MEDIDAS ELÉCTRICAS

Introducción a la

Incertidumbre en las Mediciones

según la Guía del Comité

Internacional de Pesas y Medidas

Ing. Ricardo Dias

Año 2020

Incertidumbre en las Mediciones

La expresión del resultado de una medición está completa sólo cuando contiene tanto el valor medido como la incertidumbre de medida asociada al mismo.

Cabe aquí señalar una sustancial diferencia entre los conceptos de error e incertidumbre. El error se define como la diferencia entre un resultado individual (valor medido) y el valor verdadero de la magnitud en cuestión. Como tal, el error es un único valor. En principio, el valor de un error conocido se puede aplicar como corrección del resultado. Sin embargo, el concepto de error es, en general, un concepto idealizado ya que, ni el valor medido ni el verdadero se pueden conocer con absoluta exactitud. La incertidumbre, en cambio, toma la forma de una gama de valores, y no puede utilizarse generalmente para corregir el resultado de una medida.

La necesidad de un procedimiento aceptado mundialmente para la expresión de la incertidumbre en las mediciones llevó, en 1981, a la autoridad internacional en metrología, el Comité Internacional de Pesas y Medidas (CIPM o BIPM), a aprobar una breve recomendación sobre el tema y someterla a la revisión de un grupo de trabajo, formado por representantes de los laboratorios y organizaciones internacionales más importantes en materia de metrología. A raíz de ello, en el año 1993, apareció la "Guía para la Expresión de la Incertidumbre en las Mediciones" (Ref. 8.1), avalada por los siguientes organismos: BIPM, IEC, IFFC, ISO, IUPAC, IUPAP y OIML. Así, a partir y en concordancia con la Guía mencionada, han surgido, de diferentes organismos nacionales e internacionales, documentos que pretenden homogeneizar universalmente el tratamiento del tema. Sirvan como ejemplo los citados en las Refs. 8.2 a 8.7.

Por lo dicho antes, el tratamiento que aquí se propone y los conceptos que se verterán, se basan en los textos citados, transcribiendo de la Ref. 8.4 buena parte de lo que se presenta en los puntos 1 a 6, a modo de que el texto sea autocontenido. La publicación se completa desarrollando un problema típico concreto de medición de resistencia con el método del voltímetro y el amperímetro, detallando su resolución de acuerdo a los preceptos de la normativa nacional e internacional sobre la expresión de la incertidumbre en las mediciones, hasta arribar a la determinación de la correspondiente incertidumbre expandida.

1. Planteo del Problema

Como se dijo más arriba, la expresión correcta del resultado de una medición debe contener el valor atribuido a la magnitud en cuestión y la incertidumbre de medida correspondiente.

Es bueno señalar desde el inicio que, en el presente texto, todas las magnitudes que no se conocen exactamente serán tratadas como variables aleatorias, incluso las magnitudes de influencia que pueden afectar al valor medido.

La incertidumbre de medida es un parámetro, asociado al resultado de una medición, que caracteriza la dispersión de los valores que pueden atribuirse razonablemente a la magnitud determinada. La incertidumbre del resultado de una medición refleja la falta de un conocimiento completo del valor de tal magnitud. Un conocimiento acabado exigiría una cantidad infinita de información. Los fenómenos que contribuyen a la incertidumbre y, por tanto, al hecho de que el resultado de una medición no pueda ser caracterizado con un único valor, se denominan fuentes de incertidumbre. En la práctica, pueden existir muchas fuentes de incertidumbre en una medición, a saber: definición incompleta de la magnitud medida, realización imperfecta de la definición de la misma, muestreo no representativo, efectos no adecuadamente conocidos de las condiciones ambientales o mediciones imperfectas de las mismas, desviaciones personales en la lectura de instrumentos analógicos, límites en la discriminación o resolución del instrumento, valores inexactos de los patrones y materiales de referencia utilizados en la medición, valores inexactos de constantes y otros parámetros obtenidos de fuentes externas y utilizados en el algoritmo para la obtención de datos, aproximaciones e hipótesis incorporadas en el método y el procedimiento de medición, variaciones en observaciones repetidas realizadas en condiciones aparentemente idénticas. Por otra parte, no debe perderse de vista que estas fuentes no son necesariamente independientes.

En general, una magnitud de salida Y, depende de una serie de magnitudes de entrada X_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$:

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N) \qquad (1)$$

La función modelo f representa el procedimiento de medición y el método de evaluación. Describe cómo se obtienen los valores de la magnitud de salida Y a partir de los valores de las magnitudes de entrada X_i. En la mayoría de los casos, la función modelo corresponde a una sola expresión analítica, pero en otros casos se necesitan varias expresiones de este tipo que incluyan correcciones y factores de corrección de los efectos sistemáticos, en cuyo caso existe una relación más complicada que no se expresa explícitamente como una función. Es más, f puede determinarse experimentalmente, existir sólo como un algoritmo de cálculo que deba ser numéricamente evaluado, o ser una combinación de todo ello.

El conjunto de magnitudes de entrada X_i puede agruparse en dos categorías, según la forma en que se haya calculado el valor de la magnitud y la incertidumbre asociada al mismo:

- magnitudes cuyo valor estimado e incertidumbre asociada se determinan directamente en la medición. Estos valores pueden obtenerse, por ejemplo, a partir de una única observación, observaciones reiteradas o juicios basados en la experiencia. Pueden exigir la determinación de correcciones de las lecturas del instrumento y de las magnitudes de influencia, como la temperatura ambiental, la presión barométrica o la humedad relativa;

- magnitudes cuyo valor estimado e incertidumbre asociada se incorporan a la medición desde fuentes externas, tales como magnitudes asociadas a patrones de medida calibrados, materiales de referencia certificados o datos de referencia obtenidos de manuales.

