

M E D I D A S E L É C T R I C A S

Guía de estudios

Capítulo 1

*Ing. Jorge L. Dampé
Cátedra de Medidas Eléctricas*

Capítulo 1

Errores de medición

1.1. El concepto de medición

Las mediciones de la más diversa índole ocupan un lugar importante en todas las situaciones de la vida cotidiana, aunque uno no se percate de que está midiendo. El simple hecho de pedir una cantidad determinada de un dado producto involucra en sí todas las etapas que aparecen en cualquier proceso de medición. En un curso de Medidas en general se dan las herramientas necesarias para lograr mediciones de calidad. En uno de Medidas Eléctricas en particular, esos conocimientos se enfocan al campo en el que las magnitudes a medir son eléctricas o *admiten una representación eléctrica*. Para poder efectuar un análisis profundo de las mediciones, lo primero que deberemos hacer es definir qué se entiende por “medir”. El diccionario de la Real Academia define el significado del vocablo medir en estos términos: “comparar una cantidad con su respectiva unidad, con el fin de averiguar cuántas veces la primera contiene la segunda”, en su primera acepción, en tanto que en la tercera establece “igualar y comparar una cosa no material con otra”. En estas definiciones, aplicables a situaciones comunes, está el germen de la definición que nosotros aplicaremos al campo específico de las Medidas Eléctricas:

"Medir una cantidad de una magnitud es compararla con otra de la misma magnitud que se adopta como unidad"

En la anterior dos vocablos requieren de una definición unívoca, **magnitud** y **cantidad**:

Magnitud: físicamente la definiremos como toda propiedad (de un cuerpo) que pueda ser medida. Así, son magnitudes la longitud, el peso, la intensidad de una corriente eléctrica, etc. Surge inmediatamente que no todas las magnitudes que hemos mencionado más arriba participan de una misma categoría: mientras que la longitud es una magnitud escalar, el peso lo es vectorial, y si consideráramos por ejemplo el esfuerzo en un punto de un sólido nos encontraríamos con que es de carácter tensorial.

El segundo término por aclarar es:

Cantidad: es el número, o la n-upla o la matriz que nos permite hacer la comparación cuantitativa respecto de la que se tomó como unidad de la magnitud.

Así, por ejemplo, diremos que la intensidad de una corriente continua es de 3 A, donde **3** es la **cantidad** que nos dice la relación que existe entre la cantidad que se tomó como unidad y la medida; o estableceremos que la resistencia de un dado conductor es de 45 mΩ, etc. En muchos casos, para simplificar el análisis de los circuitos eléctricos se recurre a representaciones convencionales que tienen la ventaja de facilitar los cálculos o permitir poner de manifiesto características especiales de funcionamiento que de otra manera no resultarían tan patentes. El uso de fasores o componentes simétricas son dos casos típicos de un grupo que sin duda es mucho más extenso. En estos casos también son aplicables las definiciones de más arriba. Si queremos caracterizar a una impedancia en condiciones de régimen permanente de alterna, diremos que a la frecuencia f su valor es, por ejemplo, $(3,4) \Omega$ o $(3 + j4) \Omega$ o 5Ω con ángulo 53° . Este último es un caso en que tomamos un par como representación *convencional* de una impedancia.

Hecha esta pequeña introducción nos abocaremos al problema de medir, que para ser resuelto requiere la correcta definición y ejecución de los siguientes pasos:

- 1) ¿Qué es lo que vamos a medir?
- 2) ¿Cómo vamos a hacerlo?
- 3) ¿Con qué elementos?

Aunque parezca evidente, el recorrer los tres puntos anteriores no necesariamente es una tarea sencilla, y mucho menos trivial. No siempre la incógnita está bien definida, más aún, su caracterización suele plantear, muchas veces, la mayor dificultad en la resolución de un problema técnico.

Pensemos en un caso concreto: un cierto dispositivo que ha dejado de funcionar. Para ser más claros, y sin quitar generalidad, consideremos que ese elemento es algo tan simple como una batería de acumuladores, de plomo ácido, y que al lector, experto en el tema, le plantean el problema en la forma usual: “la batería no funciona”. Puesto a la tarea de volverla a las condiciones de uso (algo no siempre posible), existen muchas situaciones distintas que él deberá considerar: puede suceder que el equipo encargado de cargarla no provea la suficiente cantidad de carga, o el equipo alimentado haya aumentado su consumo, o simplemente que la batería haya llegado al final de su vida útil, y que por lo tanto su capacidad de almacenar carga se haya visto disminuida. Para poder determinar cuál o cuáles de las situaciones anteriores son las que provocan el mal funcionamiento, será necesario efectuar las mediciones correspondientes, con el fin de verificar el funcionamiento de la batería en sí y de los elementos con ella relacionados. En este simple problema se ponen de manifiesto las condiciones que se dan en la mayoría de los problemas técnicos. Antes de ponerse a medir, es necesario contar con los conocimientos mínimos del problema en estudio, para saber qué y cómo medir. Las Medidas Eléctricas así no pueden existir solas, sino como una herramienta de diagnóstico imprescindible para solucionar los problemas que aparecen en forma permanente en el mundo eléctrico y electrónico. El encargado de efectuarlas deberá acreditar un conocimiento acabado de las técnicas de medición y de las características de uso y funcionamiento de los equipos a los cuales efectuará las mediciones.

En el ejemplo anterior se pone de manifiesto, por último, otra característica típica de la mayoría de los problemas técnicos: al encargado de resolverlo se le han planteado varias posibles soluciones, y puede suceder que más de una de ellas coexistan. Esta multiplicidad de soluciones, que suele llamar la atención del lector no acostumbrado, no debe extrañarle, sino que lo obligará a optar por una determinada de ellas, y para hacerlo deberá considerar otros factores, tales como el económico, la agresión al medio ambiente, etc.

