MEDIDAS ELÉCTRICAS

Guía de estudios

Capítulo 3

Ing. Jorge L. Dampé
Cátedra de Medidas Eléctricas

Capítulo 3

Métodos de Medida

3.1. Ideas básicas de los métodos de medida.

Cuando en el Capítulo 1 analizamos la propagación de los errores, introdujimos, sin que fuera nuestro objetivo básico en ese momento, el concepto de que las medidas pueden ser hechas en forma *directa,* cuando el resultado se obtiene a partir de la indicación de *un único instrumento,* o en forma *indirecta*, en cuyo caso el resultado surge a partir de operaciones entre más de una medida directa, o bien a partir de la observación de los valores que toman distintos componentes de un circuito para lograr una dada condición de funcionamiento (por ejemplo, salida nula en una parte del mismo). Esta primera gran división de los métodos de medida puede sufrir muchas subdivisiones, a partir de características peculiares de los circuitos o aparatos. En nuestro estudio nos conformaremos con divisiones grandes, sobre las que existe amplio consenso en la bibliografía especializada.

Si analizamos detalladamente los ejemplos hasta ahora presentados en los capítulos precedentes, reconoceremos en todos ellos una característica común: la medida se obtiene a partir de la lectura de un aparato indicador, es decir de la deflexión del mismo. Se los agrupa en un gran conjunto de los métodos de medida que recibe precisamente el nombre de ***métodos de deflexión***. Tienen una gran ventaja, su sencillez y rapidez de interpretación, pero una desventaja que les fija sus límites: su error depende del de calibración del aparato en que se lee, y éste tiene un tope inferior del que no es posible descender.

Los elementos pasivos de un circuito, R, L y C, en particular las resistencias, son susceptibles de ser conocidas con un error mucho menor que el de graduación de un aparato. El camino lógico es entonces plantearse la pregunta: ¿podremos idear un método en el que el resultado no dependa de la calibración de los aparatos y por lo tanto no esté afectado de errores instrumentales?. La respuesta es sí. Pensemos p. ej. en un puente de Wheatstone (será tratado en detalle en el capítulo 4, pero el lector conoce sus fundamentos a partir de los cursos de Electricidad básica): el valor de la resistencia incógnita X se obtiene a partir de la relación que deben cumplir otras resistencias conocidas del circuito para lograr una indicación cero en el detector, ($I_d = 0$):

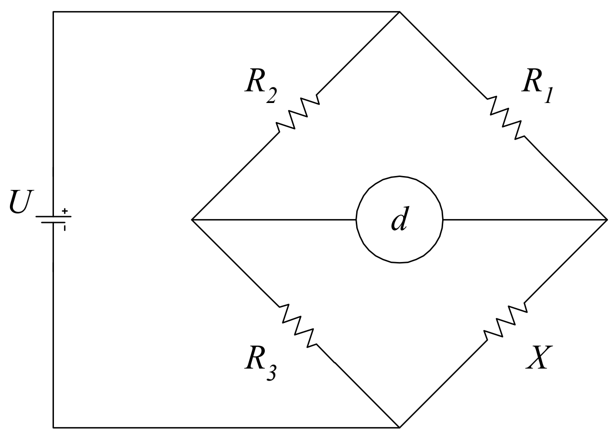

Figura 3.1 Esquema de un puente de Wheatstone

El detector, en esta aplicación, **no mide** la corriente en la rama correspondiente, sino que debe detectar su presencia.
No existe error de calibración del mismo que influya en el resultado. Un método de estas características se denominará ***método de cero*** y será intrínsecamente más exacto que uno de deflexión. Es bueno remarcar a esta altura que si bien no influye ningún error de calibración del detector, sí pesará la capacidad que éste tenga para sensar corrientes de valores muy bajos.

Además de la clasificación en los grandes grupos que hemos mencionado más arriba existen otras posibles divisiones, que están suficientemente documentadas en la literatura, [1], [2]. En este punto sólo citaremos otra posible división que agrupa a los métodos en ***métodos de comparación*** *y* ***métodos de sustitución***.

Si bien toda medida es una comparación, como hemos ya visto en la primera parte, reservaremos el nombre de ***método de comparación*** para aquél particular en que el patrón y la incógnita coexisten en el mismo experimento, como puede apreciarse en el siguiente esquema elemental de un método de comparación aplicado a la medición de resistencias:

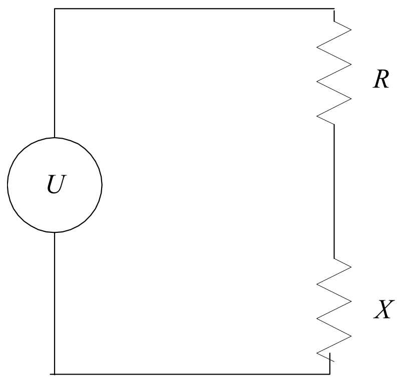

Figura 3.2: Esquema elemental del método de comparación

Si con un voltímetro medimos primero la caída de tensión en R y luego hacemos lo mismo con *X*, es evidente que el valor de esta última puede calcularse a partir de la indicación del instrumento en ambos casos y del valor de *R*. Fácilmente se deduce que:

$$X = \frac{U_X}{U_R} * R \qquad (3.1)$$

es de notar que en la forma en que se ha planteado, se está ante un método de comparación, pero si queremos incluirlo en alguna otra de las clasificaciones de más arriba será necesario dar indicaciones sobre, por ejemplo, cómo se han medido las tensiones. Si la lectura de ellas se hace con un voltímetro común, nuestro método será de comparación pero además de deflexión, en particular de ***doble deflexión*** pues depende de dos lecturas de un dado aparato, lo que si nos atenemos a lo más arriba dicho, conspirará contra su exactitud. Si, en cambio, las lecturas se hacen con un método de cero, estaremos ante un método de comparación por cero. El cálculo de los errores que afectan a un método de la naturaleza del propuesto se realiza en forma inmediata aplicando los conceptos básicos oportunamente expuestos

Como surge de los conceptos de más arriba, un sistema de medida muchas veces puede encuadrarse dentro de diferentes clasificaciones. Lo realmente importante, más que estar en condiciones de ubicarlo en uno u otro grupo, es saber discernir cuáles serán sus características básicas, y qué puede esperarse del mismo, tanto en lo que se refiere a su exactitud como a la facilidad de implementación, rapidez, y, no lo menos importante, costo

En los métodos de ***sustitución***, en cambio, se requiere de un patrón (variable muchas veces), de la misma naturaleza que la incógnita, y de un dispositivo que sea capaz de detectar las diferencias que se producen en el mismo circuito cuando el patrón es reemplazado por la incógnita y viceversa. Su esquema de principio es el siguiente:

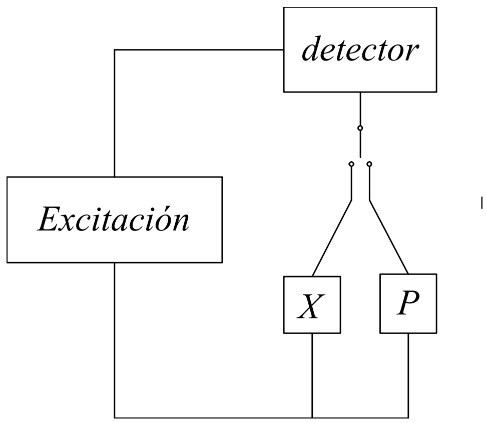

Figura 3.3: Esquema elemental del método de sustitución

El bloque "excitación" representa a cualquier elemento que provee una señal cuyo efecto sobre *X* y sobre *P* pueda ser detectado por el bloque "detector". Caben multitud de alternativas para los distintos elementos si se acepta la amplia definición anterior. En nuestro estudio serán de interés sólo los casos más simples, en los que las excitaciones son tensiones o corrientes, y los elementos detectores desde voltímetros o amperímetros hasta elementos más sofisticados como puentes u otros circuitos complejos

El principio del método es muy sencillo: En una etapa de la medición se tiene el conjunto excitación - detector- incógnita y se observa la indicación del detector. Luego se intercambia la incógnita por el patrón, y eventualmente se lo ajusta hasta lograr la misma indicación en el detector. En el límite, cuando el circuito no discierne entre patrón e incógnita, se concluye que ambos son iguales. La ventaja es evidente, ya que el error de X depende en forma directa del de P, al que habrá que sumarle otro, típico de estos métodos, y es el resultante del hecho de que pueden existir pequeñas diferencias entre ambos, que, si bien en teoría cambian el estado de funcionamiento del conjunto, en la práctica pasan inadvertidas. Este nuevo error, resultante de la falta de sensibilidad del conjunto, recibe el nombre de ***error de insensibilidad*** y es típico de todos los esquemas de medida en los que se deben detectar respuestas ante cambios en alguna situación particular.