Una estimación de la magnitud de salida Y, la estimación de salida expresada por y, se obtiene de la ecuación (1) utilizando las estimaciones de entrada x_i como valores de las magnitudes de entrada X_i:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N) \qquad (2)$$

Se supone que los valores de entrada son estimaciones óptimas en las que se han corregido todos los efectos significativos para el modelo. De lo contrario, se habrán introducido las correcciones necesarias como magnitudes de entrada diferentes.

En el caso de las variables aleatorias, la varianza de su distribución o la raíz cuadrada positiva de la varianza, llamada desviación típica, se utiliza como medida de la dispersión de los valores. La incertidumbre típica de medida asociada a la estimación de salida o al resultado de la medición *y*, expresada por *u(y)*, es la desviación típica de la magnitud de salida *Y*.

Se determina a partir de los valores estimados x_i de las magnitudes de entrada X_i y sus incertidumbres típicas asociadas $u(x_i)$. La incertidumbre típica asociada a un estimado tiene la misma dimensión que éste. En algunos casos, puede utilizarse la incertidumbre típica relativa de medida, que es la incertidumbre típica de medida asociada a un estimado dividida por el módulo de dicho estimado y, por consiguiente, es adimensional. Este concepto no es aplicable cuando el estimado es igual a cero.

2. Evaluación de la incertidumbre de medida de las estimaciones de entrada

La incertidumbre de medida asociada a las estimaciones de entrada se evalúa utilizando uno de los siguientes métodos, a saber:

Tipo A: la incertidumbre se determina mediante el análisis estadístico de una serie de observaciones. En este caso, la incertidumbre típica es la desviación típica experimental de la medida, que se deriva de un procedimiento promediado o de un análisis de regresión.

Tipo B: la incertidumbre típica se evalúa mediante un procedimiento distinto al análisis estadístico de una serie de observaciones. En este caso, la estimación de la incertidumbre típica se basa en otros conocimientos científicos.

2.1. Evaluación Tipo A de la incertidumbre típica

La evaluación Tipo A de la incertidumbre típica se utiliza cuando se han realizado *n* observaciones independientes de una de las magnitudes de entrada X_i bajo las mismas condiciones de medida. Si este proceso de medida tiene suficiente resolución, se podrá observar una dispersión o fluctuación de los valores obtenidos.

Si suponemos que la magnitud de entrada X_i , medida repetidas veces, es la magnitud *Q*. Con *n* (*n >1*) observaciones estadísticamente independientes, el valor estimado de la magnitud *Q* es $\overline{q}\,\bar{q}$, la media aritmética o el promedio de todos los valores observados $q_j \ (j \ = 1, 2, \dots, n)$:

$$\bar{q} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} q_j \tag{3}$$

La incertidumbre de medida asociada al estimado *q*, se evalúa de acuerdo con uno de los métodos siguientes:

(a) El valor estimado de la varianza de la distribución de probabilidad es la varianza experimental $s^2(q)$ de los valores q_j, que viene dada por:

$$s^2(q) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(q_j - \overline{q})^2 \tag{4}$$

Su raíz cuadrada (positiva) se denomina desviación típica experimental.

Por otra parte, la mejor estimación de la varianza de la media aritmética $\overline{q}$ es la varianza experimental de la media aritmética, que viene dada por:

$$s^2(\overline{q}) = \frac{s^2(q)}{n} \tag{5}$$

Su raíz cuadrada positiva se denomina desviación típica experimental de la media aritmética. La incertidumbre típica $u(\overline{q})$ asociada a la estimación de entrada $\overline{q}$ es la desviación típica experimental de la media:

$$u(\overline{q}) = s(\overline{q}) = \frac{s(q)}{\sqrt{n}} \tag{6}$$

Nota: Generalmente, cuando el número n de mediciones repetidas es pequeño (n <10), la evaluación Tipo A de la incertidumbre típica, expresada por la ecuación (6) puede no ser fiable. Si resulta imposible aumentar el número de observaciones, tendrán que considerarse otros métodos.

(b) Cuando una medición está correctamente caracterizada y bajo control estadístico, es posible que se disponga de una estimación combinada de la varianza s_p^2 que caracterice mejor la dispersión que la desviación típica estimada a partir de un número limitado de observaciones. Si, en ese caso, el valor de la magnitud de entrada Q se calcula como la media aritmética $\overline{q}$ de un pequeño número n de observaciones independientes, la varianza de la media aritmética podrá estimarse como:

$$s^2(\overline{q}) = \frac{s_p^2}{n} \tag{7}$$

La incertidumbre típica se deduce de este valor utilizando la ecuación (6).

Los grados de libertad, ν (Ref. 8.1)

Se define como el número de términos de una suma, menos el número de restricciones sobre los términos de dicha suma.

Los grados de libertad ν_i de la incertidumbre típica $u(x_i)$ son iguales a $(n\text{-}1)$, para el caso más común y simple en el cual $x_i = \overline{X_i}$ y $u(x_i) = s(\overline{X_i})$ se calculan a partir de n observaciones independientes como se explicó en los párrafos anteriores. El número de grados de libertad ν_i debe indicarse siempre que se evalúen componentes de incertidumbre de Tipo A.

