

M E D I D A S E L É C T R I C A S

Guía de estudios

Capítulo 4

*Ing. Jorge L. Dampé
Ing. Ricardo Dias
Cátedra de Medidas Eléctricas*

Capítulo 4

Puentes de corriente continua

4.1. Generalidades del puente de Wheatstone

El circuito puente de Wheatstone, cuyo esquema circuital se muestra en la figura 4.1, se utiliza ampliamente, ya sea como método de cero, para la medición de resistencias, o en condiciones de desequilibrio, para el control o medición de magnitudes no eléctricas.

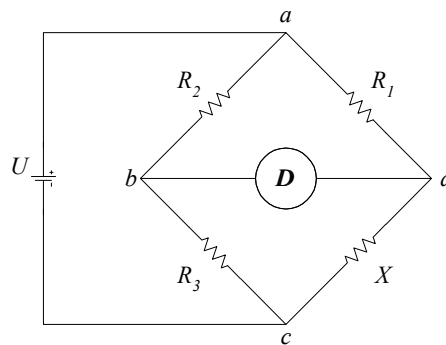


Figura 4.1: Esquema circuital de un puente de Wheatstone.

En el circuito dibujado hemos despreciado la resistencia de la batería por razones de sencillez, apreciación que en la mayoría de los casos reales resulta acertada.

El detector conectado a los bornes *b* y *d* es un instrumento sensible a la corriente continua. Como detector de cero es común el empleo de un galvanómetro de imán permanente y bobina móvil.

Como método de control posee en general, en una de sus ramas, un elemento resistivo sensible a alguna magnitud física (temperatura, longitud, presión, etc.). En tanto, como método de cero, permite medir resistencias con exactitudes que pueden ir desde algún tanto por mil hasta 10 - 20 p.p.m. (como se aprecia, la exactitud lograda es muy alta).

El puente está básicamente constituido por dos divisores de tensión, de relación variable, cuya comparación se logra mediante un adecuado detector. La condición de equilibrio ($U_{bd} = 0$) se cumple siempre que:

$$R_1 * R_3 = R_2 * X \quad (4.1)$$

de donde, conocidas tres de las resistencias del puente, la cuarta, *X*, puede averiguarse a partir de:

$$X = \frac{R_1}{R_2} * R_3 \quad (4.2)$$

que es la conocida ecuación de equilibrio del puente.

Es de destacar que las ecuaciones (4.1) y (4.2) no dependen de la tensión *U*, de lo que se concluye que ésta no pesa en el equilibrio, aunque, como veremos, sí lo hace en cómo se llega a él.

Generalmente, en su uso como método de cero, R_1 y R_2 son dos resistores de alta calidad, variables con ciertas restricciones, que reciben el nombre de **resistores de relación**, y **relación** su cociente, que se busca que sea una potencia entera de 10 por razones de simplicidad de operación. El resistor R_3 es una caja de décadas de alta calidad, que recibe el nombre de **resistor de comparación**. Es dable señalar lo gráfico que resulta el nombre: ajusta la relación del divisor que se compara con el formado por R_1 y X . Obviamente, la cantidad de décadas de R_3 dependerá de la exactitud lograble con un dado puente.

4.2. Estudio del circuito

Para poder analizar el funcionamiento del puente de Wheatstone, usado en cualquiera de las aplicaciones mencionadas, se hace imprescindible determinar cuál es el comportamiento de la corriente en el detector, I_d , ante variaciones de X . Cabe remarcar que el análisis se efectuará considerando pequeños apartamientos de X respecto de su valor de equilibrio (a los que identificaremos como ΔX), ya que como método de cero interesará estudiar su sensibilidad, y como circuito de control en general se busca que tenga un comportamiento lineal, objetivos que sólo se logran con la restricción mencionada.