Una vez que está definido qué es lo que se medirá, aparece el problema de seleccionar cómo se hará la medida, esto es, con qué aparatos y eventualmente con qué personas. Estas dos últimas tareas no necesariamente son independientes, ya que muchas veces la disponibilidad de personal adecuado es la que vuelca la decisión hacia uno u otro método o aparato de medida. La correcta solución de esta parte del problema, en muchos casos requiere la presencia de especialistas en el tema.

1. 2. Errores de medida

Una vez que se ha logrado obtener el valor de la cantidad medida, que llamaremos X_m , puede llegar a creerse que el problema ya está solucionado. Muchas veces sí lo estará, pero en la mayo-

ría de los casos no sucede así, pues se plantea en forma inmediata una duda:

¿Hasta qué punto el valor que acabamos de encontrar se acerca al valor verdadero? La respuesta, si bien no es difícil de obtener, tampoco es obvia. En primer lugar es necesario definir qué se entiende por valor verdadero. En muchos casos es fácil encontrarlo, por ejemplo, si nos ponemos a contar la cantidad de espectadores presente en un determinado espectáculo, no cabe duda que si somos suficientemente cuidadosos podremos obtener dicho valor. En otros casos, en cambio, la definición del valor verdadero se complica, pues éste puede directamente no existir. Supongamos que estamos interesados en encontrar el diámetro de un eje de sección circular de alrededor de 1 cm, y cuya longitud es de 20 cm. Si utilizamos un buen calibre podremos llegar a apreciar, digamos, menos de un décimo de milímetro. Un buen micrómetro, por su parte, nos permitirá llegar hasta la milésima de milímetro. Pero si en nuestro afán perfeccionista queremos llegar a encontrar un número que podamos tomar en forma absoluta como el diámetro de la pieza nos encontraremos con que dicho número directamente no existe, pues en el límite no hay un único valor de la medida, sino muchos y variables en el orden de las imperfecciones de la misma, o si queremos de las distancias intermoleculares.

Si ahora nos preguntamos cuán buena es nuestra medida, nuestra primera tendencia es decir que cuanto más próximo al valor verdadero se encuentre el resultado, tanto mejor será. Sin embargo, un simple caso nos mostrará que esa respuesta, que surge como natural, no siempre es válida. Pensemos que la medición del diámetro de la pieza que más arriba se ha considerado se haga con el propósito de definir las dimensiones de los embalajes individuales de cartón dentro de los cuales se las piensa despachar al mercado. Está claro que con sólo una aproximación de, digamos, 0,2 cm, alcanza para definir la dimensión del embalaje correspondiente al diámetro, y que no tiene sentido pretender medir a la milésima de milímetro para este fin. Es más, quien pretendiera medir dentro de esos límites, con el objetivo de establecer las dimensiones del embalaje, estaría haciendo mala ingeniería, pues lograría un número que, si bien será válido, es innecesariamente cercano a la verdad, y su determinación requerirá esfuerzos inútiles.

Pensemos ahora que el objetivo, con el mismo eje, sea otro. Que queramos conocer el diámetro con el fin de seleccionar el cojinete que se adapte a dicho eje. Ahora sí, la medición deberá efectuarse dentro del centésimo de milímetro como mínimo, por lo que la determinación que servía para el embalaje resulta inadecuada para el nuevo fin.

Estos simples casos nos ponen de manifiesto que la determinación de cuánta es la aproximación que se requiere al valor verdadero depende de la naturaleza del problema, y varía de caso en caso. Más adelante podremos formular una regla de carácter general.

Surge también en forma natural que el valor verdadero no será único sino que se ajustará a las necesidades del caso. Retomando el ejemplo del espectáculo, según cuál sea el objetivo que persigue quien hace la medida será el valor que le sirve como verdadero. Si todo lo que quiere es comparar en forma aproximada la concurrencia con la de otro evento, le bastará por ejemplo, con decir que ésta es del orden de 500 personas. Si en cambio el objetivo es saber si la concurrencia supera a la de una ocasión anterior, y con una medida aproximada no le alcanza, tendrá que esforzarse para contar a todos y llegar a determinar que dicho número es, a modo siempre de ejemplo, de 503 personas.

Si analizamos cuidadosamente lo que más arriba hemos expuesto llegaremos en forma natural a obtener dos conclusiones:

- 1) No existe una regla única e invariable para determinar hasta qué punto es necesario acercarse al valor verdadero, si éste fuera conocido;
- 2) Como es lógico, cuanto más cercano a él se quiera llegar, tanto mayor será el esfuerzo, y por

ende el costo.

Si analizamos detenidamente lo que se ha considerado en los dos casos anteriores vemos que en ambos aparece la misma situación, motivada por el hecho de que el valor verdadero, ora es imposible de determinar, ora es difícilmente loggable, por lo que deberemos conformarnos con aproximaciones más o menos buenas, cuya aceptabilidad depende de cada caso particular.

Hemos arribado en forma natural al concepto de error, que en la técnica de las mediciones no tiene el sentido que le da el lenguaje corriente de falta de verdad o de equivocación o falsedad, sino simplemente el de determinar hasta qué punto una medida se aproxima al valor que se considera como verdadero.

Definiremos el **error absoluto**, E_x , como la diferencia:

$$E_x = X_m - X_v \quad (1.1)$$

donde X_m es el valor medido y X_v el verdadero. La (1.1) nos mueve a preguntarnos ¿si conocemos el valor verdadero, para qué medimos?, que como es lógico, merece una respuesta adecuada. Nuestro objetivo, ya que casi nunca conoceremos el valor verdadero, será llegar a encontrar una cota del error absoluto, para a partir de ella y del valor medido estimar dentro de qué rango se hallará, con una cierta probabilidad, el valor verdadero. Si tenemos en cuenta que éste a veces no se conoce y otras no existe, adoptaremos para cada caso un valor que a todos los efectos lo consideraremos *como si fuera verdadero*, y que llamaremos **valor verdadero convencional**, X_{vc} . Pasaremos a definir entonces, nuestro error absoluto como:

$$E'_x = X_m - X_{vc} \quad (1.2)$$

En lo que sigue se usará E_x indistintamente para ambas definiciones. Un ejemplo aclarará lo antes dicho respecto de la diversidad de valores verdaderos convencionales.