2.2. *Evaluación Tipo B de la incertidumbre típica*

La evaluación Tipo B de la incertidumbre típica es la evaluación de la incertidumbre asociada a un estimado x_i de una magnitud de entrada X_i por otros medios distintos al análisis estadístico de una serie de observaciones. La incertidumbre típica $u(x_i)$ se evalúa aplicando un juicio científico basado en toda la información disponible sobre la posible variabilidad de X_i. Los valores que caigan dentro de esta categoría pueden derivarse de:

- datos obtenidos de mediciones anteriores;
- experiencia o conocimientos generales sobre el comportamiento y las propiedades de los materiales e instrumentos relevantes;
- especificaciones de los fabricantes;
- datos obtenidos de calibraciones y de otros certificados;
- incertidumbres asignadas a los datos de referencia obtenidos de manuales.

El uso apropiado de la información disponible para una evaluación Tipo B de la incertidumbre típica de medición exige un juicio basado en la experiencia y en conocimientos generales. Es una destreza que puede adquirirse con la práctica. Una evaluación Tipo B de la incertidumbre típica que tenga una base sólida puede ser tan fiable como una evaluación Tipo A, especialmente cuando ésta se basa sólo en un número comparativamente pequeño de observaciones estadísticamente independientes. Deben distinguirse los siguientes casos:

(a) Cuando sólo se conoce un valor único de la magnitud X_i, por ejemplo, el valor de una única medición, el valor resultante de una medición previa, un valor de referencia obtenido de la literatura o el valor de una corrección, este valor debe utilizarse como x_i. La incertidumbre típica $u(x_i)$ asociada a x_i debe adoptarse siempre que se conozca. En caso contrario, debe calcularse a partir de datos inequívocos sobre la incertidumbre. Si no se dispone de este tipo de datos, la incertidumbre tendrá que estimarse sobre la base de la experiencia.

(b) Cuando se pueda suponer una distribución de probabilidad para la magnitud X_i, ya sea basándose en la teoría o en la experiencia, la expectativa o valor esperado y la raíz cuadrada de la varianza de su distribución deben tomarse como el estimado x_i y la incertidumbre típica asociada $u(x_i)$, respectivamente.

(c) Si sólo pueden estimarse unos límites superior e inferior, a_+ y a_-, para el valor de la magnitud X_i (por ejemplo, especificaciones del fabricante de un instrumento de medición, intervalo de temperaturas, error de redondeo o de truncamiento resultante de la reducción automatizada de los datos), puede suponerse una distribución de probabilidad con una densidad de probabilidad constante entre dichos límites (distribución de probabilidad rectangular) para la variabilidad de magnitud de entrada X_i. Según el anterior caso (b), se obtiene:

$$x_i = \frac{1}{2}(a_+ + a_-) \tag{8}$$

para el valor estimado, y:

$$u^2(x_i) = \frac{1}{12}(a_+ - a_-)^2 \tag{9}$$

para el cuadrado de la incertidumbre típica. Si la diferencia entre los valores límites se expresa como $2a$, la ecuación anterior se convierte en:

$$u^2(x_i) = \frac{1}{3}\ a^2 \tag{10}$$

La distribución rectangular es una descripción razonable en términos de probabilidad del conocimiento que se tenga sobre la magnitud de entrada X_i cuando no existe ninguna otra información más que sus límites de variabilidad. Pero si se sabe que los valores de la magnitud en cuestión próximos al centro del intervalo de variabilidad son más probables que los valores próximos a los extremos, un modelo más adecuado sería una distribución triangular o normal. Por otro lado, cuando los valores cercanos a los extremos son más probables que los valores cercanos al centro, es más apropiada una distribución con forma de U.

Con referencia al número de grados de libertad ν en la evaluación Tipo B de la incertidumbre típica, es conveniente señalar que, cuando la información utilizada proviene de especificaciones de los fabricantes con distribución rectangular, se lo puede considerar infinito (∞). (Ref. 8.1).

3. Cálculo de la incertidumbre típica de la estimación de salida

Cuando las magnitudes de entrada no están correlacionadas, el cuadrado de la incertidumbre típica asociada a la estimación de salida *y*, viene dado por:

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u_i^2\,(y) \qquad (11)$$

Nota: Existen casos poco frecuentes en los que la función modelo es claramente no lineal o algunos de los coeficientes de sensibilidad -véanse las ecuaciones (12) y (13)- se anulan y tienen que incluirse términos de orden superior en la ecuación (11). Para el tratamiento de estos casos especiales se recomienda consultar la Ref. 8.1.

La magnitud $u_i(y)$ ($i=1, 2, \ldots, N$) es la contribución a la incertidumbre típica asociada a la estimación de salida *y*, resultante de la incertidumbre típica asociada a la estimación de entrada x_i:

$$u_i(y) = c_i\; u(x_i) \qquad (12)$$

donde c_i es el coeficiente de sensibilidad asociado a la estimación de entrada x_i, es decir, la derivada parcial de la función modelo *f* con respecto a X_i evaluada para las estimaciones de entrada x_i :

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{X_i=x_i \ldots\; X_N=x_N} \qquad (13)$$

Con lo cual, a partir de las tres ecuaciones anteriores, la incertidumbre típica asociada a la estimación de salida *y*, *u(y)*, puede escribirse como

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) u(x_i)\right]^2} \qquad (14)$$

Nota: El coeficiente de sensibilidad c_i describe el grado en que la estimación de salida *y* se ve afectada por variaciones en la estimación de entrada x_i. Puede evaluarse a partir de la función modelo *f* según la ecuación (13) o utilizando métodos numéricos; por ejemplo, calculando la variación en la estimación de salida *y* como consecuencia de una variación en la estimación de entrada x_i de $+u(x_i)$ y $-u(x_i)$ y tomando como valor de c_i la diferencia resultante en *y* dividida por $2u(x_i)$. En algunas ocasiones, es preferible determinar con un experimento la variación en la estimación de salida *y*, repitiendo la medición en, por ejemplo, $x_i \pm u(x_i)$. Aunque

$u(x_i)$ es siempre positiva, la contribución $u_i(y)$ según la ecuación (12) puede ser negativa o positiva, dependiendo del signo del coeficiente de sensibilidad c_i. El signo de $u_i(y)$ tiene que tenerse en cuenta en el caso de magnitudes de entrada correlacionadas (en el Anexo D del documento de la Ref. 8.4 se puede encontrar un detalle de cómo proceder en estos casos).

