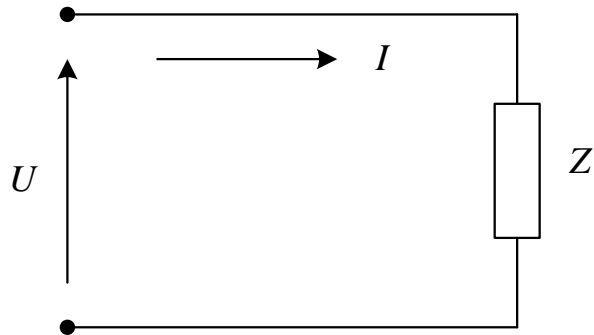
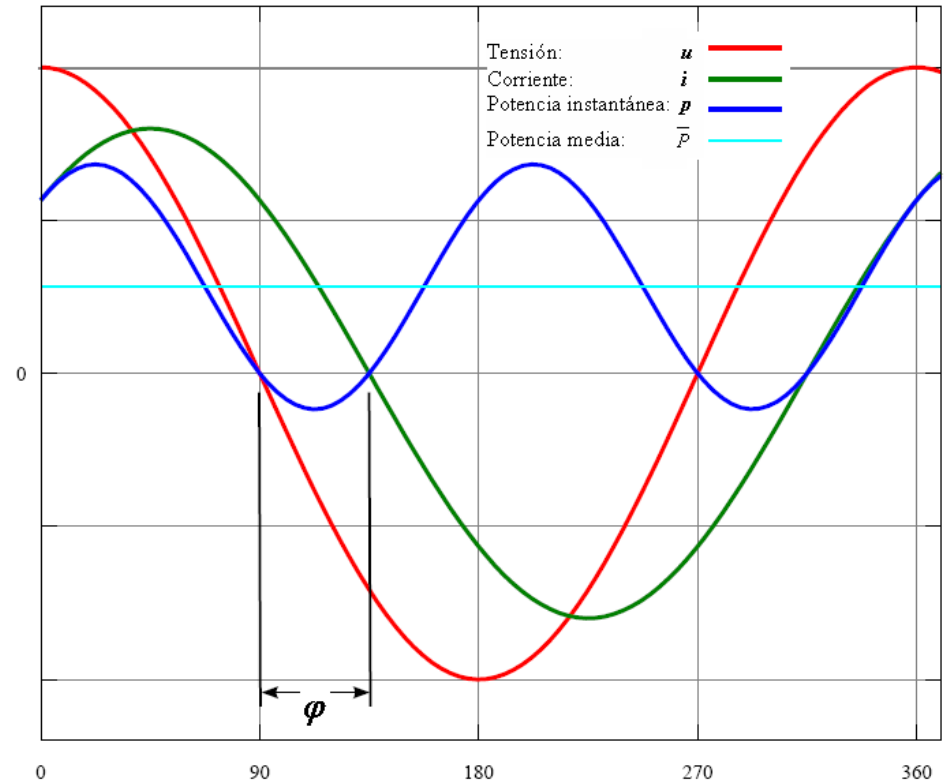


Medición de Potencia en Corriente Alterna



$$p = u \cdot i \quad \text{potencia instantánea}$$

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T u \cdot i \cdot dt = \\ &= U_{ef} \cdot I_{ef} \cdot \cos \varphi \end{aligned}$$



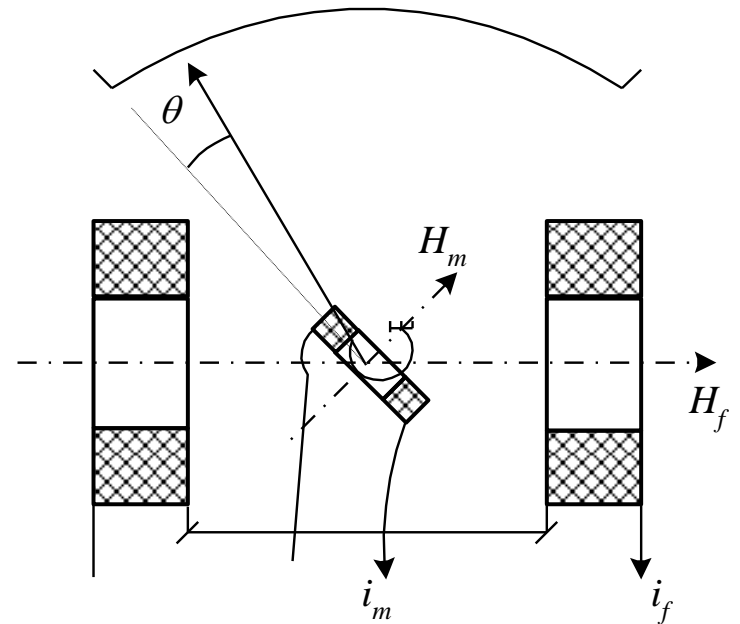
Potencia media (habitualmente denominada simplemente P)