Supongamos que estamos interesados en medir el valor de la tensión que aparece en bornes de una fuente de tensión ideal. Si todo lo que queremos es saber su orden de magnitud puede bastarnos la indicación de un voltímetro común, como los que forman parte de los instrumentos de uso múltiple, comúnmente llamados "testers"; supongamos que la lectura del aparato sea 1,52 V. Si no nos merece fe dicha indicación podemos poner en uso un aparato de mejor calidad, que señalará, por ejemplo 1,518 V. Éste será el valor verdadero convencional del anterior. Si a este último tampoco le tenemos mucha confianza, usaremos uno mejor aún, que marcará, digamos 1,5167 V, y que se constituirá en el nuevo valor verdadero convencional.

1.3. Número de cifras significativas

En el ejemplo que consideramos al final de la sección anterior, encontramos que cuanto más cercano a la verdad se encuentra el valor que hemos medido, tantas más cifras significativas se le han colocado en su expresión. Supongamos que la medición de una corriente arroja el siguiente resultado: $I_m = 2,514$ A. El valor verdadero, conocido de alguna manera resulta $I_{vc} = 2,325$ A. El cálculo del error absoluto nos conduce a:

$$E_I = I_m - I_{vc} = 2,514 - 2,325 = 0,189 \text{ A} \quad (1.3)$$

Si analizamos lo que hemos escrito comprenderemos que si nuestra duda está en el orden de las décimas de ampere, *carece de sentido* que expresemos el resultado con una colección de cifras

que son todas dudosas, por un lado, y por otro que también el error absoluto está escrito con cifras que no dicen nada (¿alguien pretendería leer miligramos en una balanza cuyo error sea medio decigramo?).

Adoptaremos en lo que sigue la convención de escribir el error absoluto *con una sola cifra significativa, y el resultado de la medición con cifras que lleguen hasta la del orden del error, redondeando, no truncando, los resultados*. Así, en el caso anterior el error se escribirá como

$$E_I = 0,2 \text{ A} \quad (1.4)$$

y el valor medido como

$$I_m = 2,5 \text{ A} \quad (1.5)$$

Es así que en la técnica de las medidas eléctricas, dos números con distinta cantidad de cifras significarán mediciones distintas, aunque sus órdenes de magnitud sean similares. Por ejemplo, 2,0 A y 2,00 A indican dos medidas hechas con errores diferentes. En la primera de ellas podemos pensar que las cifras dudosas comienzan a partir de los décimos de volt, en tanto que en la segunda dicha duda arranca a partir de los centésimos de la misma unidad. Es interesante destacar que cuando nos referimos a las cifras dudosas, lo que da su orden es el lugar que ocupan en la expresión numérica del resultado, y no el valor absoluto del decimal correspondiente. Por lo tanto, dos mediciones, una cuyo resultado sea 2,0 A, y otra cuyo valor sea 3,3 A, por ejemplo, corresponden a dos casos en los cuales la incertidumbre absoluta es la misma, y se sitúa en el orden de los décimos de volt.

La antes expuesta no es la única convención existente para expresar el resultado de una medición (Ref.[1]), pero sí es ampliamente aceptada. Es bastante frecuente una representación en la cual se escribe como si fuera un subíndice el valor que arrojó en la medida el decimal cuyo orden de magnitud es el mismo que el del error. Si se opta por una expresión de este estilo, el resultado adoptará la siguiente forma, que corresponde a un ejemplo en el que se da el valor de un capacitor, y que es inmediatamente generalizable:

$$C_x = 102,6_2 \text{ pF} \quad (1.6)$$

que se debe interpretar como que el valor resultante de la determinación de la capacidad arrojó el resultado que se ha escrito, pero que la duda aparece en las centésimas de pF. El valor 2 es el que se midió, pero no puede asegurarse que sea el verdadero. Como veremos cuando hagamos el tratamiento estadístico de los errores, esa cifra tiene una probabilidad mayor que cualquier otra de acercarse a la verdad.

1.4. El concepto de error relativo

Cuando se trata de comparar dos mediciones de una misma cantidad, el error absoluto puede ser todo cuanto se necesite, pero es a todas luces insuficiente si lo que se desea es comparar la calidad de dos medidas de cantidades muy diferentes. Para solucionar este problema se introduce el concepto de **error relativo** definido simplemente como el cociente del error absoluto por el valor verdadero (o verdadero convencional si aquél no fuese conocido):

$$e_x = \frac{X_m - X_v}{X_v} \quad (1.7)$$

o alternativamente, si se conoce el valor verdadero convencional, lo que es el caso más frecuente

$$e'_x = \frac{X_m - X_{vc}}{X_{vc}} \quad (1.8)$$

Generalmente se expresa en por ciento. Si aplicamos esta definición al ejemplo del punto 1.3., ecuaciones (1.4) y (1.5), encontramos que el error relativo resulta $e_r = 8\%$. Tampoco en este caso haremos a partir de ahora distingos entre e_x y e'_x .

1.5. El concepto de error límite

En lo que precede hemos insistido en las definiciones que son básicas en todo el cálculo de errores. Si consideramos que casi nunca conocemos el valor verdadero, pero sí el medido, y que nuestro objetivo es determinar una cierta zona dentro de la cual, conocido el error, sabemos que se hallará el valor verdadero, aparece claro que éste podrá, en general estar un tanto por arriba o un tanto por abajo del valor medido. Debemos en consecuencia, encontrar cotas superior e inferior del error absoluto, δ_s y δ_i de modo que podamos escribir:

$$X \in [X_m - \delta_i, X_m + \delta_s] \quad (1.9)$$

La anterior nos dice que X , desconocida para nosotros, está en algún punto del intervalo cerrado de amplitud $\delta_s + \delta_i$, centrado en X_m . Estas cotas, lo suficientemente amplias como para que podamos tener la casi certeza de que la 1.9 se cumpla, corresponden a los llamados *errores absolutos límites*. Los errores relativos que a partir de ellos se calculen recibirán el nombre de *errores relativos límites*. Muchas veces $|\delta_i| = |\delta_s| = \delta$ y el resultado de la medición se escribirá, poniendo en forma general X :

$$X = X_m \pm \delta \quad (1.10)$$

donde, si $\delta = E_x$ se tendrá:

$$X = X_m \pm E_x \quad (1.11)$$

que se interpreta, si E_x es el error absoluto límite, diciendo que valor verdadero se encuentra en un punto del intervalo de amplitud $2E_x$, centrado en X_m . Es importante recalcar que conocemos la amplitud del intervalo donde sabemos que se halla X , pero no conocemos el punto en el que realmente está.