Si la función modelo f es una suma o diferencia de las magnitudes de entrada X_i :

$$f(X_1 , X_2 , \dots , X_N) = \sum_{i=1}^{N} p_i X_i \tag{15}$$

la estimación de salida, según la ecuación (2), viene dada por la correspondiente suma o diferencia de las estimaciones de entrada:

$$y = \sum_{i=1}^{N} p_i x_i \tag{16}$$

siendo los coeficientes de sensibilidad iguales a p_i y convirtiéndose la ecuación (11) en:

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{N} p_i^2 u^2(x_i) \tag{17}$$

Si la función modelo f es un producto o cociente de las magnitudes de entrada X_i :

$$f(X_1 , X_2 , \dots , X_N) = c \prod_{i=1}^{N} x_i^{p_i} \tag{18}$$

entonces la estimación de salida es de nuevo el correspondiente producto o cociente de las estimaciones de entrada:

$$y = c \prod_{i=1}^{N} x_i^{p_i} \tag{19}$$

En este caso, los coeficientes de sensibilidad son iguales a $p_i.y/x_i$ y de la ecuación (11) se obtiene una expresión análoga a la ecuación (17) cuando se utilizan incertidumbres típicas relativas $w(y)= u(y)/ |y|$ y $w(x_i) = u(x_i) / |x_i|$ $(i =1, 2,..., N)$:

$$w^2(y) = \sum_{i=1}^{N} p_i^2 w^2(x_i) \tag{20}$$

Si dos magnitudes de entrada X_i y X_k están correlacionadas en cierto grado; es decir, si son mutuamente dependientes de una forma u otra, su covarianza tiene que considerarse también como una contribución a la incertidumbre (en el Anexo D del documento de la Ref. 8.4 se puede encontrar un detalle de cómo proceder en estos casos). La posibilidad de tener en cuenta el efecto de las correlaciones depende del conocimiento que se tenga del proceso de medición y del juicio de las dependencias mutuas de las magnitudes de entrada. En general, no debe olvidarse que, si se ignoran las correlaciones entre las magnitudes de entrada, el resultado puede ser una estimación incorrecta de la incertidumbre típica de la magnitud de salida.

La covarianza asociada a los estimados de dos magnitudes de entrada, X_i y X_k puede considerarse igual a cero o insignificante en cualquiera de los siguientes casos:

(a) las magnitudes de entrada X_i y X_k son independientes; por ejemplo, cuando se han observado reiterada, pero no simultáneamente, en diferentes experimentos independientes, o cuando representan magnitudes resultantes de diferentes evaluaciones que se han realizado de forma independiente,

(b) cualquiera de las magnitudes de entrada X_i y X_k puede tratarse como constante;

(c) no existe información suficiente para valorar la existencia de una correlación entre las magnitudes de entrada X_i y X_k.

En algunas ocasiones, las correlaciones pueden eliminarse mediante la elección de una función modelo adecuada.

4. Incertidumbre expandida de medida

La incertidumbre expandida de medida *U*, se calcula multiplicando la incertidumbre típica *u(y)* de la estimación de salida *y* por un factor de cobertura *k*.

$$U = k\,.\,u(y) \tag{21}$$

Cuando se puede atribuir una distribución normal (gausiana) a la magnitud medida y la incertidumbre típica asociada a la estimación de salida tiene la suficiente fiabilidad, el factor de cobertura más utilizado es *k=2*. La incertidumbre expandida asociada corresponde a una probabilidad de cobertura de, aproximadamente, un 95%.

La hipótesis de una distribución normal no siempre puede confirmarse experimentalmente con facilidad. Sin embargo, cuando varios componentes de la incertidumbre (por ejemplo, N > 3), derivados de distribuciones de probabilidad bien definidas de magnitudes independientes (por ejemplo, distribuciones normales o rectangulares), realizan contribuciones comparables a la incertidumbre típica asociada a la estimación de salida, se cumplen las condiciones del Teorema del Límite Central y puede suponerse, con un elevado grado de aproximación, que la distribución de la estimación de salida es normal.

Nota: la distribución rectangular es un caso extremo de distribución no normal, sin embargo, la convolución de solo tres distribuciones rectangulares de igual rango ya es aproximadamente normal (Ref. 8.1, Anexo G).

Por otra parte, en lo que se refiere a la confiabilidad de la incertidumbre típica asociada a la estimación de salida, en general, se asume que es adecuada, si ninguna de las contribuciones a la incertidumbre que se obtenga de una evaluación Tipo A, está basada en menos de diez observaciones repetidas.

Si no se cumple alguna de estas condiciones (normalidad o confiabilidad suficiente), el factor de cobertura usual *k=2* puede producir una incertidumbre expandida correspondiente a una probabilidad de cobertura inferior al 95%. En estos casos, para garantizar que el valor de la incertidumbre expandida se corresponde con la misma probabilidad de cobertura que en el caso normal, tienen que utilizarse otros procedimientos. La utilización de aproximadamente la misma probabilidad de cobertura es esencial para comparar los resultados de dos mediciones de la misma magnitud; por ejemplo, cuando se evalúan los resultados de intercomparaciones o se verifica el cumplimiento de una especificación.