Si reparamos en las definiciones anteriores, veremos que se ha sido muy general al hablar de los elementos que detectan variaciones y de la fuente de excitación. Dependiendo si se trata de métodos de cero (imaginemos por un instante que el conjunto fuente detector esté configurado como un puente de Wheatstone) o de deflexión, (el detector puede ser un simple amperímetro conectado en una rama de la configuración), el método de sustitución participará de las características de uno o de otro. Merece citarse aquí que el método de sustitución, en su variante de cero, es capaz de alcanzar las más altas exactitudes esperables en el campo de las Medidas Eléctricas.

Para fijar las ideas analizaremos rápidamente el siguiente circuito, que nos permite aplicar un método de sustitución por deflexión y que nos permitirá emplear los conceptos vertidos hasta ahora, tanto en lo que se refiere a métodos como a errores, e introducirnos en el análisis de la sensibilidad de los métodos de medida:

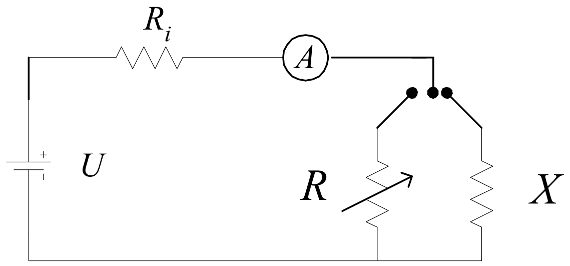

Figura 3.4: Método de sustitución aplicado con un amperímetro y un resistor de referencia

El manejo es muy sencillo: ajustando R_i se logra una dada indicación en el amperímetro, con la llave conectada por ejemplo a *X*. A continuación se cambia la llave a *R* y se varía ésta hasta lograr la misma indicación que en la primera parte. En este caso diremos que X = R.

Es fundamental notar que el amperímetro no está colocado para **medir** la corriente, sino para verificar que su valor sea el mismo en ambas etapas de la medida. Este detalle es el que justifica la ventaja del método: No influye en el resultado el error de indicación de ningún instrumento, es más, éste puede estar descalibrado, mientras a igual excitación responda con igual salida, resultará igualmente útil. Lo dicho vale para cualquier detector que empleemos, aún cuando sea un circuito complejo.

En cuanto al error que afecta a *X*, obviamente será, por un lado, el error de *R*, y por el otro el error de insensibilidad, debido a que siempre nos quedará una duda respecto de las pequeñas diferencias que sabemos que, aunque existen, producen variaciones de corriente que son imperceptibles para el aparato que usamos como detector.

Para el cálculo del error de insensibilidad aplicamos un concepto muy sencillo, que se repetirá en cualquier otro circuito. Como este error aparece porque hay pequeñas variaciones de corriente que no son detectables por el amperímetro, todo lo que haremos es calcular la variación de la corriente con *X*, y en el límite, cuando I tienda a la mínima variación de corriente detectable, entonces, por definición, *X* tenderá a un valor que llamaremos ***error absoluto de insensibilidad***. Para hacerlo escribimos la expresión de la corriente en el circuito y calculamos su variación con *X*.

$$I = \frac{U}{R_i + R} = \frac{U}{R_i + X} \tag{3.2}$$

válida cuando R→X. Si ahora calculamos la derivada de I respecto de *X* resulta

$$\frac{\partial I}{\partial X} = -\frac{U}{\left(R_i + X\right)^2} \tag{3.3}$$

a partir de la cual resulta inmediato el cálculo del error de insensibilidad si se tienen en cuenta las siguientes consideraciones:

a) en el límite la mínima variación de corriente detectable en el amperímetro es igual a su resolución, $\Delta_0 I$,
b) el instrumento se lee ***dos veces***: una cuando se aprecia la indicación para *X*, y la otra cuando se

hace lo propio con R, por lo que la contribución del error deberá tomarse doble.

Teniendo en cuenta lo antes dicho, y operando en la (3.3), recordando las definiciones de error absoluto y relativo que se dieran en el Capítulo 1, se llega a la expresión del error de insensibilidad en el método estudiado:

$$e_i = \pm \frac{2\Delta_0 I}{X * I}\left[X + R_i\right] \tag{3.4}$$

De la observación de la (3.4) se extraen las siguientes condiciones operativas:

* el error de insensibilidad depende del circuito, como era previsible, ya que nos interesa ver cómo varía la corriente cuando se modifica uno de sus parámetros. En particular, si la excitación fuera aplicada con un generador de corriente, el circuito sería insensible a cambios en X;

* si bien lo único que interesa es la deflexión del amperímetro, y no su exactitud, debe cuidarse que la lectura se efectúe lo más próxima posible al fondo de escala, pues el cociente $\frac{\Delta_0 I}{I}$ se hace más pequeño cuanto mayor sea el valor de I. En los casos de instrumentos de alcances múltiples, el término anterior puede expresarse en función de la deflexión del mismo, llegándose a la conclusión que, una vez elegido el alcance, es conveniente llegar tan cerca del fondo de escala como sea posible.

El esquema elemental del método de sustitución que se ha discutido permite arribar a las ideas generales que están detrás de sus diferentes variantes. Debe remarcarse que, si se cuenta con un patrón adecuado, el error queda condicionado exclusivamente por la posible falta de sensibilidad del método, que utilizando detectores adecuados puede hacerse casi tan pequeña como se quiera. En particular, modificaciones del método de sustitución, aplicadas con puentes (Capítulo 4), o con compensadores [1] son capaces de alcanzar las más altas exactitudes esperables en el campo de las medidas eléctricas.

En esta altura de nuestra discusión, la importancia fundamental del método que se ha citado hay que buscarla más allá de las exactitudes límites conseguibles, lo que es un campo relativamente reducido de la ingeniería, sino en la idea subyacente: con medios reducidos, y teniendo presentes sólo definiciones elementales, es posible medir con exactitudes muy superiores a las que consentiría el uso directo de cada uno de ellos.

Ejemplo 3.1

Se desea medir el valor de una resistencia de aproximadamente 100 Ω, ¼ W, con el menor error que consiente un conjunto de aparatos de medida formado por:
* óhmetro (aparato cuya indicación es directamente el valor de la resistencia), con un error del orden del 5 % para una incógnita del orden de la dada;
* fuentes auxiliares de 2 V, corriente nominal 2 A;
* miliamperímetro de alcance 10 mA, clase 1, escala con 100 divisiones, resolución absoluta 1/10 de división;
* caja de resistores variables, formada por décadas de 0,1, 1, 10 y 100 Ω, cuyo error al ajustar aproximadamente 100 Ω es de ± 0,2 %. Potencia de disipación máxima: ¼ W cada década;
* resistores de regulación adecuados.

Solución

El listado de elementos disponibles nos permite apreciar que estamos en condiciones de aplicar el esquema elemental del método de sustitución que se ha discutido a partir de la figura 3.4. Es interesante notar que si se optara por la medición directa con el óhmetro, sin duda el camino más fácil, el error resultaría del orden del 5 %. Usando, en cambio**,** los restantes elementos para aplicar un método de sustitución, el error resultará notablemente más pequeño.

