sistemas*, Prentice Hall Hispanoamericana, 1994.

[4] A. Papoulis, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 3ra edición, McGraw-Hill, New York, 1991.

[5] P.Z. Peebles, *Probability, Random Variables and Random Signal Principles*, Mc Graw Hill, 1980.

[6] J.G. Proakis, *Digitral Communications*, 3ra edición, McGraw-Hill, New York, 1995.