Para poder realizar el estudio hallaremos inicialmente el circuito equivalente de Thevenin, “visto” desde los bornes del detector (b y d en la figura 4.1). El resultado es el siguiente:

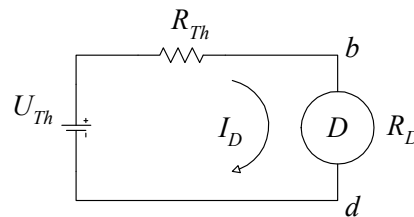


Figura 4.2: Circuito equivalente de Thevenin correspondiente a un puente de Wheatstone como el mostrado en la figura 4.1

donde:

$$R_{Th} = \frac{R_1 * X}{(R_1 + X)} + \frac{R_2 * R_3}{(R_2 + R_3)} \quad (4.3)$$

y

$$U_{Th} = \frac{U * R_2 * \Delta X}{(R_1 + X) * (R_2 + R_3)} \quad (4.4)$$

mediante las cuales podemos hallar la corriente I_D del circuito anterior, como:

$$I_D = \frac{U * R_2 * \Delta X}{(R_1 + X) * (R_2 + R_3) * (R_D + R_{Th})} \quad (4.5)$$

Con relación a la última ecuación, podemos efectuar los comentarios siguientes:

- Si el puente se emplea como método de cero, la ecuación (4.5) permitirá efectuar el análisis de la sensibilidad, como veremos en el punto siguiente.
- Si, en cambio, se emplea como método de control de alguna magnitud física, tal ecuación da la ley de variación del instrumento utilizado como detector respecto de los apartamientos de la resistencia empleada como transductor. Es importante recalcar, que la aparente linealidad de la misma es válida sólo si se cumplen los supuestos considerados para obtener el circuito equivalente (resistencia interna de la fuente despreciable y variaciones de X pequeñas respecto de su valor de equilibrio).

4.3. Análisis de los errores como método de cero

Si operamos con la ecuación (4.2) podemos escribir:

$$e_X = \pm(e_{R_1} + e_{R_2} + e_{R_3}) \quad (4.6)$$

o, si en el puente se conoce la relación $R_1 / R_2 = \rho$:

$$X = \rho * R_3 \quad (4.7)$$

y

$$e_X = \pm(e_\rho + e_{R_3}) \quad (4.8)$$

En las que se ha considerado la contribución de los errores de tarado de los resistores que componen el puente en lo que afecta a X .

Como en cualquier método de cero aparecerá un error de insensibilidad, debido a que existe una cierta corriente I_D , que corresponde a un ΔX y que resulta indetectable.

Para el cálculo del error de insensibilidad procederemos en forma enteramente análoga a lo ya visto en el caso del compensador. Partiendo de la ecuación (4.5), cuando $I_D \rightarrow \Delta_0 I_D$ (mínima corriente detectable), entonces $\Delta X \rightarrow (\Delta X)_i$, por lo que la expresión del error de insensibilidad se puede escribir como:

$$e_i = \frac{(\Delta X)_i}{X} = \frac{\Delta_0 I_D * (R_1 + X) * (R_2 + R_3) * (R_D + R_{Th})}{U * R_2 * X} \quad (4.9)$$

donde R_{Th} se obtiene de la expresión (4.3).

La ecuación (4.9) merece un análisis más detallado:

- e_i es inversamente proporcional a U , de donde se obtiene una conclusión operativa importante: la tensión de alimentación puede utilizarse para ajustar el error de insensibilidad, dentro de ciertos límites.

- Análogamente a lo mencionado para la ecuación (4.5), la relación entre $\Delta_0 I_D$ y $(\Delta X)_i$ (si este último es pequeño) es una función lineal, lo que justifica, en algunas aplicaciones, emplear un método de interpolación también lineal para el cálculo del e_i (ver punto 4.3.2).
- Aparece en el numerador de la ecuación (4.9) un término que depende de la R_{Th} del puente. Es evidente que si ésta es alta el error de insensibilidad puede crecer. (No debe perderse de vista que R_2 y X también forman parte del denominador).
- Hay un término en el numerador que depende de R_D , por lo que, si se cambia el detector, en busca de uno de $\Delta_0 I_D$ adecuado, debe estar atento a que la diferente R_D no arruine las ventajas probables de un $\Delta_0 I_D$ menor. Es de destacar que este comportamiento es el mismo que ya se ha visto en el método de oposición, y será análogo al que resulte en cualquier otro método de cero que emplee un detector como el que nos ocupa.