Instrumentos Electrodinámicos

Deflexión
media

$$\delta = k * \frac{l T}{T_0} \int_0^T c_m(t) * dt$$

$$\Rightarrow \delta = k \frac{l}{T} \frac{\partial M}{\partial \theta} \int_0^T i_f i_m dt$$



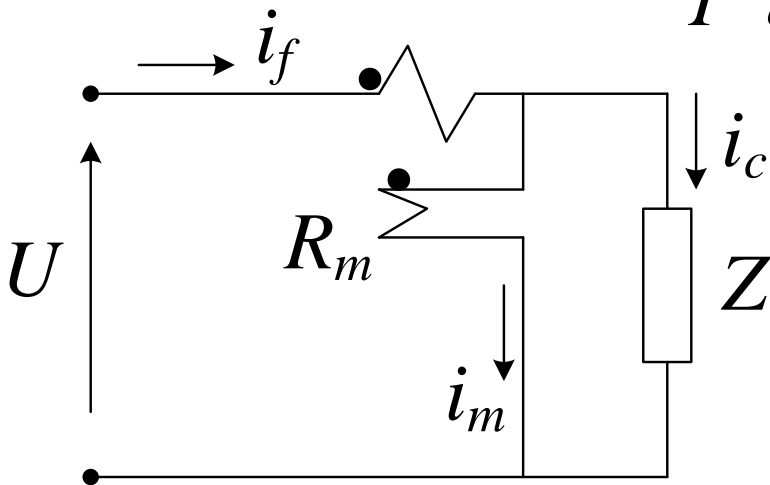
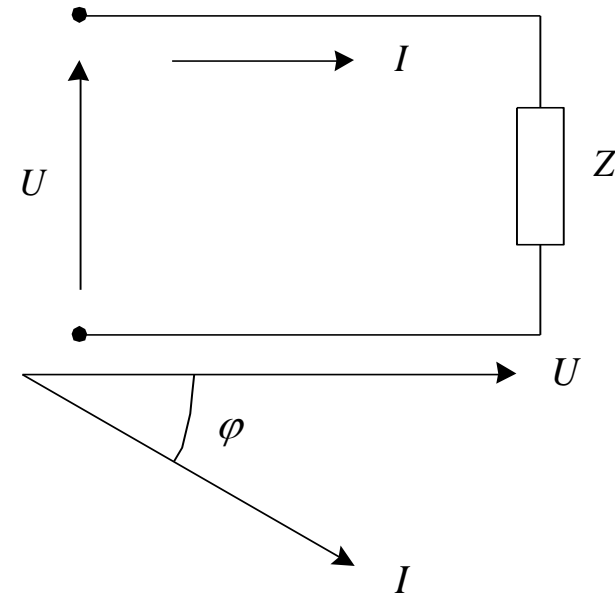
Esquema circuital básico

La deflexión media es proporcional al valor medio del producto de las corrientes instantáneas que circulan por sus dos bobinas.