Como veremos, todo nuestro esfuerzo se dedicará a poder conocer las cotas de error absoluto de cada medición que efectuemos, con lo que estaremos en condiciones de escribir el equivalente de la fórmula 1.11 para cada caso particular. Es evidente que conocido el error absoluto se podrá llegar al relativo y viceversa.

1.6. Exactitud y precisión

En todo lo que antecede no ha sido usado jamás el término precisión, pero sí exactitud. Si bien en el lenguaje corriente son casi sinónimos, no sucede lo mismo en el campo de las medidas eléctricas, en el que poseen significados bien diversos.

Para nosotros **exactitud** será sinónimo de cercanía a la verdad, esto es, cuanto más exacta sea una medida, tanto menor resultará su error. **Precisión**, en cambio, tiene en cuenta la repetibilidad de la medida. Si un dispositivo arroja siempre el mismo resultado cuando se le aplica la misma excitación, independientemente de su exactitud, se dirá que es preciso. Es claro que la precisión es un requisito de todo sistema de medida exacto, pero que por sí sola no asegura la exactitud.

Así, si tenemos un dado aparato, de buena calidad, uno de cuyos componentes, por ejemplo la resistencia de un divisor de tensión, se ha alterado, el instrumento indicará lo mismo toda vez que se le aplique la misma excitación, pero la indicación será más o menos errónea. Un tal aparato conserva su precisión, pero ha perdido su exactitud. Análogamente, un aparato de las mismas características que el anterior, pero al que se le ha alterado el sistema de medición de tal manera que sucesivas aplicaciones de la señal a medir ocasionan diferentes indicaciones, habrá perdido tanto su exactitud como su precisión. Nótese que en este último caso la falta de precisión conlleva a la de exactitud, ya que su falta de repetibilidad le impide dar una indicación correcta.

Ejemplo 1.1

Se pretende medir el peso de un determinado objeto en una balanza de resortes. La indicación que se obtiene es

$$P_m = 35,67 \text{ kg}$$

El fabricante de la misma indica que su error máximo, que puede suponerse aproximadamente constante en toda la escala, es de $\pm 0,5 \%$ de su fondo de escala, que es de 50 kg. Calcular los errores absoluto y relativo de la medición efectuada, y expresar correctamente el resultado de la medición.

Solución

Los datos del problema nos permiten calcular en forma inmediata el error absoluto de la medida:

$$E_p = \pm \frac{0,5}{100} \cdot 50 = \pm 0,25 \approx \pm 0,3 \text{ kg}$$

en la que se puede apreciar cómo se ha redondeado el resultado de manera de expresarlo con una sola cifra significativa. Estamos ya en condiciones de llevar el resultado a la forma indicada en la ecuación 1.11:

$$P = (35,7 \pm 0,3) \text{ kg}$$

que nos dice que el peso verdadero estará comprendido entre 35,4 y 36,0 kg.

Ejemplo 1.2

En un programa radial se escuchó decir que el perímetro de un determinado autódromo es de 3567,123 m (l_m). A la luz de las definiciones básicas de errores que se han visto, estime con qué error se ha medido, admitiendo que las cifras con las que se expresó el resultado respondan a las reglas básicas más arriba expuestas, y formule la crítica de la manera de dar el resultado que se

ha utilizado.

Solución

Admitiendo que el resultado de la medición se ha expresado con cifras hasta la del orden del error, cabe pensar que éste será aproximadamente ± 1 mm. Si calculamos ahora el error relativo, resultará:

$$e_{lm} = \pm \frac{0,001}{3567,123} * 100 = \pm 2,8 * 10^{-5} \%$$

Como veremos más adelante, una medición con un error relativo del orden del que ha resultado, aproximadamente 0,2 partes por millón, es prácticamente imposible de efectuar con métodos comunes, y es patrimonio exclusivo de los métodos de muy alta exactitud, que escapan de los objetivos del curso. Por otra parte, cabe pensar si realmente la cantidad a medir en este caso está definida hasta el milímetro, cosa seguramente imposible, como el lector advertirá apenas piense en detalles tales como dónde se definió el perímetro, cómo se midió, etc. . El resultado correcto de la medida, pensando en un error bajo, como puede ser el 0,5 %, sería

$$l_m = 3,57 \text{ km}$$

Es interesante destacar el muy diferente significado técnico de las dos maneras de expresar la longitud, sin olvidar que la primera de ellas carece de sentido. Con el fin de respetar la regla que se refiere al número de cifras significativas, fue necesario cambiar las unidades en las que se midió la longitud, de metros a kilómetros.

Nota: Existen aparatos en los que la lectura del valor medido puede hacerse con un número de cifras superior al que correspondería si se tienen en cuenta sus errores de indicación y las reglas de escritura más arriba comentadas. En próximos capítulos analizaremos las situaciones en las que se puede hacer uso de esas cifras excedentes. Lo que debe quedar claro a esta altura de nuestra discusión es que cuando se da el resultado de una única medida, la regla que debe seguirse es la enunciada en el punto 1.3.