4.3.1. Determinación de la sensibilidad adecuada

Si analizamos ahora las expresiones completas que nos dan los errores que afectan a X :

$$e_X = \pm(e_{R_1} + e_{R_2} + e_{R_3} + e_i) \quad (4.10)$$

o

$$e_X = \pm(e_\rho + e_{R_3} + e_i) \quad (4.11)$$

vemos que poseen dos términos netamente diferenciados:

- uno que depende de las características del puente, y que no es achicable para uno ya construido (habría que cambiar de puente, y por ende de resistores);
- otro, que es el de insensibilidad, y que puede ser controlado dentro de ciertos límites por el operador. Es evidente que la idea es hacer este error pequeño con relación al anterior, de modo de no desperdiciar las bondades del aparato. El valor de e_i típicamente será del orden de 1/10 del de construcción: menor e_i no agrega nada a la exactitud, pero sí complicaciones en el manejo; mayor e_i significa desaprovechar las bondades de los resistores que componen el aparato.

Ejemplo 4.1

Se pretende medir una resistencia X de aproximadamente 2500Ω ($P_{adm} = 0,5 \text{ W}$), con el menor error posible. Para efectuar la medición se dispone de los siguientes elementos:

- Fuente de tensión continua, variable de 0 a 50 V, $I_{m\acute{a}xima} = 5\text{A}$, $R_{salida} < 1 \Omega$, mínima variación estable de la tensión de salida 0,01 V.
- Galvanómetro: $k_i = 3,2 \mu\text{A/div}$, $R_d = 300 \Omega$, la resolución puede considerarse igual a 0,1 división.
- Puente de Wheatstone, con ecuación de equilibrio $X = (R_1/R_2)*R_3$, en el cual, R_1 y R_2 son resistores independientes que pueden tomar valores de 100, 1000 ó 10000 Ω , ($e_{R1} = e_{R2} = \pm 0,02\%$), R_3 es un resistor de décadas de (10x1000 ; 10x100 ; 10x10 ; 10x1) Ω , ($e_{R3} = \pm 0,02\%$ para las décadas de 1000, 100 y 10 Ω , y $\pm 0,1\%$ para la de 1 Ω). La potencia admisible de cada una de las resistencias del puente es de 0,25 W.

Seleccione los valores de resistencia que asignará a cada una de las ramas del puente y cuál será la tensión con la que lo alimentará. Justifique cada elección.

Solución

Siendo la ecuación de equilibrio del puente disponible $X = (R_1/R_2)*R_3$, y con el fin de utilizar la mayor cantidad de décadas posibles de R_3 , seleccionaremos inicialmente $R_3 \approx 2500\Omega$, con lo cual (R_1/R_2) será igual a 1. Este valor puede obtenerse, por ejemplo, haciendo $R_1=R_2=1000\Omega$ (Ref. [1]). Llegado este punto, y ya que se dispone de un único detector de cero, restaría definir cuál será el valor de la tensión de alimentación. Para ello, con los valores asignados antes a los resistores, comenzaremos calculando la máxima tensión que puede aplicársele al circuito sin provocar daños permanentes a sus componentes. Así, en la rama R_1-X , la corriente admisible está determinada por X , y es igual a:

$$I_{(R_1-X)adm} = \sqrt{\frac{0,5}{2500}} = 14mA$$

En tanto, en la rama R_2-R_3 , la corriente admisible es igual para ambas:

$$I_{(R_2-R_3)adm} = \sqrt{\frac{0,25}{1000}} = 16mA$$

Por lo tanto, la tensión máxima admisible estará definida por la rama R_1-X , y será:

$$U_{adm} = 14 \text{ mA} * 3500\Omega = 49 \text{ V}$$

El valor obtenido no implica que sea necesario aplicarlo para efectuar la medición, sino simplemente que el mismo no debe ser superado. En la práctica, en general, la tensión se aumenta progresivamente desde un valor bajo hasta conseguir una adecuada sensibilidad en la última década de R_3 . Posteriormente, con el método que se desarrolla en 4.3.2, podrá hallarse el error de insensibilidad cometido.