Lo primero por hacer es determinar cuál es la corriente máxima que pueden manejar tanto la incógnita como las referencias:

$$P_{ad.} = \frac{1}{4}W = 0{,}25\,W \Rightarrow I_{máx} = \sqrt{\frac{0{,}25}{100}} = 50\,mA \tag{3.5}$$

en el caso del resistor incógnita de 100 Ω. Con el mismo mecanismo se encuentran las corrientes admisibles para cada una de las décadas de la caja de resistores.

Como nuestro miliamperímetro es de alcance 10 mA, nos interesará medir lo más cerca posible de ese valor. Si aplicamos los 2 V de la fuente directamente a la incógnita, la corriente resultante será de 20 mA, por lo que necesitaremos agregar resistencias en serie hasta lograr aproximadamente 10 mA (se colocarán otros 100 Ω en el lugar de R_i de la figura 3.4.

El error de insensibilidad resultante será:

$$e_i = \pm\frac{2\Delta_0 I}{X * I}\left[X + R_i\right] = \pm\frac{2 * 0{,}1 div.}{100\Omega * 100 div}[100 + 100]\Omega * 100 = \pm 0{,}4\% \tag{3.6}$$

por lo que el error total resultante de la medición será:

$$e_X = \pm\left(e_R + e_i\right) = \pm\left(0{,}2 + 0{,}4\right) = \pm 0{,}6\% \tag{3.7}$$

lo que representa una mejoría importante respecto de la alternativa de la medición directa.

Si se analiza la (3.6), se ve que una causa importante del error es la contribución de la resistencia extra de 100 Ω que fue necesaria para ajustar la corriente a la medible por el miliamperímetro. Si fuera necesario extremar las precauciones para achicar el error, sería deseable no colocarla, para lo cual existen dos caminos inmediatos:

a) bajar la tensión auxiliar:
b) colocar los resistores de regulación de modo que la resistencia Thevenin vista desde los bornes de la incógnita hacia la fuente sea la menor posible (por ejemplo, mediante un divisor de tensión en vez de un resistor serie)

3.2. El método de oposición

En el Capítulo 2 esbozamos el concepto del error de inserción. destacamos allí la importancia que puede revestir el mismo, y el hecho innegable de que prácticamente no existe método de medida que esté libre de él.

Si bien en muchos casos este error es absolutamente controlable, al punto que se lo puede hacer totalmente despreciable, en algunas situaciones, sobre todo en casos de circuitos que manejan señales muy pequeñas, se convierte en escollo insalvable. Particularmente grave es la situación en el caso de circuitos con comportamientos no lineales, en los cuales el cálculo del mismo es, si no imposible, muy dificultoso, lo que conspira contra la posibilidad de desafectación del mismo.

En esos casos extremadamente difíciles, la solución pasa por un método de medida en el que el error de inserción directamente no exista; como el origen del mismo debe buscarse en la energía que demandan del circuito incógnita los elementos de medida para dar su indicación, llegamos a una característica común a todas las variantes del método que comenzamos a estudiar: la presencia de una fuente auxiliar, que provee la energía que demanda el sistema encargado de efectuar la medida propiamente dicha.

Este método, en su variante de cero, tiene la virtud de ser capaz de alcanzar las más altas exactitudes esperables en el campo de las medidas eléctricas para la medición de tensiones, [1], para lo que requiere de elementos especiales, como pilas patrones u otras referencias de tensión, cuyo estudio escapa a los alcances de nuestro curso.

Supongamos que nuestro objetivo sea la medición de la tensión en vacío de una fuente real, que, en régimen estacionario, caracterizaremos mediante el circuito de la figura siguiente:

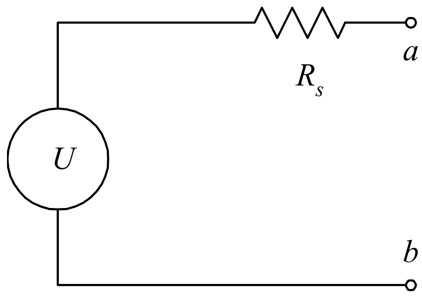

Figura 3.5: Equivalente de Thevenin de una fuente de tensión

Sólo se puede acceder a los bornes *a* y *b*, pues la resistencia R_s es inseparable del conjunto. Si su valor es muy alto, digamos, 10 MΩ, nos encontramos con que el valor del error de inserción:

$$e_{ins} \approx -\frac{R_s}{R_v}$$

que resultaría de aplicar la (2.14), sería inaceptablemente elevado para cualquier voltímetro común.

La alternativa que propone el método de oposición pasa por agregar una fuente auxiliar variable junto con un elemento que permita detectar la igualdad entre la tensión incógnita y la que se genera en forma auxiliar.

Muchas veces la fuente auxiliar toma la forma de una fuente fija con un divisor de tensión, como se aprecia en la figura 3.6 Los resistores variables R_1 y R_2 permiten regular el potencial en bornes de R_2 de manera tal de lograr que resulte igual al de U_x. En cuanto a la fuente auxiliar, al encerrársela entre líneas quebradas se trata de indicar que su generador equivalente, *U* y su resistencia interna R_i son inseparables. Como se comprende, en el momento en que la diferencia de potencial es nula, podemos concluir que

$$U_x = I * R_2 \tag{3.8}$$

en la que *I* representa a la corriente indicada por el amperímetro.

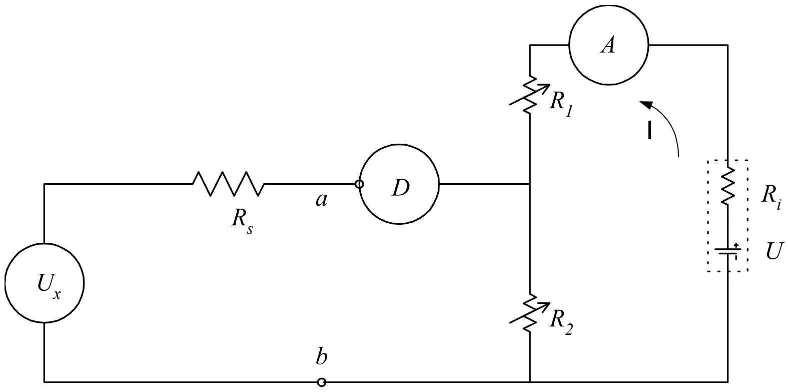

Figura 3.6: Método de oposición. Esquema básico

Como surge de la anterior, el valor de U_x queda determinado en función de los valores de la corriente leída en el amperímetro y de la resistencia R_2. Merece destacarse que en este caso, no aparece error instrumental debido al detector *D* ya que se lo utiliza *sólo para averiguar la circulación o no de corriente*.

Si analizamos los errores que afectan a la anterior, nos encontramos por de pronto que

$$e_{Ux} = \pm\left(e_I + e_{R2}\right) + e_i \tag{3.9}$$

en la expresión anterior, los términos entre paréntesis corresponden a los usuales en cualquier caso de propagación de error, y tienen en cuenta la influencia que la indeterminación en los valores de la corriente y de la resistencia tienen en el conocimiento de U_x. El restante, cuya presencia obedece a las mismas razones que en el análisis que de una variante del método de sustitución se efectuara en el punto precedente, tiene en cuenta el efecto que produce el hecho de que sólo poseemos una aproximación más o menos buena del valor de R_2 que produce igualdad de tensiones entre los bornes del detector. Es de destacar que el método de trabajo consiste, casi siempre, en lograr el mantenimiento de una corriente aproximadamente constante, de valor adecuado para que los errores de indicación del amperímetro resulten mínimos. Dicha constancia se logra variando en forma inversa R_1 y R_2.