Nota: Incluso aunque pueda suponerse una distribución normal, puede ocurrir que la incertidumbre típica asociada a la estimación de salida no tenga la suficiente confiabilidad. Si, en ese caso, no se puede aumentar el número n de mediciones repetidas, ni utilizar una evaluación de Tipo B en lugar de una evaluación de Tipo A poco confiable, puede utilizarse el método descripto en el Anexo E de la Ref. 8.1.

En el resto de los casos, es decir, en todos los casos en los que no pueda justificarse la hipótesis de una distribución normal, debe utilizarse información sobre la distribución de probabilidad real de la estimación de salida para obtener un valor del factor de cobertura k que se corresponda con una probabilidad de cobertura de, aproximadamente, un 95% por ejemplo.

Este problema se analiza en el Anexo G de la Ref. 8.1, recomendándose un método de solución aproximado (empleando la distribución t de Student), que se resume a continuación.

La distribución t no describe en general a la distribución de la variable $(y - Y)/u(y)$, si $u(y)$ es la suma de dos o más componentes de varianzas estimadas $u^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2\, u^2(x_i)$, ni siquiera si cada x_i es la estimación de una magnitud de entrada X_i distribuida normalmente. No obstante, es posible aproximarse a la distribución de esta variable por medio de una distribución t con un número *efectivo* de grados de libertad, ν_{eff}, obtenido mediante la fórmula de Welch-Satterhwaite:

$$\nu_{eff} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \tag{22}$$

donde, de acuerdo a las expresiones (11) y (12), $u^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2\, u^2(x_i)$.

Nota 1: Si $u(x_i)$ se obtiene mediante una evaluación de Tipo B, y puede tratarse como si se conociera exactamente, lo que ocurre frecuentemente en la práctica, $\nu_i \to \infty$ (G.6.4 de la Ref. 8.1.)

Así, para determinar la incertidumbre expandida de medida U, correspondiente a la incertidumbre típica $u(y)$ de la estimación de salida y, se podrá obtener el factor k para una dada probabilidad de cobertura, empleando el número de grados efectivos de libertad, ν_{eff}, hallado según la (22) y la distribución t de Student. (En el Anexo I al presente documento se transcribe la Tabla G.2 de la Ref. 8.1, utilizable a tal fin).

Nota 2: Si el valor de ν_{eff} hallado a partir de la ecuación (22) no es un número entero, para la determinación del valor correspondiente de t_p en la tabla del Anexo I, se utilizará un valor de ν_{eff} obtenido por interpolación o truncamiento al número entero inferior más próximo (G.4.1 de la Ref. 8.1.).

En otro orden de cosas, vale la pena remarcar que el análisis de la incertidumbre para una medición -a veces llamado balance de incertidumbres de una medida- debe incluir una lista de todas las fuentes de incertidumbre, junto con las incertidumbres típicas de medida asociadas y los métodos para evaluarlas. Como ya se anticipara en el caso de mediciones repetidas, debe indicarse también el número n de observaciones. Para mayor claridad, se recomienda presentar los datos referentes a este análisis en forma tabulada. En la tabla, las magnitudes deben expresarse mediante un símbolo físico X_i o un breve identificador, indicando para cada una de ellas, como mínimo, el valor estimado x_i, la incertidumbre típica de medición asociada $u(x_i)$, el coeficiente de sensibilidad c_i y las diferentes contribuciones a la incertidumbre $u_i(y)$. Asimismo, debe indicarse la dimensión de cada magnitud junto con los valores numéricos que se facilitan en la tabla.

En la Tabla I se ofrece un ejemplo formal de este tipo de presentación, que puede aplicarse cuando las magnitudes de entrada no están correlacionadas.

Tabla I

Esquema de presentación para el análisis de la incertidumbre de una medida

magnitud X_i	*estimación* x_i	*Incertidumbre típica* $u(x_i)$	*Coeficiente de sensibilidad* c_i	*Contribución a la incertidumbre típica* $u_i(y)$	*Grados de libertad* ν_i
X_1	x_1	$u(x_1)$	c_1	$u_1(y)$	ν_1
X_2	x_2	$u(x_2)$	c_2	$u_2(y)$	ν_2
:	:	:	:	:	:
X_N	x_N	$u(x_N)$	c_N	$u_N(y)$	ν_N
Y	y	- - - - -	- - - - -	$u(y)$	ν_{eff}

5. Expresión de la incertidumbre de medida

El resultado completo de una medición, que consiste en el estimado y de la magnitud de salida y la incertidumbre expandida asociada U, se expresa en la forma ($y \pm U$). También, generalmente, se incluye una nota con un contenido como el siguiente, o similar: *"La incertidumbre expandida de medida se ha obtenido multiplicando la incertidumbre típica de medición por el factor de cobertura k=2 que, para una distribución normal, corresponde a una probabilidad de cobertura de aproximadamente el 95%."*.

El valor numérico de la incertidumbre de medida debe reflejar siempre la capacidad de medida en la práctica, y se expresa habitualmente con un máximo de dos cifras significativas. El valor numérico del resultado de la medición se redondea, en su expresión final, a la menor cifra significativa del valor de la incertidumbre expandida asignada al resultado de la medición, aplicando las reglas normales del redondeo. Sin embargo, se sugiere que, si el redondeo reduce el valor numérico de la incertidumbre de medición en más de un 5%, debe utilizarse el valor redondeado hacia arriba (Ref. 8.8 y Ref. 8.9).