Un cálculo adicional, no demasiado engorroso, permitiría estimar un valor de tensión que haga despreciable el error de insensibilidad. Para este ejemplo, considerando que el error total de la medición, debido a la tolerancia de los resistores en juego, será:

$$e_X = \pm(e_{R_1} + e_{R_2} + e_{R_3}) = \pm 0,06\%$$

debería buscarse que e_i sea despreciable frente al $\pm 0,06\%$, por ejemplo, $e_i \leq \pm 0,006\%$. En ese caso, empleando la ecuación 4.9, podría determinarse qué valor mínimo de U sería necesario para cumplir tal requisito.

4.3.2. Determinación de la sensibilidad en forma experimental

La ecuación (4.9) sirve en etapa de dimensionado del puente. Cuando éste ya está armado, al final de cada medida, es práctica aconsejable la determinación experimental de la sensibilidad. A partir de la ecuación (4.2), que transcribimos a continuación por comodidad:

$$X = \frac{R_1}{R_2} * R_3$$

se puede llegar a que, si R_3 se aumenta en ΔR_3 , X se modificará en ΔX , esto es:

$$\Delta X = \frac{R_1}{R_2} * \Delta R_3 \tag{4.12}$$

de donde:

$$\frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta R_3}{R_3} \quad (4.13)$$

y en el límite:

$$\frac{(\Delta X)_i}{X} = \frac{(\Delta R_3)_i}{R_3} \quad (4.14)$$

y el cálculo de $(\Delta X)_i$ se reduce al de $(\Delta R_3)_i$, que puede hacerse en forma experimental.

Ejemplo 4.2

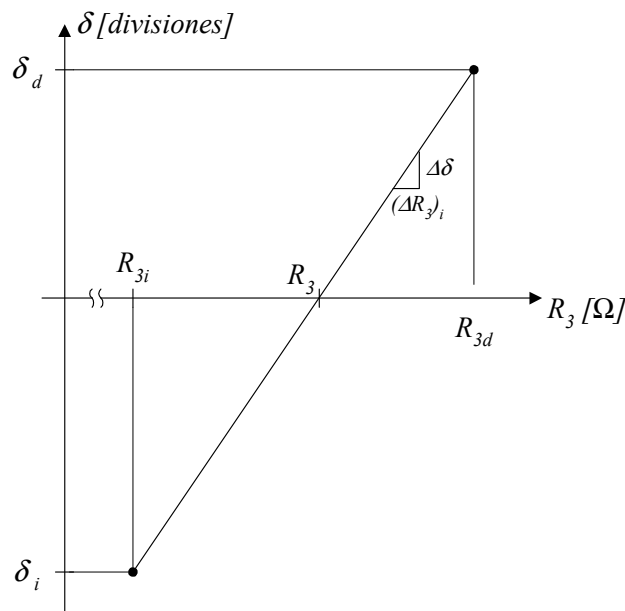
Un operador efectuó la medición requerida en el ejercicio 4.1, armando el puente según la solución propuesta. Al finalizar la medida decidió determinar en forma experimental el error de insensibilidad. Para ello, dio variaciones a R_3 , obteniendo los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} R_{3d} &= 2512 \, \Omega & \text{-----} & \delta_d = 5 \text{ divisiones} \\ R_{3i} &= 2497 \, \Omega & \text{-----} & \delta_i = 6 \text{ divisiones} \end{aligned}$$

Determine cuál fue el error porcentual de insensibilidad cometido por el operador y cuál el valor de R_3 para el equilibrio. Expresé el resultado final de la medición correctamente acotado.

Solución

Con los datos dados se puede construir el siguiente gráfico:



en el cual $(\Delta R_3)_i$ y $\Delta \delta$ (que corresponde a la resolución del detector) han sido dibujados de un tamaño superior al que correspondería por la escala del gráfico, a los fines de una mejor visualización.

Cabe remarcar que, según lo mencionado más arriba, se supuso un comportamiento lineal de la deflexión del detector respecto de las variaciones de R_3 , considerando pequeños apartamientos de esta última en torno de su valor de equilibrio.