Con el fin de analizar dicho error, aplicaremos un concepto similar al ya esbozado cuando se analizó el error de insensibildad en el caso comentado: Deberemos encontrar a qué variación de la incógnita corresponde la mínima variación de señal detectable, que corresponde a la resolución del detector. Sin duda, en el resultado influirán, por un lado, las características del detector, y por el otro las del circuito equivalente que éste ve desde sus bornes.

Aplicando el teorema de Thevenin al circuito de la figura anterior, se llega al siguiente equivalente, en el que para facilitar la visualización del efecto de la incógnita y del circuito auxiliar no se ha llegado a la máxima simplificación posible:

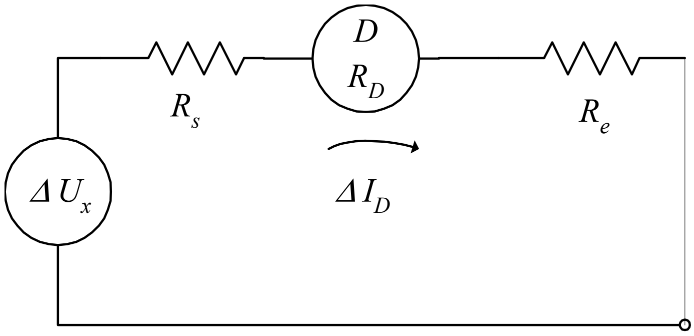

Figura 3.7: Circuito equivalente del de la figura 3.6

En la anterior, ΔU_x representa la tensión equivalente de Thevenin, vista desde los bornes del detector, en tanto que R_s y R_e son las resistencias de salida de la incógnita y equivalente del circuito auxiliar, respectivamente.

El cálculo de ΔU_x en función de los restantes elementos nos conduce a:

$$\Delta U_x = \Delta I_D (R_s + R_e + R_D) \tag{3.10}$$

en la que ΔI_D representa a la corriente que circula por el detector de cero y R_D a su resistencia interna. Si ahora queremos relacionar la mínima variación de señal en bornes que el detector es capaz de percibir con el error de insensibilidad, nos conviene partir del siguiente circuito equivalente:

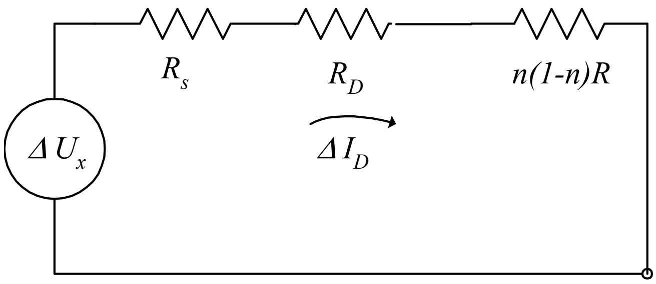

Figura 3.8: Circuito para el análisis del error de insensibilidad en el método de oposición.

en el que hemos llamado *nR* a la fracción de la resistencia total de la malla de la incógnita representada por el valor de R_2 seleccionado, con lo que el resto de la misma pasa a ser *(1 - n)R..*

El proceso de cálculo es muy sencillo: con referencia a la figura 3.6, llamamos $R = R_1 + R_2 + R_a + R_i$., siendo *Ra* la resistencia del amperímetro. Como en condiciones de equilibrio la señal por el detector es nula, la fracción de la tensión *U* que cae en R_2 es igual a U_x., y debe ser igual a la fracción de la resistencia total *R* que representa R_2 . La resistencia equivalente vista desde los bornes de R_2 hacia la fuente auxiliar, valdrá en consecuencia: $R_e = n(1-n)R$

Reemplazando con esta convención en la (3.10) se tiene:

$$\Delta U_X = \Delta I_D\left[R_S + n(1-n)R + R_D\right] \tag{3.11}$$

En el límite, cuando la indicación del detector tiende a la resolución del mismo, $\Delta I_D \rightarrow \Delta_{0I_D}$, se tendrá:

$$\left(\Delta U_X\right)_i = \Delta_0 I_D\left[R_S + n(1-n)R + R_D\right] \tag{3.12}$$

Es interesante notar que, en la anterior, aparecen reflejadas la influencia que tienen el detector, por medio de $\Delta_0 I_d$ y su resistencia interna, R_D, y la que presentan tanto el circuito incógnita, a través de R_s como el auxiliar, por medio de R. Con respecto a esta última, vale la pena observar el papel que juega el parámetro n: cuanto más cercano a 1 resulte, tanto menor será el peso que la resistencia del circuito auxiliar tiene en el error total. Ya que n puede ser controlado por el usuario mediante la elección del valor de la tensión auxiliar ($n \to 1$ cuando $U \to U_x$, obtenemos una práctica de uso importante: conviene que la tensión auxiliar sea lo más cercana posible a la incógnita a medir.

Por último un comentario sobre la exactitud: tal cual ha sido planteado aquí, el método de oposición es un método de cero, cuya exactitud depende de cuán bien se conozcan, en principio, I y R_2. En la variante que aquí hemos analizado, a la corriente se la determina a partir de la indicación de un amperímetro,lo que consttituye el punto débil del método, en virtud de los errores relativamente altos que son inherentes a todos los métodos de deflexión. En las variantes de alta exactitud del método se recurre a circuitos auxiliares para ello, que casi siempre recurren a la utilización de una fuente de tensión muy bien conocida, que permite, en dos etapas, lograr muy alta exactitud en el valor de la corriente que circula por R_2 [1]

3.3. Voltímetro diferencial

El método analizado en el punto anterior constituye un gran avance desde el punto de vista de la necesidad de solucionar el problema del error de inserción, pero no permite evitar el gran aumento del error que se produciría si intentáramos calcular una pequeña diferencia de tensiones, como ocurre cuando nos interesa conocer la regulación de algunas fuentes. (Por regulación se entiende aquí a la diferencia entre la tensión en vacío y la tensión a plena carga, referida a la primera de ellas).

La solución para estos casos pasa por *medir directamente la diferencia,* mediante el empleo de circuitos llamados voltímetros diferenciales. Lo mismo que en el caso del método de oposición antes citado, existen variantes del mismo capaces de muy alta exactitud, pero nosotros nos ocuparemos exclusivamente de las más sencillas, cuya implementación es harto frecuente, a partir de elementos comunes, en la práctica diaria de las medidas eléctricas.

Con el fin de fijar las ideas, consideremos el caso típico que se plantea cuando se desea medir una pequeña variación de tensión, representada en la figura que sigue por la diferencia entre las tensiones en vacío y en carga de la fuente:

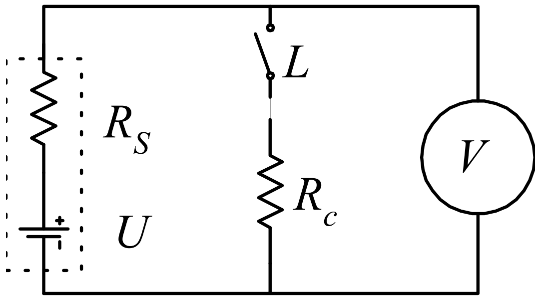

Figura 3.9: Esquema no conveniente para medir una caída de tensión.

Si el método que se emplea es un simple voltímetro, el resultado ya sabemos que estará afectado de un error que irá creciendo a medida que la diferencia se achique. Una alternativa mucho mejor es la que propone el circuito de la figura siguiente, en el que el voltímetro empleado cumple un rol diferente, ya que no se emplea para medir las dos tensiones a partir de las cuales se calculará la diferencia, sino que, es él quien *mide directamente la diferencia*, con todas las ventajas resultantes de un alcance *adecuado para la diferencia* y el hecho que el resultado se obtiene a partir de una medición directa y no de un cálculo de diferencias.