6. Procedimiento, paso a paso, para el cálculo de la incertidumbre de medida

A continuación, se sugieren, solo a modo de guía general, una serie de pasos para el cálculo de la incertidumbre de una medida:

a) Expresar, en términos matemáticos, la dependencia de la magnitud de salida Y respecto de las magnitudes de entrada X_i, según la ecuación (1).

b) Identificar y aplicar todas las correcciones significativas.

c) Relacionar todas las fuentes de incertidumbre en la forma de un análisis de incertidumbres según se explica en el punto 3.

d) Para magnitudes medidas reiteradamente, calcular la incertidumbre típica $u(\bar{q})$, según lo detallado en 2.1 (Evaluación Tipo A de la incertidumbre típica).

e) Para valores únicos, por ejemplo, valores resultantes de mediciones previas, valores de corrección, valores tomados de la literatura técnica, etc, adoptar la incertidumbre típica cuando se conozca la misma o pueda calcularse según lo detallado en (a) del punto 2.2 (Evaluación Tipo B de la incertidumbre típica). Debe prestarse especial atención a la representación de la incertidumbre utilizada. Si no se dispone de datos de los que pueda derivar la incertidumbre típica, tendrá que estimarse el valor de $u(x_i)$ basándose en la experiencia.

f) Para magnitudes de entrada para las que se conoce o puede suponerse una distribución de probabilidad, calcular el valor esperado y la incertidumbre típica $u(x_i)$ según lo detallado en (b) del punto 2.2 (Evaluación Tipo B de la incertidumbre típica). Si sólo se conoce o pueden estimarse los límites superior e inferior, calcular la incertidumbre típica $u(x_i)$ de acuerdo con (c) del punto 2.2 (Evaluación Tipo B de la incertidumbre típica).

g) Calcular, para cada magnitud de entrada X_i, la contribución $u_i(y)$ a la incertidumbre asociada a la estimación de salida resultante de la estimación de entrada x_i, aplicando las ecuaciones (12) y (13), y sumando sus cuadrados tal como se describe en las ecuación (11) y (14), para obtener el cuadrado de la incertidumbre típica de la estimación de salida $u(y)$.

Nota: tal como se mencionara en el punto 3, en el Anexo D del documento de la Ref. 8.4, puede encontrarse un detalle de cómo proceder en el caso de que las magnitudes de entrada estén correlacionadas.

h) Determinar la incertidumbre expandida U, multiplicando la incertidumbre típica $u(y)$ asociada a la estimación de salida, por un factor de cobertura k elegido conforme al punto 4.

i) Expresar el resultado de la medición, indicando la estimación de salida y, la incertidumbre expandida asociada U, y el factor de cobertura k, según se indica en el punto 5.

7. Ejemplo de aplicación

Con el objetivo de afianzar los conceptos vertidos hasta aquí, se propone como ejercicio, expresar la incertidumbre de la medición detallada a continuación, según la forma (*y ± U*), para una probabilidad de cobertura de aproximadamente el 95%:

Se ha efectuado la determinación del valor de una resistencia *R*, empleando el método del voltímetro y el amperímetro (en conexión corta), según se muestra en la Figura 1.

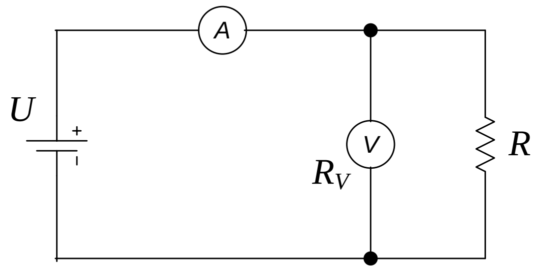

Figura 1

Los instrumentos utilizados fueron dos multímetros marca Hewlett Packard, modelo HP974A (similares a los usados en los Trabajos Prácticos), en sus funciones de voltímetro y amperímetro, respectivamente. Se realizaron 6 mediciones en similares condiciones, obteniéndose los siguientes pares de valores:

Medición Nº	1	2	3	4	5	6
V_m [V]	12,615	12,610	12,614	12,612	12,615	12,613
I_m [mA]	237,21	237,20	237,18	237,22	237,20	237,21

en los alcances de 50 V y 500 mA de corriente continua, respectivamente.

A continuación, se detalla la propuesta de solución al problema planteado, siguiendo los pasos enunciados en el punto 6.

En primera aproximación, la expresión (1), $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$, aplicada a este caso, sería:

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N) = f(V_m, I_m) = R_m = \frac{V_m}{I_m} \tag{23}$$

Sin embargo, teniendo en cuenta el consumo del voltímetro para la conexión usada, se debería efectuar, al menos inicialmente, una corrección como la que sigue:

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N) = f(V_m, I_m, R_V) = R_m = \frac{V_m}{I_m - \frac{V_m}{R_V}} \tag{24}$$

donde R_V corresponde a la resistencia interna del voltímetro.

De la ecuación (24), se puede obtener, para cada uno de los valores medidos, la estimación de salida *y*, a partir de las estimaciones de entrada x_1, x_2, ... , x_N. Por ejemplo, para el primer par de valores medidos (Medición N° 1), se tiene:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N) = 53{,}181\ \Omega = \frac{12{,}615\ V}{237{,}21\ mA - \dfrac{12{,}615\ V}{10\ M\Omega}}$$

De la misma forma se pueden obtener los restantes, que se detallan a continuación:

Medición N°	1	2	3	4	5	6
R_m *[Ω]*	53,181	53,162	53,184	53,166	53,183	53,173

Para la determinación de la incertidumbre de salida *u(y)*, se deberá tener en cuenta que se está en presencia de un caso en el cual conviven el Tipo A y el Tipo B (ver 2), y se supondrá que el valor de la resistencia R_V se conoce sin error.