A partir del gráfico anterior, puede calcularse R_3 para el equilibrio como:

$$R_3 = R_{3d} - \delta_d * \left(\frac{R_{3d} - R_{3i}}{\delta_d - \delta_i} \right) = 2505 \Omega,$$

y $(\Delta R_3)_i$ como:

$$(\Delta R_3)_i = \pm \Delta \delta * \left(\frac{R_{3d} - R_{3i}}{\delta_d - \delta_i} \right) = \pm 0,14 \Omega$$

Con lo cual será:

$$e_i = \pm \frac{(\Delta R_3)_i}{R_3} * 100 = \pm 0,0056 \%,$$

despreciable frente al error propio de construcción del puente ($\pm 0,06\%$).

El resultado final de la medición prodrá expresarse entonces como:

$$X = (2505 \pm 2) \Omega$$

4.4. Adaptación del puente de Wheatstone para medición de resistencias de alto valor

Analizamos ya cómo se arma el puente de Wheatstone y cómo se calcula el error de insensibilidad, en forma analítica y experimental. No hemos analizado aún cómo influyen las resistencias de los conductores de conexión o de contacto, ni qué sucede cuando la incógnita toma valores altísimos. Veremos ahora cómo se generaliza este método a resistores de valores muy altos, desde algún $M\Omega$ hasta los $T\Omega$. (Se remite al lector al Capítulo 3, donde se han caracterizado los resistores de este tipo).

Cuando se pretende medir una resistencia de valor muy alto con el puente de Wheatstone aparecen los siguientes problemas:

- La sensibilidad disminuye, en gran parte debido al aumento de la resistencia equivalente del puente.
- Se hace muy difícil lograr valores de $(R_1 / R_2) * R_3$ tales que lleguen a miles o millones de $M\Omega$, con la configuración tradicional.
- Sin precauciones especiales (circuitos de guarda), las incógnitas no quedan bien definidas. Es de destacar que los circuitos de guarda no son patrimonio exclusivo de los puentes megóhmetros, ya que también los poseen los de Wheatstone de alta calidad y exactitud.

Los puentes megóhmetros representan una modificación del de Wheatstone, capaz de resolver los problemas antes citados, con un compromiso de exactitud y rapidez.

Veremos cómo se soluciona el conjunto de problemas mencionados:

En primer lugar se aumenta la tensión, no sólo con el fin de mejorar la sensibilidad, sino para lograr medir en condiciones de servicio o de referencia, esto es, imponiendo al aislante las exigencias con que se encontrará en servicio, o las normalizadas a fin de lograr resultados com-

parables. Es de destacar, a este punto, que la resistencia de aislación es también función de la tensión, de ahí la necesidad de medir en condiciones reales, o al menos comparables.

Con este fin se adecua R_1 de manera que sea mucho menor que X , de modo de suponer que en ésta cae toda la tensión (casi siempre 100, 500 ó 5000 V).

Para lograr que el producto $(R_1 / R_2) * R_3$ dé el alto valor buscado, se hará:

- R_1 : grande hasta donde lo permita la condición más arriba expuesta, ($R_1 \ll X$). El hecho de hacerla de alto valor excluye que sea variable. Se dispondrá de un juego de ellas que se irán seleccionando en función del caso concreto.
- R_3 : fija y muy alta, por razones similares a las de R_1 , sin contar con que se debe cumplir que en R_3 también caerá casi toda la tensión.
- R_2 : de valor relativamente bajo y variable con la forma usual (décadas o con continuidad).

Es de señalar que con esta elección de elementos fijos y variables, el puente trabajará a **relación variable**.

Para fijar ideas, los siguientes son valores de un puente comercial de alta calidad:

- R_1 : desde 10 Ω hasta 10.000 $M\Omega$,
- R_2 : resistor de alambre de 5,5 $k\Omega$ (reóstato),
- R_3 : resistor fijo de 500 $k\Omega$

La exactitud conseguible varía entre ± 1 %, para la medición de resistencias del orden de las decenas de $k\Omega$, hasta ± 10 % al límite de su rango de medida. Es de señalar que esta exactitud puede considerarse óptima para tales valores de resistencia.