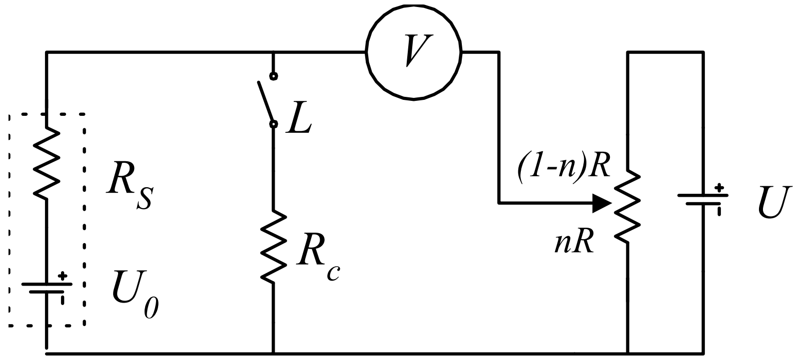

Figura 3.10: Voltímetro diferencial

Está claro que el voltímetro cometerá, como en cualquier circuito, un cierto error de inserción, que afectará la exactitud lograble.

Una repetición de los cálculos antes realizados nos permite llegar a la conclusión de que el error resultante en la medida de ΔU_x debido a la inserción del voltímetro vale:

$$e_{ins} = -\frac{n(1-n)R + \dfrac{R_s R_c}{R_s + R_c}}{R_v} \tag{3.13}$$

(Préstese atención al signo definido de la anterior, característico de los errores sistemáticos, e indicativo de que, en principio, el error anterior resulta desafectable del resultado)

En cuanto a los restantes errores que afectarán a la medida son: el *instrumental*, que comete el voltímetro al medir ΔU_x, y el de *insensibilidad*, en la etapa en que se ajusta el circuito auxiliar al valor de la tensión en vacío de la incógnita. El primero de ellos no presenta dificultades, pues conocidos el error instrumental y la indicación del voltímetro, la aplicación de las reglas introducidas en el capítulo 2 permite encontrarlo fácilmente.

En cuanto al segundo, se obtiene con una ligera modificación al esquema de razonamiento empleado para hallar la expresión 3.12, consistente en relacionar la mínima variación detectable de tensión por parte del voltímetro, *su resolución*, con el cambio que tiene que producirse en la incógnita para que sea efectivamente aplicada en bornes del voltímetro esa tensión. Una sencilla aplicación del teorema de Thevenin a la disposición de la figura 3.10, permite encontrar el error de insensibilidad. Con tal fin, se lo aplica a partir de los bornes de conexión del voltímetro, dejando indicadas las dos fuentes de excitación con sus correspondientes resistencias de salida, con lo que se llega a la disposición de la figura 3.11, válida para el caso en que interesa el error en la primera etapa de la medida, en la que se emplea el voltímetro para asegurar la igualdad de tensiones entre la incógnita y la fuente auxiliar:

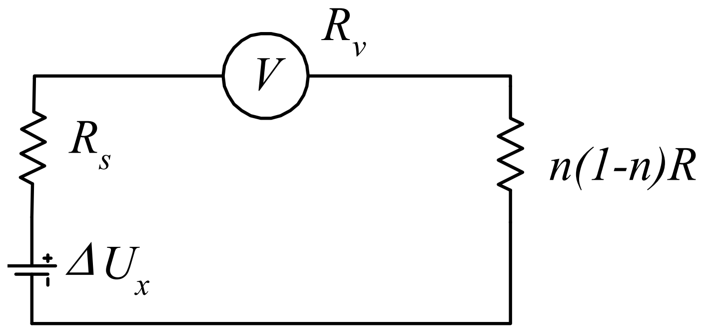

Figura 3.11: Equivalente para el análisis de los errores del voltímetro diferencial

Este cálculo, en un todo similar al ya efectuado nos conduce a la siguiente expresión:

$$\Delta U_{xm} = \Delta Ux \frac{R_v}{R_v + R_s + n(1-n)R} \qquad 3.14$$

en la que se aprecia que la tensión que mide el voltímetro, ΔU_{xm} es diferente, debido al efecto de las resistencias del circuito, combinadas con la del voltímetro, de la que realmente aparece debido a la discrepancia de los ajustes. En el límite, cuando $\Delta U_{xm} \to \Delta U_0$, la resolución del voltímetro, se tiene que el ΔU_x correspondiente será, por definición el error absoluto de insensibilidad.

El método que se acaba de presentar posee ventajas apreciables desde el punto de vista de su aplicación a casos críticos que impiden la medición directa: con instrumentos de fácil acceso en cualquier laboratorio puede lograrse una medición conveniente, con límites de error relativamente bajos. El lector inquieto será capaz de encontrar diferentes alternativas del mismo, cuya aplicación a situaciones concretas de medición está limitada sólo por su imaginación. Variantes del método que combinan su uso con el de circuitos de oposición con elementos patrones, son capaces de alcanzar exactitudes que se sitúan en la frontera superior de las mediciones electrónicas, pero escapan al objetivo del curso, por lo que se remite al lector a la bibliografía especializada sobre el tema.

Ejemplo 3.2

Se desea medir la caída de tensión que se produce en una fuente regulada de 12 V, al pasar del estado de vacío al de plena carga, correspondiente a una corriente de 2 A. Según su fabricante, dicha caída es menor que el 0,2 %.

En el laboratorio se dispone de los siguientes elementos:
* fuentes de 20 V, cuya salida, con carga estable, puede considerarse constante, corriente nominal 1 A;
* resistores de regulación, del tipo de cursor giratorio, de 10 vueltas, con variación lineal, de 2 W de disipación y 1, 10 y 20 kΩ;
* multímetros digitales de 3½ dígitos, con presentación máxima 1999, alcances en corriente continua: 2, 20, 200 y 2000 mA, $E_I = \pm[0,5\ \%\ I_m + 2$ díg.]; alcances en tensión continua: 200 mV, 2, 20, 200 y 1000 V, $E_U = \pm[0,1\ \%\ U_m + 1$ díg.];
* todos los accesorios necesarios para el armado del circuito

Solución

Con el fin de determinar la caída de tensión en la fuente será necesario armar un circuito que permita la conexión a la misma de una carga tal que circule por ella la corriente nominal (2 A) y nos permita medir las tensiones en vacío y en carga, respectivamente. El valor de la caída de tensión esperable, según los datos del fabricante es del 0,2 %, referidos a los 12 V nominales, lo que es equivalente a 24 mV. Si se pensara en utilizar el voltímetro en forma directa, nos encontramos con que en el alcance necesario (20 V) su resolución es de 0,01 V, por lo que el error mínimo que podemos esperar cometer es del orden del 42 %, situación esperable, pues el alcance que hemos elegido es correcto *para medir el valor absoluto de la tensión total, pero no las variaciones que nos interesan.*

La conclusión es que el método de la medida directa es inapropiado, y por lo tanto recurriremos a un voltímetro diferencial, armado con los elementos de que se dispone. Una posible alternativa es la de la figura siguiente

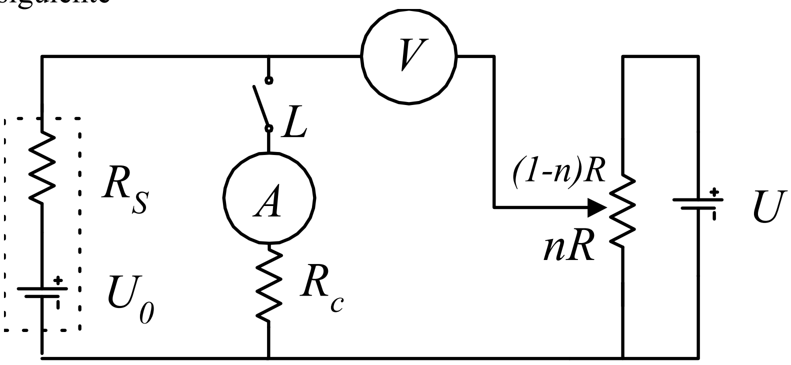

Figura 3.12: Circuito práctico de un voltímetro diferencial

que corresponde a la misma de la figura 3.10, a la que se le ha agregado un amperímetro como elemento de control de la corriente de carga de la fuente a estudiar. Sólo nos resta seleccionar los elementos que compondrán el circuito de medida, que pasamos a detallar:

U_0, R_s, es la fuente en estudio. El valor de R_S será considerado despreciable en virtud de los datos del problema. *L* es un interruptor que se emplea para conectar la resistencia R_C, cuyo valor es tal de permitir la circulación de los 2 A correspondientes al punto de funcionamiento de la fuente en estudio. Observe el lector que todos los componentes citados hasta ahora no son susceptibles de modificación ni de elección alternativa, pues son los que corresponden a las condiciones de trabajo que deben ser verificadas.