Evaluación Tipo A de la incertidumbre típica

Según lo detallado en 2.1, se tiene, para este caso que:

$$\bar{R} \ = \ \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6} R_j \ = \ 53{,}175\ \Omega$$

y la incertidumbre típica de Tipo A:

$$u_A(R) \ = \ s\,(\bar{R}) \ = \ \frac{s(R)}{\sqrt{6}} \ = \ 0{,}0038\ \Omega$$

Nota: vale la pena remarcar que, para este caso, el coeficiente de sensibilidad definido en el punto 3 es igual a 1.

Evaluación Tipo B de la incertidumbre típica

A partir de las expresiones de los errores correspondientes a los instrumentos utilizados, y empleando el promedio de los valores medidos de tensión y corriente, se tiene:

$$E_{V_m} = \ \pm\ (0{,}05\,\%\ V_m\ +\ 2\ díg) = \ \pm\ 0{,}0083\ V \tag{25}$$

y

$$E_{I_m} = \ \pm\ (0{,}3\,\%\ I_m\ +\ 2\ díg) = \ \pm\ 0{,}73\ mA \tag{26}$$

Por otra parte, la resolución de cada uno de ellos es:

$$\mathrm{Res}_{V_m} = \ \pm\ \frac{0{,}001\ V}{2} \ = \ \pm\,0{,}0005\ V \tag{27}$$

y

$$\mathrm{Res}_{I_m} = \ \pm\ \frac{0{,}01\ mA}{2} \ = \ \pm\,0{,}005\ mA \tag{28}$$

Considerando, además, para los cuatro valores dados antes, una distribución de probabilidad rectangular [punto 2.2 c)], como situación más desfavorable que no siempre es cierta, y con la ayuda de la ecuación (10), se tiene que:

$$u(E_{V_m}) = \frac{0{,}0083\ V}{\sqrt{3}} = 0{,}0048\ V, \tag{29}$$

$$u(E_{I_m}) = \frac{0{,}73\ mA}{\sqrt{3}} = 0{,}42\ mA\ , \tag{30}$$

$$u(\mathrm{Res}_{V_m}) = \frac{0{,}0005\ V}{\sqrt{3}} = 0{,}00029\ V \tag{31}$$

y

$$u(\mathrm{Res}_{I_m}) = \frac{0{,}005\ mA}{\sqrt{3}} = 0{,}0029\ mA \tag{32}$$

Para determinar ahora la incertidumbre típica de Tipo B, ($u_B(R)$ para nuestro ejemplo), se recurre a lo visto en el punto 3. Los coeficientes de sensibilidad c_i, empleando para su cálculo el promedio de los valores medidos de tensión y corriente, serán:

$$c_{V_m} = \frac{\partial R}{\partial V_m} = \frac{I_m}{\left(I_m - \frac{V_m}{R_V}\right)^2} = 4{,}2159\ \ \frac{1}{A} \tag{33}$$

y

$$c_{I_m} = \frac{\partial R}{\partial I_m} = \frac{-V_m}{\left(I_m - \frac{V_m}{R_V}\right)^2} = -224{,}18\ \ \frac{V}{A^2} \tag{34}$$

(No se ha determinado el coeficiente de sensibilidad correspondiente a R_V ya que se ha considerado que su valor se conoce sin error y, por tanto, no contribuirá a la incertidumbre de salida).

Entonces, según la expresión (14), la incertidumbre típica de Tipo B, será:

$$u_B(R) = \pm \sqrt{[\,u_{V_m}^2(R) + u_{I_m}^2(R)]} \tag{35}$$

es decir:

$$u_B(R) = \pm \sqrt{c_{V_m}^2\,[\,u^2(E_{V_m}) + u^2(\mathrm{Res}_{V_m})] + c_{I_m}^2\,[\,u^2(E_{I_m}) + u^2(\mathrm{Res}_{I_m})]} \tag{36}$$

con lo cual:

$$\begin{aligned} u_B(R) &= \pm\sqrt{4{,}2159^2[0{,}0048^2 + 0{,}00029^2] + 224{,}18^2[\,0{,}00042^2 + 0{,}0000029^2]}\ \Omega = \\ &= \pm\sqrt{0{,}02024^2 + 0{,}00122^2 + 0{,}09416^2 + 0{,}00065^2}\ \Omega = \pm\ 0{,}096\ \Omega \end{aligned} \tag{37}$$

Incertidumbre típica de la estimación de salida

Considerando ahora todas las contribuciones a la incertidumbre típica (Tipo A y Tipo B), según la expresión 11, podemos escribir:

$$u(R) = \pm \sqrt{u_A^2(R) \ + \ u_B^2(R)}$$
$$= \pm \sqrt{0{,}0038^{\,2} \ + \ 0{,}096^{\,2}} \ = \ \pm\ 0{,}096\ \Omega \qquad (38)$$

Nota: observar que el cálculo precedente podría haberse obviado, dado que, para este ejercicio, la contribución a la incertidumbre típica de Tipo A es despreciable frente a la de Tipo B.

Incertidumbre expandida de medida

Según lo visto en el punto 4, para determinar la incertidumbre expandida de medida para este caso, se deberá determinar el factor de cobertura *k* que asegure, según lo pedido en el enunciado del ejercicio, un intervalo de confianza de aproximadamente el 95 %. Para ello, según lo visto antes, se tendrán en cuenta las siguientes consideraciones:

- El número de grados de libertad ν_i para la componente de incertidumbre de Tipo A, (n-1), es igual a 5.
- El número de grados de libertad ν_i para las componentes de incertidumbre de Tipo B es infinito (∞).