1.7. Clasificación de los errores

Si analizamos lo discutido hasta ahora, reconoceremos que sólo se definieron los errores, sin entrar en detalles respecto de sus causas y su comportamiento. Un análisis no muy profundo nos permitirá concluir que no todos los errores que están presentes en una dada medida reconocen orígenes ni comportamiento similares. Así, una primera causa de error la podemos encontrar en la falta de entrenamiento del operador, que no sabe aprovechar al máximo las características metrologías de una dada instalación de medida, pero aún el más avisado de los operadores será incapaz de medir sin errores, debido a que subsisten los debidos al instrumental que utiliza, y que reconocen su causa no sólo en el comportamiento propio del mismo sino eventualmente en el efecto que produce en el circuito el hecho de conectar el aparato o sistema de medida.

Una primera gran división de los errores de medida es la que los agrupa en *sistemáticos, a veces llamados constantes, y fortuitos*.

Son **sistemáticos** aquellos errores que, en igualdad de condiciones de medida, se repiten con valor y signo. Son por lo tanto desafectables del resultado, lo que no debe hacer creer que por esa condición no sean de importancia. Un caso típico de error sistemático es el que se produce al co-

nectar un instrumento a un circuito de medida: por el solo hecho de la conexión el circuito es alterado, y la indicación del instrumento corresponderá a un valor que no necesariamente coincidirá con el que existía antes de intercalar el aparato de medida. Otro caso típico son los desajustes de una parte de un instrumento que afectan de modo similar a las distintas lecturas, como el que se citó en el punto 1.6

Una vez que se han eliminado todos los errores de naturaleza sistemática, y los que puedan atribuirse a incorrecto manejo de los sistemas de medida, queda aún un error, cuyo comportamiento sigue en general las leyes del azar, que llamaremos **error residual o fortuito**. Este tipo de errores es el responsable de que aún cuando hayan sido removidas todas las otras causas de error, la medición de una misma cantidad hecha repetidas veces, presente diferencias más o menos notables.

A veces suele reservarse el nombre de **groseros** o **gruesos**, para los errores resultantes del incorrecto empleo de instrumentos, o provocados por distracciones o equivocaciones, como por ejemplo el mal uso de una expresión matemática o fórmula. En todo lo que sigue en este curso, se supondrá que los errores gruesos no están presentes, ya que con cuidado y conocimientos son eliminables.

Distintos tratados sobre el tema (Ref. [1], [2]) presentan distintas clasificaciones de los errores, pues no existe concordancia universal sobre su división salvo en los dos grandes grupos que acabamos de mencionar. Lo realmente importante para el operador cuidadoso es tener presente que en cualquier medición, por más que extreme los cuidados, siempre estarán presentes los errores, y nada podrá reemplazar a su experiencia para detectarlos y eliminar sus posibles causas.

1.8. Propagación de errores

En todo lo que precede hemos supuesto que se efectuaba una medida directa de una dada cantidad. En el Capítulo 2 se tratará en detalle la clasificación de las medidas, por lo que por ahora nos bastará con decir que una medida directa es una en la que el valor de la incógnita surge de la simple lectura de un instrumento. Sin embargo, no todas las medidas son tan simples como la que acabamos de citar, y en muchas de ellas el resultado se obtiene de comparaciones o de cálculos efectuados con varias cantidades medidas directamente. Este segundo tipo de medidas es el de las indirectas, como habrá supuesto el lector, y lo que nos proponemos ahora es analizar cómo se puede calcular el error que las afectará.

Supongamos el siguiente caso: para determinar el valor de una resistencia decidimos aplicar la ley de Ohm, haciendo la medida de la tensión que aparece en sus bornes cuando circula una cierta corriente I , y calcular R como el cociente:

$$R = \frac{U}{I} \quad (1.12)$$

Si todo lo que queremos es tener una idea del valor de R el trabajo probablemente termine ahí. En la generalidad de los casos, sin embargo, nos interesará determinar de qué manera el error que afecta a las medidas de U y de I se propaga en el que afectará a R . Un primer método, elemental, sería, si buscamos errores límites, encontrar los valores extremos de R , combinando el máximo posible de U con el mínimo de I y viceversa, con lo que tendríamos:

$$R_{\max} = \frac{U + E_U}{I - E_I}; R_{\min} = \frac{U - E_U}{I + E_I} \quad (1.13)$$

El método anterior, si bien absolutamente válido, tiene el inconveniente de ser laborioso y complicarse en situaciones algo más elaboradas.

Podemos decir que en general el resultado final se obtendrá a partir de una serie de medidas individuales y de una relación funcional que las vincula:

$$X = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (1.14)$$

donde las x_i son las n magnitudes medidas directamente, que supondremos independientes. Si desarrollamos la (1.14) en serie de Taylor y consideramos que los errores son lo suficientemente pequeños como para despreciar los términos de orden superior obtendremos:

$$dX = \frac{\partial X}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial X}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial X}{\partial x_n} dx_n \quad (1.15)$$

En la anterior podemos tomar en vez de diferenciales incrementos finitos, con la condición de que éstos sean lo suficientemente pequeños:

$$dx_i \approx \Delta x_i \approx E_{x_i} \quad (1.16)$$

En la que se ha considerado, al escribir los dos últimos miembros, el caso muy general en que los errores son tan pequeños que pueden asimilarse a diferenciales, lo que hará que los resultados que obtengamos de ahora en más sean aplicables sólo cuando tal supuesto sea válido. En la gran mayoría de los casos así sucede, por lo que la suposición anterior, si bien quita generalidad al razonamiento que sigue, no constituye un impedimento decisivo. No obstante, debe tenerse en cuenta que cuando los errores son grandes (mayores que ...7...10...%), los resultados que se obtendrán aplicando las ecuaciones que pasaremos a analizar diferirán de los reales, tanto más cuanto mayores sean dichos errores. Con las salvedades de más arriba, la (1.15) puede escribirse:

$$E_X = \frac{\partial f}{\partial x_1} E_{x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} E_{x_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} E_{x_n} \quad (1.17)$$

La que nos define la ley de propagación de errores límites, en el caso en que éstos sean pequeños y por lo tanto asimilables a diferenciales. El error relativo se obtendrá en forma inmediata a partir de su definición:

$$e_X = \frac{E_X}{X} \quad (1.18)$$

Como estamos calculando errores límites, los signos se tomarán siempre en su combinación más desfavorable, esto es, pondremos todas las derivadas **con el mismo signo**, y al conjunto lo precederemos del \pm :

$$E_X = \pm \left[\left| \frac{\partial f}{\partial X_1} \right| E_{X_1} + \left| \frac{\partial f}{\partial X_2} \right| E_{X_2} + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial X_n} \right| E_{X_n} \right] \quad (1.19)$$

en tanto que el error relativo se expresará como:

$$e_X = \pm \frac{E_X}{X} \quad (1.20)$$

Ejemplo 1.3

Determinar de qué manera influyen los errores de U e I en el valor de una resistencia calculada a partir de la expresión (1.12).