En cambio, los restantes sí deben ser elegidos considerando un correcto funcionamiento del circuito de medida: la fuente *U* será una de las de continua de 20 V. El resistor que se tome para formar el divisor de tensión debe cumplir, por su parte, los siguientes requisitos:

a) debe soportar la corriente resultante de trabajo (cualquiera de los listados satisface esta condición);
b) su resistencia debe ser tal que no aumente demasiado el error de insensibilidad cuando se pretenda medir la caída;
c) su resolución debe ser suficiente.

Con respecto a la condición b), el resistor de 1 kΩ pareciera ser el más adecuado, aunque los otros no necesariamente pueden descartarse a priori. En cuanto a la última condición, c), la resolución relativa es un dato que no figura en el enunciado del problema, pero que puede estimarse aplicando el siguiente razonamiento, válido cuando el divisor de tensión que se forma trabaja en vacío: al ángulo total que puede girar el potenciómetro lo llamamos *N,* que en nuestro caso resulta igual a:

$$N = 10 vueltas * 360 grados / vuelta = 3600^\circ \tag{3.15}$$

en cuanto a la mínima fracción de vuelta que puede ser ajustada en forma estable, que depende del tipo constructivo particular, se la puede estimar, en nuestro caso, en aproximadamente 3...5 º. Poniéndonos en el peor de los casos, la resolución relativa resulta de

$$r = \frac{5}{3600} * 100 = 0{,}14\% \tag{3.16}$$

Debe notarse que la anterior es equivalente, en el caso del divisor de tensión trabajando en vacío, a la variación relativa mínima de tensión en sus bornes.

La elección del alcance del voltímetro la haremos teniendo en cuenta que debe ser capaz de cumplir una doble función: medir la caída de tensión cuando se cierra la llave L, y asegurar un error de insensibilidad compatible con el error que se espera del método cuando se está haciendo el equilibrio de la tensión en vacío de la fuente. El conocimiento del error que se cometerá en la medida de la caída de tensión determinará el alcance necesario en la etapa de equilibrio, con el fin de asegurarse un error de insensibilidad despreciable para este caso particular.

Según el fabricante, la caída de tensión esperable es del orden de 24 mV, por lo que la única opción que nos brinda el aparato es el alcance 200 mV, que también deberá ser usado para la etapa de equilibrio. Verificaremos cuánto vale el error de insensibilidad, con el fin de determinar si el aparato resulta adecuado. Aplicando la (3.14) con las modificaciones necesarias para obtener el error de insensibilidad se encuentra:

$$\Delta U_0 = \Delta U_{xi} \frac{R_v}{R_v + R_s + n(1-n)R} \tag{3.17}$$

válida para el caso en que aún no se ha conectado la carga. Si bien no corresponde a la resolución de este problema en particular, es interesante notar que, el error de insensibilidad que correspondería al caso de llave L cerrada sería

$$\Delta U_0 = \Delta U_{xi} \frac{R_v}{R_v + R_s // R_c + n(1-n)R} \tag{3.18}$$

Reemplazando valores en la (3.17) se encuentra que el error absoluto de insensibilidad, ΔU_{xi} vale, 0,1 mV, el que se deberá sumar al instrumental al medir la caída de tensión; el error de indicación, suponiendo que la lectura sea 24 mV, resulta:

$$E_U = \pm\left[\frac{0{,}1}{100} * 24 + 0{,}1\right] mV \approx \pm\, 0{,}1\, mV \tag{3.19}$$

en consecuencia, el error relativo total en la medición de la caída será:

$$e_{\Delta U} = \pm \frac{0{,}2}{24} * 100 = \pm 0{,}8\% \tag{3.20}$$

que es aceptable y notoriamente menor que el que se obtendría si la medición se hubiera efectuado simplemente tomando las dos lecturas del voltímetro, antes y después de cerrar la llave L.

3.4. Generalidades del método de voltímetro y amperímetro

Con este método se pueden medir resistencias en corriente continua (e impedancias en corriente alterna). Su implementación es sumamente sencilla, y el principio que emplea inmediato: la ley de Ohm.

Supongamos tener el siguiente circuito:

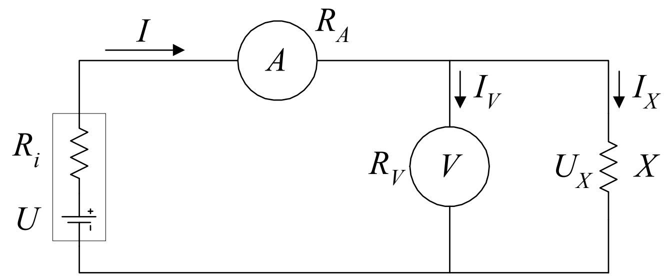

Figura 3.13: Esquema circuital para la medición de una resistencia con el método del voltímetro y el amperímetro (conexión corta).

U y R_i representan una fuente de tensión y una eventual resistencia de regulación si fuera necesaria. La idea es calcular X a partir de:

$$X = \frac{U_X}{I_X} \tag{3.21}$$

con lo que resulta inmediato hallar e_x:

$$e_X = \pm\left(e_{U_X} + e_{I_X}\right) \tag{3.22}$$

con U_X e I_X se alude a los valores de U e I que aparecen en la resistencia a medir X. Una simple inspección del circuito nos permite determinar que debido a los errores de inserción no es posible obtener **al mismo tiempo** U_X e I_X: si se mide U_X colocando el voltímetro en bornes de X, el amperímetro no medirá I_X, sino $I_m = I_X + I_V$. De la misma manera, si se disponen los elementos para lograr que por el amperímetro pase sólo la corriente que lo hace por X, el voltímetro no medirá la caída de tensión en X, sino la suma $U_m = U_X + U_A$; por lo que sólo uno de los términos del cociente indicado en la (3.21) resultará directamente medible, según cuál sea la posición relativa que adopten los instrumentos.

Vemos ya que hay dos posibilidades de conectar el voltímetro y el amperímetro. Recibe el nombre de **variante corta** el circuito dibujado, en el que el voltímetro está en bornes de X, y **variante larga** aquél en el que el amperímetro está próximo a X, y por lo tanto, el voltímetro alejado.

Para poder aplicar el método con criterio debemos estar en condiciones de responder a los siguientes interrogantes :

- ¿Qué error fortuito resulta?
- ¿Cuál es la variante más apta con los aparatos de que dispongo?
- ¿Hasta qué punto puedo prescindir del cálculo de U_X o I_X, según corresponda, teniendo en cuenta la corriente que circula por el instrumento involucrado?

La respuesta es sencilla, si consideramos la figura 3.13, de donde :

$$X = \frac{U_X}{(I_m - I_V)} = \frac{U_m}{\left(I_m - \frac{U_m}{R_V}\right)} \tag{3.23}$$

Si se hace propagación de errores en la anterior resulta:

$$e_X = \pm\left(1 + \frac{X}{R_V}\right) * \left(e_{U_m} + e_{I_m}\right) \tag{3.24}$$

en la que aparece el término X/R_V como factor que amplifica el error fortuito.