Vatímetros Electrodinámicos

Potencia media $P = \frac{1}{T} \int_0^T u * i * dt$

Deflexión media $\delta = k \frac{1}{T} \frac{\partial M}{\partial \theta} \int_0^T i_f i_m dt$

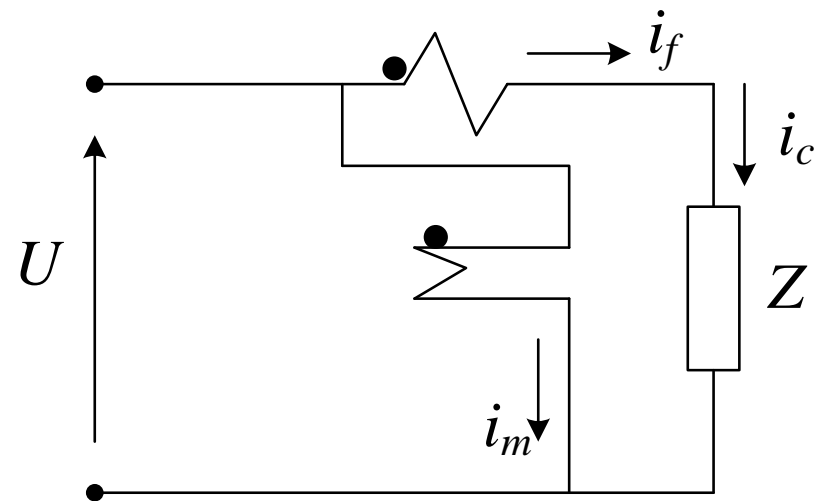
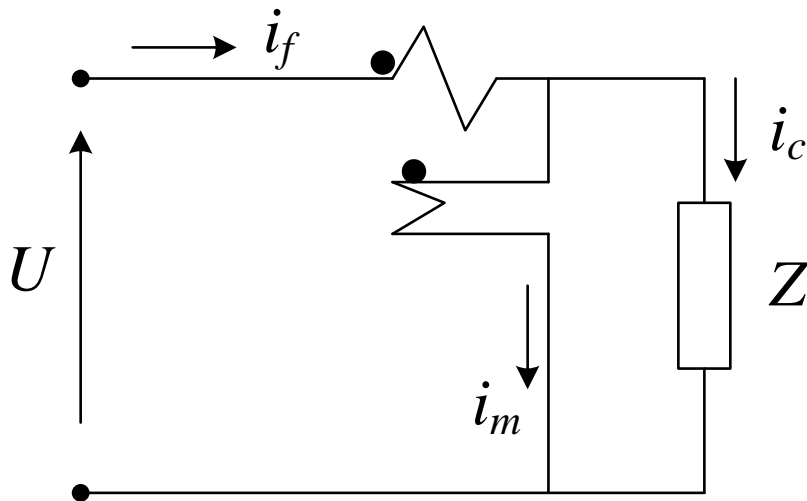


$$i_f = \sqrt{2} * I_{ef} * \text{sen}(\omega t - \varphi)$$

$$i_m = \frac{U}{R_m} = \frac{\sqrt{2} * U_{ef}}{R_m} * \text{sen } \omega t$$

$$\delta = \frac{1}{k_w} * U_{ef} * I_{ef} * \cos \varphi = \frac{1}{k_w} * P$$

Esquemas de Conexión de un Instrumento Electrodinámico para medir la Potencia Activa en un circuito elemental ($f < 400 - 500 \text{ Hz}$)