Veremos ahora cómo proceder con la guarda: el tema a considerar aquí es su conexión en alguna de las diagonales del puente, de modo que no intervenga en las condiciones de equilibrio. Si pensamos en el circuito equivalente de un resistor de tres terminales:

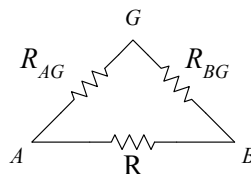


Figura 4.3: Circuito equivalente de un resistor de tres terminales

es obvio que A y B irán a los bornes de conexión de la incógnita (A y B en la figura 4.4), en tanto que el G en el circuito en estudio (al que se conecta la guarda) va al punto común de R_2 y R_3 , con lo que R_{BG} queda en paralelo con el detector (quita algo de sensibilidad) y R_{AG} queda en paralelo con R_3 , lo que no es grave pues $R_{AG} \gg R_3$ en todos los casos reales. En cuanto al detector de cero, se emplea uno electrónico de alta sensibilidad.

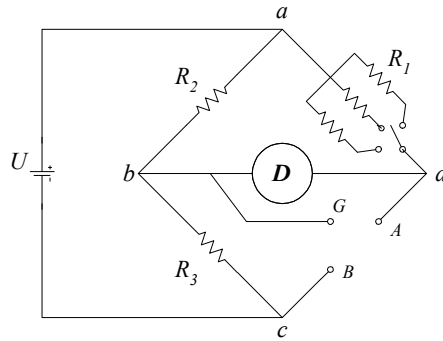


Figura 4.4: Esquema circuital de un puente para medir resistores de alto valor.

4.5. Adaptación del puente de Wheatstone para medición de resistencias de bajo valor. Generalidades del puente de Thomson

El puente de Thomson surge como una modificación del de Wheatstone, con el fin de evitar las dificultades que éste último presenta cuando las resistencias a medir son de valor comparable a las de contacto y a las de los conductores de unión del circuito.

Veamos cómo se vinculan ambos puentes:

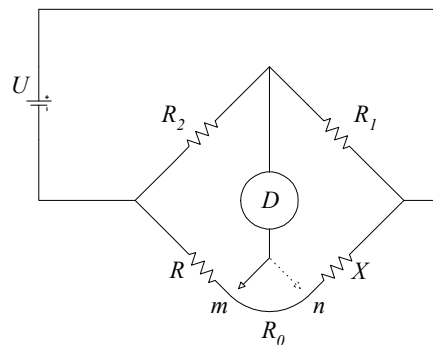


Figura 4.5: Presentación del problema suscitado al medir resistores de muy bajo valor con un circuito puente de Wheatstone como el esquematizado en la figura 4.1.

En la figura 4.5 el detector se puede conectar a ambos lados del conductor de unión R_0 . Se observa que, estando éste en el punto n , el valor leído de R es menor que el verdadero que da el equilibrio, resultando entonces una medición en defecto de X . En cambio, si el contacto se encuentra en m , medimos $X + R_0$. Resulta evidente que existe un punto intermedio entre el m y el n , en el cual el error es nulo (figura 4.6).

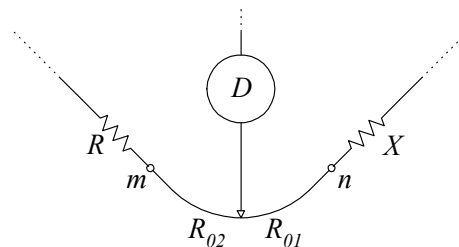


Figura 4.6: Detalle del circuito puente de Wheatstone, esquematizado en la figura 4.1 en las vecindades del borne c .

De las consideraciones para el equilibrio:

$$R_1 * (R + R_{02}) = R_2 * (X + R_{01}) \quad (4.15)$$

De donde surge que el error será nulo, si se cumple:

$$\frac{R_{01}}{R_{02}} = \frac{R_1}{R_2} \quad (4.16)$$

Para asegurar esta relación se conecta el detector a un divisor de tensión en paralelo con R_0 , figura 4.7.