Si se procede de la misma manera para la conexión larga:

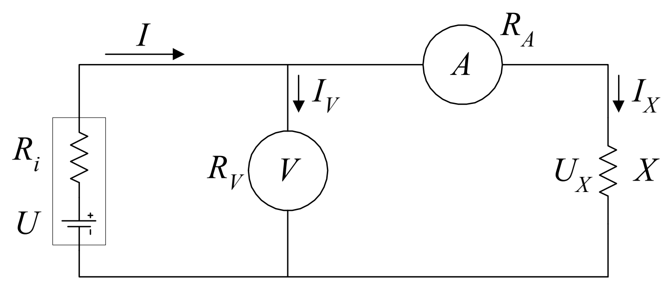

Figura 3.14 Esquema circuital para la medición de una resistencia con el método del voltímetro y el amperímetro (conexión larga).

se llega a expresiones muy similares:

$$X = \frac{U_X}{I_X} = \frac{(U_m - I_m * R_A)}{I_m} \tag{3.25}$$

$$e_X = \pm\left(1 + \frac{R_A}{X}\right) * \left(e_{U_m} + e_{I_m}\right) \tag{3.26}$$

Por lo que valen los mismos comentarios que para la variante corta: también aquí el error fortuito aparece amplificado por un término, R_A/X, que tiene en cuenta la relación entre la resistencia interna del amperímetro y la de la incógnita.

Es interesante señalar que apareciendo como condicionante de ambas variantes los términos:

$$\frac{X}{R_V} \tag{3.27}$$

y

$$\frac{R_A}{X} \tag{3.28}$$

que dependen de la relación que exista entre la resistencia incógnita y la interna del instrumento cuyo error de inserción aparece en la indicación del otro, resulta de interés encontrar cuál es la posición relativa de ambos que hace mínimo el valor de la (3.24) o de la (3.26), según corresponda.

Si igualamos ambas expresiones obtendremos, para un dado par de instrumentos y para una cierta incógnita, cuál resulta la conexión que da menor factor de amplificación para el error fortuito, y que es, por ende, la que conviene emplear. El valor de X para el cual resultan iguales los factores de amplificación es:

$$X_c = \sqrt{R_A * R_V} \qquad (3.29)$$

como es evidente, para $X < X_c$ deberá emplearse la conexión corta, la larga en caso contrario.

Resulta innecesario destacar que la preocupación por minimizar los factores de amplificación tiene sentido siempre que estos sean importantes frente a la unidad.

Observando las expresiones (3.24) y (3.26), resulta que si $X/R_V \ll 1$, o $R_A/X \ll 1$ respectivamente, ambas tienden a la expresión (3.22.) que es el mínimo error conque se podrá medir esa incógnita con el par de aparatos dado. Por supuesto que será necesario ajustar los valores de tensión o de corriente de tal modo que la lectura se realice en condiciones convenientes.

Por último cabe señalar que si se cumplen los supuestos más arriba indicados para que pueda expresarse el error solamente por la expresión (3.22), el error de inserción del voltímetro en el caso de la conexión corta, o del amperímetro en el de la larga, resultan despreciables, o lo que es lo mismo $U_m \rightarrow U_X$ e $I_m \rightarrow I_X$. En estas condiciones, como es lógico, el error sistemático de inserción es despreciable, o, dicho en otros términos,

$$\frac{U_m}{I_X} \rightarrow \frac{U_X}{I_X} \quad \text{(variante corta)} \qquad (3.30)$$

$$\frac{U_X}{I_m} \rightarrow \frac{U_X}{I_X} \quad \text{(variante larga)} \qquad (3.31)$$

Ejemplo 3.3

Se pretende medir un resistor de aproximadamente 10 Ω y 0,75 A de corriente admisible, empleando el método del voltímetro y el amperímetro. Para ello se dispone de los siguientes elementos:

- Amperímetro clase 0,5, alcance 1 A, 100 divisiones, R_A = 0,2 Ω.
- Fuente de tensión continua, variable de 0 a 50 V, $I_{máxima}$= 5A, $R_{salida} \cong 0$ Ω, mínima variación estable de la tensión de salida 0,01 V.
- Voltímetro de 3½ dígitos, alcances para tensión continua 200 mV, 2, 20, 200 y 1000 V, R_V = 10 MΩ, E_U=±(0,1%U_m + 2 dígitos).

Solución

En primer lugar debería decidirse cuál de las dos conexiones, corta o larga sería la más conveniente. Teniendo en cuenta la expresión (3.29), se puede obtener que $X_c \approx 1{,}4\ k\Omega$, valor sensiblemente mayor que el de la incógnita, por lo que la elección recaerá sobre la conexión corta (figura 3.13). (Observar, sin embargo, que para cualquiera de las conexiones, el factor de amplificación del error fortuito es despreciable frente a la unidad).

Por otra parte, y a fin de efectuar la medición en las mejores condiciones, se ajustará la tensión de la fuente de tal manera de utilizar los instrumentos con la máxima indicación posible. Así se elegirá I_m=0,75 A, con lo cual, si el valor de la incógnita es el dado como aproximado en el enunciado del ejercicio, U_m será igual a 7,5V, ya que el valor de la corriente I_V será completamente despreciable frente a I_m.

El cálculo del error de medición puede hacerse fácilmente utilizando la (3.24). Si se tiene en cuenta que el término X/R_V es despreciable frente a la unidad, se puede escribir:

$$e_X \approx \pm\left(e_{U_m} + e_{I_m}\right) = \pm(0{,}37 + 0{,}67)\% = \pm 1{,}04\% \tag{3.32}$$

Por lo que el resultado final de la medición puede escribirse como:

$$X = (10{,}0 \pm 0{,}1)\Omega \tag{3.33}$$

3.5. Comentarios

Efectuando ahora un análisis del método, desde el punto de vista de su aplicación práctica, podremos señalar algunas de sus características más salientes, a saber:

- No posee limitaciones en cuanto a los valores de resistencia medibles, con las precauciones propias que deben considerarse para la medición de resistencias de valores extremos.
- Permite efectuar mediciones en condiciones de servicio, esto es, tensión y/o corriente de trabajo de la incógnita.
- Su exactitud depende de la indicación de dos instrumentos, por lo que no pueden esperarse errores demasiado pequeños. No obstante permite, sin inconvenientes, cubrir las exigencias de trabajos de índole general.

3.6. Resistores de muy alto valor (Refs. [3], [4])

En la figura 3.15 vemos cómo se plantea el esquema de un resistor cualquiera. Cuando el valor del resistor crece, la corriente que por él circula comienza a ser comparable con la que lo hace por el soporte, de modo que la resistencia a medir comienza a no poder ser definida.

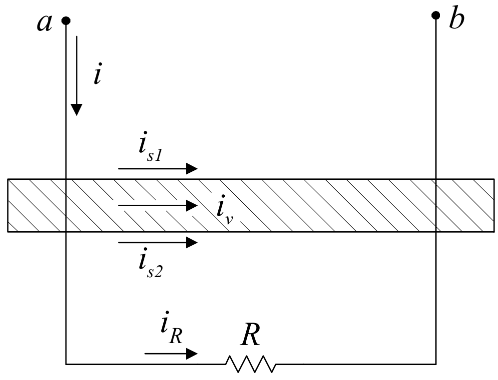

Figura 3.15: Distribución de corriente en una resistencia de muy alto valor con su respectivo soporte.

Es evidente que si los valores de resistencia del aislante pudieran ser conocidos con exactitud, sería factible desafectar del resultado su influencia, pero sucede que estas resistencias son fuertemente variables con las condiciones atmosféricas, con la terminación superficial del aislante, con su grado de limpieza, etc. Luego, el remedio consistirá en lograr que la corriente que por ellos circule no ingrese al sistema de medida, con lo que no aparecerá en el resultado. Para lograr tal efecto es necesario proveer un camino alternativo, que la mande de retorno a la fuente, sin ingresar al instrumento.

En la figura 3.16 hemos presentado un esquema general de la situación. Es interesante destacar que muchas veces lo que interesa conocer son las cualidades del aislante, por lo que prescindiendo del resistor, nos deberemos abocar al estudio de él en particular.