Solución

La (1.12) establece:

$$R = \frac{U}{I}$$

Aplicando el método indicado en las (1.19) y (1.20), con la notación correspondiente al caso particular, obtenemos:

$$E_R = \pm \left[\left| \frac{\partial R}{\partial U} \right| E_U + \left| \frac{\partial R}{\partial I} \right| E_I \right] \quad (1.21)$$

en la que si se opera convenientemente se llega a:

$$e_R = \pm (e_U + e_I) \quad (1.22)$$

que nos dice que el error relativo que afecta a R es directamente la suma de los errores relativos de U e I. No debe perderse de vista que el método que se ha aplicado vale si y solo si los errores individuales son lo suficientemente pequeños como para que las condiciones de validez de la (1.17) se cumplan.

El caso que más arriba se ha resuelto puede generalizarse sin inconvenientes, aplicando lo establecido por la (1.17) a distintas funciones f . Se puede demostrar así, que las siguientes reglas son de validez general:

El error *relativo* de un producto o un cociente es igual a la suma de los errores relativos de los factores (o términos)

El error *absoluto* de una suma o diferencia es igual a la suma de los errores absolutos de los términos.

El error *relativo* de una potencia es igual al producto del exponente de la misma por el error relativo de la base. Este concepto se aplica igualmente a los exponentes fraccionarios.

1.9. Casos especiales de propagación

Con las salvedades que en cada caso se han marcado, las ecuaciones que se han hallado permiten hacer frente al cálculo de todos los casos de propagación de errores. Sin embargo, existen situaciones particulares que merecen una atención específica, pues representan casos de medición en los que el cuidado con los errores debe llevarse al extremo con el fin de evitar que al propagarse hagan que el resultado no resulte de fiar. Entre las múltiples situaciones que pueden darse hay dos que merecen particular atención: el caso de la diferencia, y la propagación con componentes comunes.

1.9.1. Error de una diferencia

Cuando la relación f toma la forma

$$X = X_1 - X_2 \quad (1.23)$$

La aplicación de las (1.19) y (1.20) nos conducirá a:

$$E_X = \pm(E_{X_1} + E_{X_2}) \quad (1.24)$$

En tanto que el error relativo valdrá:

$$e_X = \pm \frac{E_{X_1} + E_{X_2}}{X_1 - X_2} \quad (1.25)$$

La (1.25) merece especial atención en el caso en que la diferencia sea muy pequeña, pues el denominador se achicará y el error relativo crecerá correspondientemente. En el límite se cumplirá

$$\lim_{X_1 \rightarrow X_2} e_X \rightarrow \infty \quad (1.26)$$

La conclusión inmediata de lo expresado por la (1.26) es que, en general, *las medidas por diferencia deben ser examinadas con atención, y evitadas en el caso en que la diferencia sea muy pequeña*. Tan importante es esto, que ha dado origen a muchos métodos de medida, llamados *diferenciales*, en los que justamente, para evitar el problema que más arriba se ha mencionado, se *mide la diferencia, en vez de calcularla*.

1.9.2. Errores con componentes comunes. Repetibilidad de corto término.

En todo nuestro estudio anterior hemos supuesto que las variables medidas eran independientes, y nos situamos siempre en el caso más desfavorable, esto es, vimos el problema desde una óptica pesimista: que todos los errores se combinen de la peor manera posible. Si bien esto es aceptable cuando se calculan errores límites, en ciertos casos se puede pecar por excesivo pesimismo. Supongamos tener un elemento, conocido con un cierto error límite e_x . Este último se interpreta como que, en condiciones normales, el valor verdadero de X , desconocido en general, será tal que no salga del intervalo $X \pm E_x$. Cuando se garantiza un determinado error, o tolerancia de un componente, se admite que la calidad del mismo permite asegurar que el error que lo afectará, que puede variar de vez en vez, estará siempre contenido en e_x . Si se hacen dos medidas, una a continuación de la otra, en las mismas condiciones, podremos admitir que e_x , si bien desconocido, no variará de una a otra oportunidad, a condición de que las medidas se hagan **con un muy breve intervalo entre ambas**. Es lógico, entonces, que ese error, si bien desconocido, no lo consideremos en todo su valor en la propagación. El hecho de mantener constante el error en tiempos breves, asegurando una constancia de valores superior a la de largo plazo, se conoce como **repetibilidad de corto término**, y se emplea cuando es necesario achicar, en la medida de lo posible, los errores. A lo largo de todo el curso veremos varios ejemplos, pero ahora, para fijar ideas, analizaremos un caso típico:

Supongamos una caja de resistencias, del tipo de décadas, llamadas así por poseer una serie de

ellas, dispuestas en grupos de 10, que pueden conectarse con un selector adecuado, de manera de obtener un valor en bornes que es la suma de los ajustados en cada uno de ellos. Generalmente se las identifica por la cantidad de décadas, por el valor de cada una de ellas y por su tolerancia. Así, un caso típico puede ser una caja formada por 10 décadas de 1Ω , 10 de 10Ω y 10 de 100Ω , con tolerancia $\pm 0,1\%$ (la supondremos igual para todas, aunque no es el caso general) Un posible ajuste puede ser:

$$(3*100 + 5*10 + 8*1)\Omega = 358 = 358\Omega$$

Una simple aplicación de las fórmulas (1.19) y (1.20) nos indicará que el valor de la resistencia ajustado se conoce con un error de $\pm 0,1\%$.