Con lo cual ya estamos en condiciones de calcular el número efectivo de grados de libertad, ν_{eff}, empleando la expresión de Welch-Satterhwaite (22):

$$\nu_{eff} \ = \ \frac{u^4(R)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(R)}{\nu_i}} \ = \ \frac{u^4(R)}{\frac{u_A^4(R)}{5} \ + \ \frac{u_{V_m}^4(R)}{\infty} \ + \ \frac{u_{I_m}^4(R)}{\infty}}$$
$$= \ \frac{(0{,}096\ \Omega\,)^4}{\frac{(0{,}0038\ \Omega)^4}{5}} \ > \ 2.10^6 \qquad (39)$$

Por lo que, de la tabla del Anexo I, para una probabilidad de cobertura (*p*) del 95 % e ∞ grados de libertad, se obtiene un factor de cobertura *k* ($t_p(\nu)$) igual a 1,96.

Así, ya estamos en condiciones de presentar los resultados de la forma sugerida en la Tabla I del punto 3:

Tabla II
Presentación de datos del análisis de incertidumbre.

magnitud ***X_i***		***estimación*** ***x_i***	***Incertidumbre típica*** ***$u(x_i)$***	***Coeficiente de sensibilidad*** ***c_i***	***Contribución a la incertidumbre típica*** ***$u_i(y)$***	***Grados de libertad*** ***ν_i***
R_m		*53,175 Ω*	*0,0038 Ω*	*1*	*0,0038 Ω*	*5*
V_m	E_{V_m}	*12,613 V*	*0,0048 V*	*4,2159* $\frac{1}{A}$	*0,02024 Ω*	∞
	Res_{V_m}		*0,00029 V*		*0,00122 Ω*	∞
R_V		*10 MΩ*	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - -
I_m	E_{I_m}	*237,20 mA*	*0,42 mA*	*- 224,18* $\frac{V}{A^2}$	*0,09416 Ω*	∞
	Res_{I_m}		*0,0029 mA*		*0,00065 Ω*	∞
R		***53,18 Ω***	- - - - -	- - - - -	***0,096 Ω***	∞

Entonces, según lo visto en el punto 4, y considerando el factor de cobertura obtenido, *k=1,96*, la incertidumbre expandida asociada será:

$$U = k\,.\,u(y) = 1{,}96\ .\ 0{,}096\ \Omega\ =\ 0{,}19\ \Omega \tag{40}$$

Por lo que, el resultado de la medición, expresado de la forma presentada en el punto 5, (*y ± U*), será:

$$R\ =\ (53{,}18\ \pm\ 0{,}19)\ \Omega \tag{41}$$

"La incertidumbre expandida de medida se ha obtenido multiplicando la incertidumbre típica de medición por el factor de cobertura k = 1,96 que, para una distribución normal, corresponde a una probabilidad de cobertura de aproximadamente el 95%."

8. Referencias

Ref. 8.1. BIPM (Bureau International des Poids et Mesures), "Evaluation of measurement data. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement", JCGM 100, First edition. September 2008 (GUM 1995 with minor corrections).

Ref. 8.2. IRAM, Norma 35050, "Estadística. Procedimientos para la evaluación de la incertidumbre de la medición.", Primera edición, 2001-06-15.

Ref. 8.3. EA (European Co-operation for Accreditation), EA-4/02, "Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration", second edition, 1999.

Ref. 8.4. Entidad Nacional de Acreditación de España, CEA-ENAC-LC/02, "Expresión de la Incertidumbre de Medida en las Calibraciones", Revisión 1, enero de 1998.

Ref. 8.5. NIST, National Institute of Standards and Technology, "Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results", NIST Technical Note 1297, 1994 edition.

Ref. 8.6. UKAS, United Kingdom Accreditation Service, "The Expression of Uncertainty and Confidence in Measurement", M3003, first edition, December 1997.

Ref. 8.7. OAA, Organismo Argentino de Acreditación, "Expresión de la Incertidumbre de Medida en las Calibraciones/Ensayos", DC-LE-03, versión 1, 26 de septiembre de 2003.

Ref. 8.8. ISO Standard 31: Quantities and units, Part 0: General principles, 1992. Amd1 1998. Amd2 2005.

Ref. 8.9. NIST, National Institute of Standards and Technology, "Guide for the Use of the International System of Units (SI)", NIST Special Publication 811, 1995 edition.

Anexo I - Distribución *"t"* de Student (Tabla G.2, Ref. 8.1)

Valor de $t_p(\nu)$ de la distribución t, para ν grados de libertad, que define un intervalo de $-t_p(\nu)$ a $+t_p(\nu)$, que incluye la fracción p de la distribución.

Número de grados de libertad, ν	Fracción p, en porcentaje					
	68,27 [a)]	90	95	95,45 [a)]	99	99,73 [a)]
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
11	1,05	1,80	2,20	2,25	3,11	3,85
12	1,04	1,78	2,18	2,23	3,05	3,76
13	1,04	1,77	2,16	2,21	3,01	3,69
14	1,04	1,76	2,14	2,20	2,98	3,64
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
16	1,03	1,75	2,12	2,17	2,92	3,54
17	1,03	1,74	2,11	2,16	2,90	3,51
18	1,03	1,73	2,10	2,15	2,88	3,48
19	1,03	1,73	2,09	2,14	2,86	3,45
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
40	1,01	1,68	2,02	2,06	2,70	3,20
45	1,01	1,68	2,01	2,06	2,69	3,18
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,660	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000

[a)] Para una magnitud z descripta por una distribución normal de esperanza matemática μ_z y desviación estándar σ, el intervalo $\pm k\sigma$ incluye respectivamente las fracciones p = 68,27%, 95,45%, y 99,73% de la distribución, para valores de k = 1, 2 y 3.