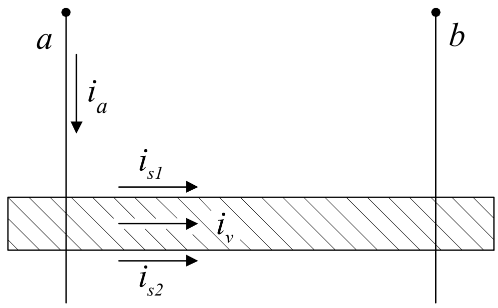

Figura 3.16 Distribución de corriente en una muestra de material aislante

En la figura 3.16 se han marcado tres corrientes por el aislante: dos que supondremos confinadas en la superficie: i_{s1} e i_{s2}, y una tercera, i_v, que circula por el seno del mismo; las llamaremos corrientes de superficie y de volumen, respectivamente, y a las correspondientes resistencias, **resistencia de superficie**:

$$R_s = \frac{U}{\left(i_{s1} + i_{s2}\right)} \tag{3.34}$$

y **de volumen**:

$$R_v = \frac{U}{i_v} \tag{3.35}$$

En tanto que la **resistencia de aislación** sería:

$$R_a = \frac{U}{\left(i_{s_1} + i_{s_2} + i_v\right)} = \frac{U}{i_a} \tag{3.36}$$

Merece comentario aparte el hecho de que tanto una como las otras resistencias caracterizan en cierta manera a un aislante, y su medición plantea problemas a resolver.

Volviendo al tema de eliminar el efecto indeseado de las corrientes que circulan por el aislante, veremos el concepto de electrodo de guarda, que es el que nos permite hacerlo. En la figura 3.17 se aprecia que con la guarda tal como se ha colocado, la totalidad de la corriente que circula por el aislante se deriva a la fuente, sin pasar por el amperímetro, de modo que el cociente U/I_m nos da efectivamente la resistencia que buscamos.

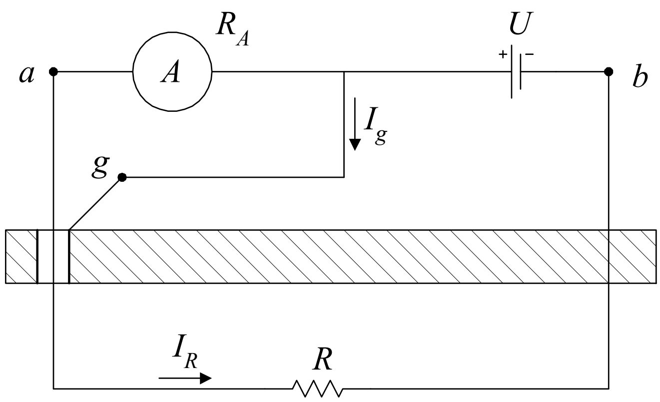

Figura 3.17 Disposición circuital de un electrodo de guarda para la medición de un resistor de muy alto valor.

3.7. Resistores de muy bajo valor

Así como las resistencias de valores muy altos no quedan correctamente determinadas con dos terminales y requieren tres, veremos que las de valor extremadamente bajo tampoco lo hacen con dos.

Consideremos el caso de un resistor de bajo valor, en particular analicemos el borne con el que este se conecta al circuito exterior. Normalmente, la caracterización de un elemento de éstos pasa por la medición de la caída de tensión que se produce en sus bornes cuando por él circula una cierta corriente *I*.
En la disposición real tendremos por ejemplo una situación como la siguiente:

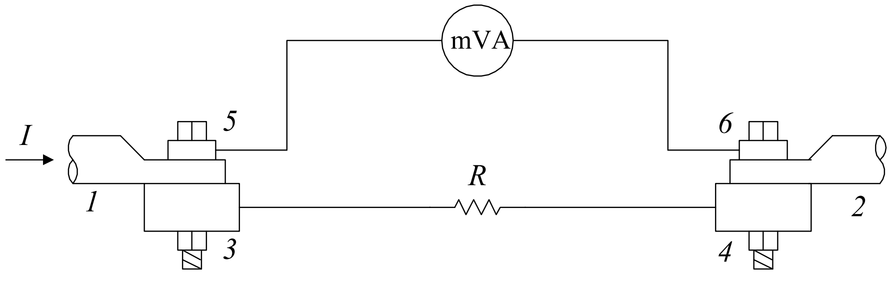

Figura 3.18 Ejemplo de una disposición real de conexión de un resistor de bajo valor.

Con la notación de bornes de la figura anterior el circuito equivalente resulta:

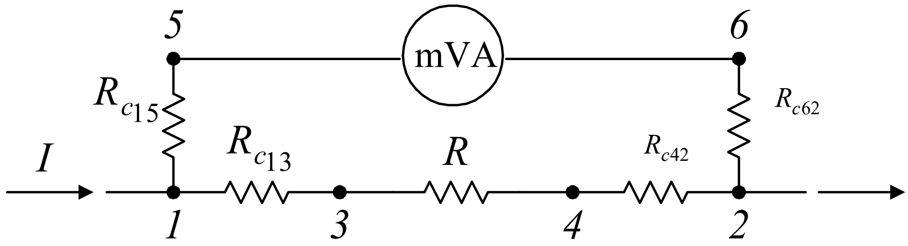

Figura 3.19 Esquema circuital de conexión de un resistor de bajo valor.

Vemos que el milivoltamperímetro no queda en bornes de la resistencia R, sino de la serie: $R + R_{c13} + R_{c42}$, por lo que la caída que él mide no es ciertamente la real. Es dable observar que para cualquier otra combinación que se ensaye con respecto a la conexión del milivoltamperímetro, **si está tomada del mismo punto**, siempre se incurrirá en error. Es claro que desafectar de la caída en R_{c13} y R_{c42} no resulta posible, en virtud de que el valor de las R_c depende de la corriente, de la temperatura, de las características superficiales de los contactos, de los materiales, etc. Por otra parte son del orden de R, si ésta es baja, por lo que el error puede ser enorme.

La solución pasa por separar los bornes de tensión y corriente, con lo que se logra que las R_c, **ahora de valor mayor que el anterior, por razones geométricas**, no pesen en el resultado. En particular no pesarán en absoluto si la medición se hace en circuito abierto.

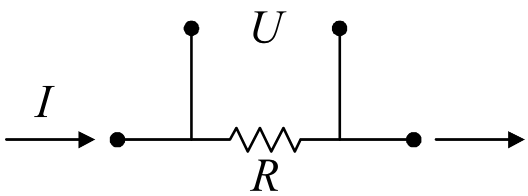

Figura 3.20 Esquema de la separación de los bornes de tensión y corriente para medir un resistor de bajo valor.

En breve resumen podemos decir que ya sabemos caracterizar resistores, desde el punto de vista de su conexión, en todo el rango usual:

- R < algún Ω : 4 terminales
- 10 Ω < R < algún MΩ : 2 terminales
- R > algún MΩ : 3 terminales
- Resistores de alta exactitud : 4 terminales, pueden ser de valores muy bajos o normales.

No son de excluir los resistores de alto valor y calidad que requieren de tres terminales.

En cuanto a los métodos de medida de resistencias de bajo valor podemos citar al voltímetro y amperímetro y a los circuitos puente (como se verá en el próximo capítulo). El de Wheatstone obviamente no sirve. El conectar un resistor a este puente sin que pesen las resistencias de contacto y de los conductores de unión, es imposible a menos que se adopten precauciones especiales. El circuito puente por excelencia para medir resistores de bajo valor es el de Thomson.

3.8. Referencias bibliográficas

[1] Stout, Melville B.: “Basic Electrical Measurements” Pergamon Press, 1960.

[2] Frank, Ernest: “Análisis de medidas eléctricas”, Mc Graw Hill, 1969.

[3] Cooper, William D., Helfrick, Albert D.: “Instrumentación Electrónica Moderna y Técnicas de Medición”, Prentice Hall, 1991.

[4] Dampé, Jorge L.: "Medición de resistencias elevadas", C.E.I.L.P., año 1982