Si se ajustara luego (inmediatamente) un valor 356Ω y se calculara el error de la diferencia mediante la expresión (1.25) resultaría $e_x = \pm 35\%$. Este valor sumamente alto, que resulta de la directa aplicación de la fórmula para el cálculo del error de una diferencia, peca de exageradamente pesimista, pues resulta de considerar que todos los errores límites se han sumado. Este punto de vista conservador puede aceptarse en los casos en que se busca tener la seguridad de que el límite de error calculado no se superará, pero cuando sucede, como en el caso que nos ocupa, que el error, si bien desconocido para nosotros, no ha tenido oportunidad de modificarse, (pues se efectuaron las medidas *inmediatamente una después de la otra*) desaparece la justificación para considerar que todos ellos se sumen. En el ejemplo que venimos manejando, al ser hechas las medidas **una a continuación de la otra**, aquellas resistencias que han estado en ambas etapas del ajuste no han variado sus errores, y por lo tanto no han contribuido al error total ya que al restarse dichos errores se han cancelado. Si se tiene en cuenta este razonamiento, se llegará a que el error total en la medida es de sólo el $0,1\%$!. Es claro que el caso analizado es uno en que puede lograrse un error tan bajo, y que en general puede no ser así, no obstante, los elementos comunes a ambas etapas de una medida, cuyos valores deban restarse, no contribuirán al error total.

Operando a partir de las expresiones básicas de cálculo de errores puede llegarse a encontrar el error que afecta a una diferencia con componentes comunes. Para ello escribimos a minuendo y sustrayendo de la siguiente manera:

$$X_1 = C + x_1 ; X_2 = C + x_2 \quad (1.27)$$

en donde C representa la parte común y x_1 y x_2 las partes no comunes, respectivamente. Procediendo en la forma habitual, con la sola consideración que el error de C permanece constante en ambas etapas de la medición, se llega a la expresión equivalente a la (1.24) para el caso en que existan componentes comunes en la diferencia:

$$e_x = \pm \frac{E_{x_1} + E_{x_2}}{X_1 - X_2} \quad (1.28)$$

en la que no debe confundirse X_i con x_i . La representación simbólica anterior es equivalente a decir que el error de una diferencia con partes comunes vale:

$$e_x = \pm \frac{\sum \text{errores absolutos de las partes no comunes}}{X_1 - X_2}$$

La anterior resulta particularmente útil pues fija un criterio a partir del cual debe programarse el

ajuste de los diferentes elementos que intervienen en el cálculo de una diferencia. Es bueno remarcar que, si bien el de la diferencia puede considerarse el caso típico, los razonamientos anteriores pueden extenderse a otras relaciones funcionales entre las variables.

1.10. Tratamiento estadístico de los errores

En su oportunidad dividimos a los errores en *sistemáticos* y *fortuitos o residuales*, englobando en esta última categoría a los que subsistían luego de haberse eliminado las causas que daban cuenta de los sistemáticos. Estos errores (fortuitos), tienen un comportamiento aleatorio, del que se puede dar cuenta mediante el análisis estadístico.

Si una vez que se han eliminado todos los errores groseros y sistemáticos, y admitiendo que todas las magnitudes de influencia, que son aquéllas que modifican la medida sin ser el objeto de ésta, están controladas, se decide repetir la medición, se observará que los valores obtenidos exhiben pequeñas discrepancias entre sí, atribuibles exclusivamente al comportamiento aleatorio de la cantidad medida.

Se ha supuesto en el aserto anterior que el instrumento de medición es capaz de reaccionar perfectamente a los cambios de la medida, o lo que es lo mismo, que su *precisión* es mucho mayor que la de lo que se está midiendo.

Se tendrá entonces un conjunto de n valores de la cantidad medida, x_1, x_2, \dots, x_n , en el que cada uno de los x_i recibirá el nombre de *variante*. Muchas veces bastará con dar la colección de los valores medidos para dar por concluido el trabajo, pero la mayoría de las veces no será así, pues se requerirá una elaboración aunque sea primaria de los mismos. Es en esta parte donde entra en consideración el análisis estadístico de los errores, empleando las herramientas que se han desarrollado en los cursos correspondientes, y que aquí sólo citaremos como un caso especial de lo ya conocido por el lector.

Toda la información está contenida en las n variantes, y cuando se las pretende reemplazar por uno o más números extraídos a partir de ellas, inevitablemente se corre el riesgo de que parte de ella se pierda. En general se suele caracterizar a un conjunto de mediciones mediante dos parámetros, calculados a partir de los datos individuales:

* el primero, que da una indicación central de la medida, es la *media aritmética*, definida a partir de la expresión:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1.29)$$

* el segundo, que da idea de la dispersión, y que tiene en cuenta la *precisión* de la medida. Usualmente se emplea para este caso la *desviación normal* o *desviación estándar*, definida a partir de:

$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n-1}} \quad (1.30)$$

si el número de variantes es pequeño (menor que 15...20...), o por medio de

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n}} \quad (1.31)$$

en el caso en que las variantes sean más.

Como se aprecia en las anteriores, los errores con mayores apartamientos de la media tienen un peso comparativamente mayor que los menores, debido a la naturaleza cuadrática de las expresiones. En la gran mayoría de los casos que se presentan en las mediciones eléctricas y electrónicas, las variantes están distribuidas siguiendo la ley normal o de Gauss (Ref. [4] y [5]). En tal caso la desviación normal cobra un significado interesante desde el punto de vista probabilístico, pues existirá un 68 % de probabilidad de encontrar variantes en el intervalo de amplitud $\pm \sigma_n$ centrado en \bar{X} . Como es natural, a medida que la amplitud del intervalo se agranda, también crecerá la probabilidad de hallar variantes en él. Así, si la amplitud se toma en $\pm 3\sigma_n$ aquella trepará al 99,7 %. Usualmente, en los casos de análisis estadístico de los errores, el dar la media y la desviación normal (supuesto que se conoce la ley de distribución), permite formarse un juicio acabado sobre el universo que se desea representar. En cuanto a la presentación de los resultados, lo usual es hacerlo de la siguiente manera:

$$X = \bar{X} \pm a\sigma \quad (1.32)$$

en la que a es un número real positivo, que usualmente se circunscribe al intervalo $0 \leq a \leq 3 \dots$, en tanto que σ representa a σ_n en el caso general.