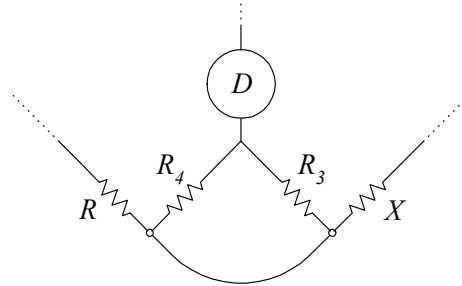


Figura 4.7: Esquema circuital propuesto para la solución del problema presentado en las figuras 4.5 y 4.6.

Con lo que, para que el error sea nulo, se debe cumplir:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad (4.17)$$

Con las modificaciones efectuadas al puente de Wheatstone llegamos al de Thomson, como se muestra en la figura 4.8.

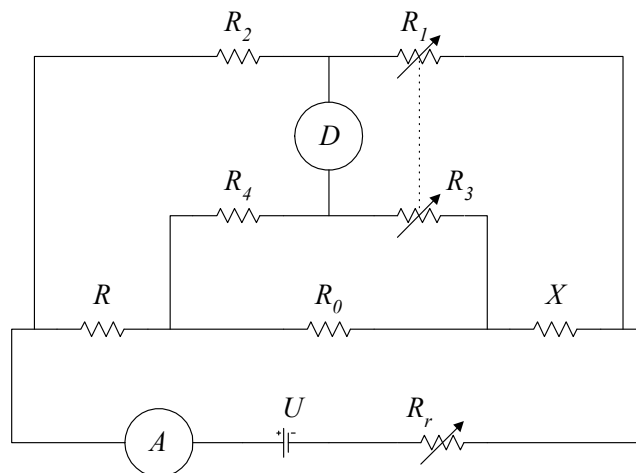


Figura 4.8: Esquema circuital de un puente de Thomson.

Es inmediato visualizar la aplicabilidad del esquema de 4 terminales analizado en el Capítulo 3, para la adecuada definición de resistores de muy bajo valor.

Supuesta ya deducida la condición de equilibrio, analizamos la influencia que en los errores totales del puente, tiene la posible desigualdad de las relaciones R_1/R_2 y R_3/R_4 .

Como la serie $X + R + R_0$ es mucho menor que las restantes resistencias del circuito, se puede suponer que toda la corriente I se deriva por dicha serie, y la indicación del amperímetro nos da efectivamente la corriente de trabajo de X y R . Es evidente que si la potencia de disipación de R lo consiente, el puente es capaz de medir en condiciones de servicio.

La ecuación de equilibrio es:

$$X = \frac{R_1}{R_2} * R + \left[R_0 * \frac{R_4}{(R_0 + R_3 + R_4)} \right] * \left(\frac{R_1}{R_2} - \frac{R_3}{R_4} \right) \quad (4.18)$$

que, como se hace por construcción que $R_1/R_2 = R_3/R_4$, se transforma en:

$$X = \frac{R_1}{R_2} * R \quad (4.19)$$

que es la ecuación usual del puente de Thomson.

Ahora bien, $R_1/R_2 = R_3/R_4$ sólo en la indicación de los correspondientes diales, ya que debido a los inevitables errores que las afectan, el último paréntesis de la ecuación (4.18) sólo excepcionalmente valdrá cero.

Trataremos de encontrar el valor de dicho error, para lo que evaluaremos el segundo término del segundo miembro de la ecuación (4.18), y definiremos como **error de acoplamiento (E_a)** al máximo valor que puede tomar debido a la no nulidad de $(R_1/R_2 - R_3/R_4)$. Si consideramos $e_{R_i} = e$, obtendremos:

$$e_a = \pm 4 * e * \frac{R_0}{(X + R)} \quad (4.20)$$

de donde resulta que R_0 es una variable que permite controlar que el error de acoplamiento no exceda el límite deseable para un dado puente.

4.6. Referencias bibliográficas

- [1] Stout, Melville B., "Basic electrical measurements", Prentice-Hall, 1960.
- [2] Cooper, William, "Instrumentación electrónica y mediciones", Prentice-Hall, 1982.
- [3] Jones, Larry D., Foster Chin, A., "Electronic instruments and measurements", Prentice-Hall, 1991.
- [4] Wolf, S., Smith, R. F. M., "Guía para mediciones electrónicas y prácticas de laboratorio", Prentice-Hall, 1992.