Es interesante notar el diferente significado de las (1.11) y (1.32). Si bien formalmente similares, cuando se trata de *errores límites*, el término de error absoluto, empleado en la (1.11), tiene el significado de una cota que no se puede sobrepasar en condiciones normales de operación, y por lo tanto se emplea para definir un intervalo, centrado en X_m , en el que se tiene la (casi) *certeza* de que se encontrará el valor verdadero. En cambio, cuando se recurre a una presentación resultante de un análisis estadístico, el término que hará las veces del error absoluto será $a\sigma$, con todo su significado relacionado con la probabilidad de hallar variantes en un determinado intervalo, y que el lector conoce de sus estudios previos de Estadística.

En el análisis anterior, muy sucinto, se ha hecho hincapié en casos donde el número de variantes es relativamente importante, con lo cual toman pleno significado las definiciones de los intervalos dentro de los cuales existe una cierta probabilidad de encontrar variantes, definidos a partir de las leyes de Gauss. Si, en cambio, el número de variantes es reducido, digamos, menor que 10, si bien se deberá usar para la desviación normal el valor σ_{n-1} , ya no puede decirse que en el intervalo de amplitud $\pm a\sigma_{n-1}$ exista una probabilidad de hallar variantes que esté dada por la distribución normal, sino que será necesario recurrir a otras distribuciones, por ejemplo la de Student. Se supone que el conocimiento de estos tópicos debe ser previo al inicio de un curso de Medidas Eléctricas, por lo que aquí sólo se darán aplicaciones de casos sencillos, remitiéndose al lector que no haya completado un curso de Estadística a la abundante bibliografía disponible sobre el tema (Ref.[4], [5])

Ejemplo 1.4

Se efectúa una serie de mediciones de una dada tensión, utilizando un instrumento cuya precisión excede en mucho a la de los resultados obtenidos. Este instrumento está libre de errores sistemáticos. El conjunto de valores medidos, todos ellos en condiciones idénticas, es el siguiente:

$U_1 = 12,34 \text{ V}$	$U_5 = 12,55 \text{ V}$	$U_9 = 12,35 \text{ V}$	$U_{13} = 12,00 \text{ V}$
$U_2 = 12,22 \text{ V}$	$U_6 = 12,44 \text{ V}$	$U_{10} = 12,02 \text{ V}$	$U_{14} = 12,55 \text{ V}$
$U_3 = 12,45 \text{ V}$	$U_7 = 12,28 \text{ V}$	$U_{11} = 12,63 \text{ V}$	$U_{15} = 12,60 \text{ V}$
$U_4 = 12,09 \text{ V}$	$U_8 = 12,37 \text{ V}$	$U_{12} = 12,10 \text{ V}$	$U_{16} = 12,47 \text{ V}$

Se desea determinar el valor medio de la tensión, y establecer la amplitud de un intervalo centrado en dicho valor, dentro del cual exista un 50 % de probabilidad de que se halle un nuevo valor de la tensión.

Solución

A partir de los valores medidos es inmediato el cálculo de la media, utilizando la expresión (1.29):

$$\bar{U} = \sum_{i=1}^{16} U_i = 12,341 \text{ V}$$

en la anterior se ha seguido la regla bastante aceptada de expresar el valor de la media con una cifra significativa más que las variantes individuales, en razón de ser considerada “el mejor valor” de las cantidades medidas.

Si ahora se desea calcular la desviación estándar, bastará con aplicar la ecuación (1.30) o (1.31) según corresponda. En nuestro caso particular, con un número de variantes que se sitúa en la frontera de la aplicabilidad de una o de la otra, obtenemos los siguientes resultados

$$\sigma_{n-1} = 0,206 \text{ V} ; \quad \sigma_n = 0,199 \text{ V}$$

Se ve que ambas expresiones sólo difieren entre sí en alrededor de un 3 %. Nos quedaremos con σ_{n-1}

en virtud del reducido número de variantes de que disponemos.

Para responder a la segunda parte de la pregunta, supondremos que la población está distribuida en forma gaussiana, para lo cual recurriendo a una tabla de Gauss, por ejemplo la que se presenta en la Guía del trabajo práctico N° 1, pág. 17, encontramos que para un área bajo la curva de 0,5, centrada en el valor medio, es necesario definir un intervalo a su alrededor de amplitud aproximada $0,67 \sigma_{n-1}$. Efectuando los cálculos correspondientes, se expresará el resultado de la siguiente forma

$$U_{50} = (12,341 \pm 0,138) \text{ V} \quad (1.33)$$

Obsérvese la forma en que se ha expresado el resultado, utilizando más cifras significativas que las que corresponderían de la aplicación de la regla de acotación de cifras expuesta en el punto 1.3. La razón debe buscarse en los distintos conceptos involucrados: en un caso error límite, en el

otro, estudio relacionado con la precisión de las medidas. De cualquier forma, es bueno notar que la expresión de σ con más de tres cifras significativas es carente de sentido en casi todas las aplicaciones.

1.11. Referencias

- [1] Stout, Melville B.: “Basic Electrical Measurements”, Pergamon Press, 1960.
- [2] Frank, Ernest: “Análisis de Medidas Eléctricas”, Mc Graw Hill, 1969.
- [3] Cooper, William D. y Helfrick, Albert D.: “Instrumentación Electrónica Moderna y Técnicas de Medición”, Prentice Hall, 1990.
- [4] Jones, Larry D., Foster Chin, A.: “Electronic Instruments and Measurements”, Prentice-Hall International Editions, 1991.
- [5] Spiegel, Murray R.: “Estadística” , Mc Graw Hill, 1988.