Datos característicos principales de un Vatímetro Electrodinámico

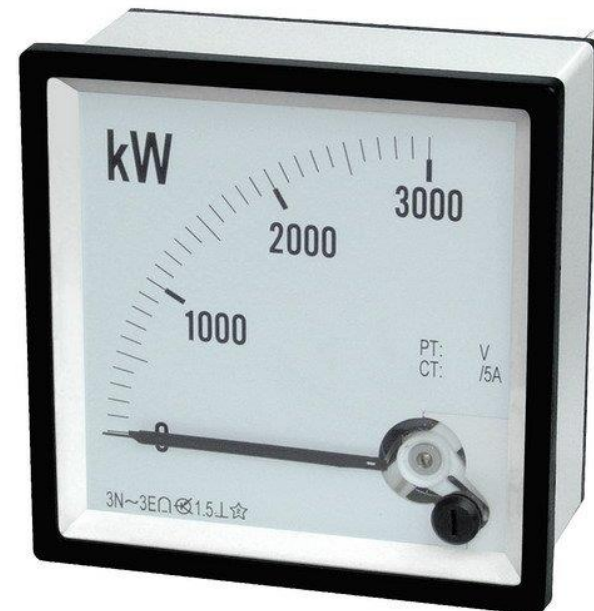
Clase, c

Corriente nominal, I_n

Tensión nominal, U_n

Factor de potencia nominal, $\cos \varphi_n$

A partir de los cuales se obtiene: $P_f = U_n \cdot I_n \cdot \cos \varphi_n$

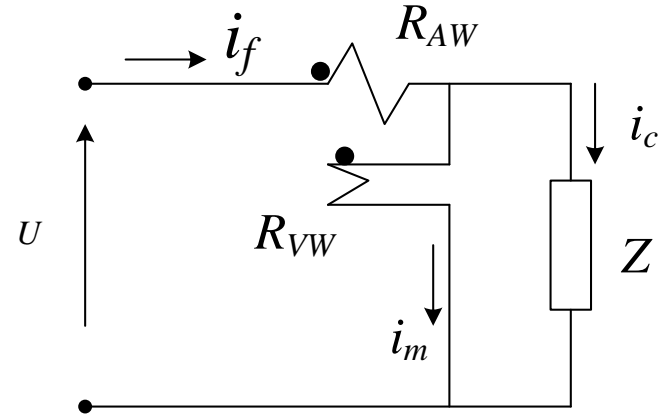


Error por consumo propio

Indicación del instrumento =

= P_c (potencia en la carga Z) +

+ $\frac{U^2}{R_{VW}}$ (consumo del circuito voltimétrico del vatímetro)

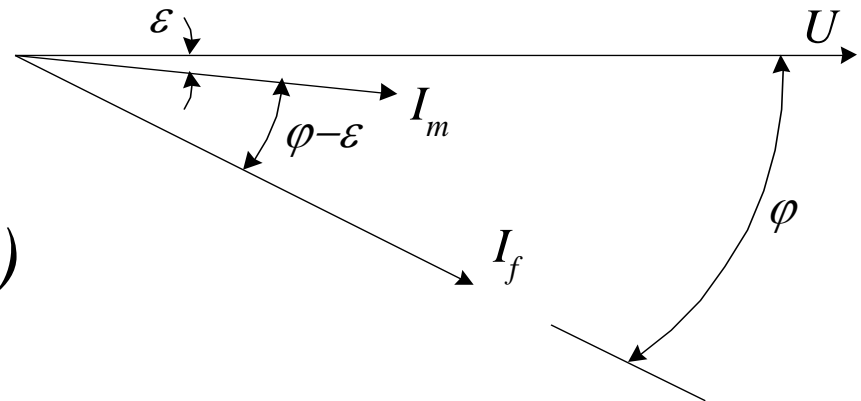


Error de fase

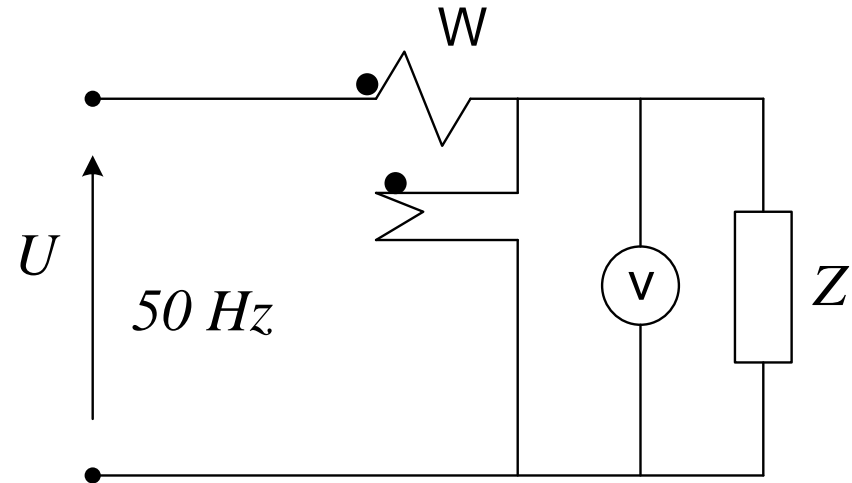
$$P_c = U \cdot I_c \cdot \cos \varphi$$

$$P_m = U \cdot I_c \cdot \cos (\varphi - \varepsilon)$$

$$e_f = \frac{P_m - P_c}{P_c} \Rightarrow e_f = \varepsilon [\text{rad}] \cdot \text{tg} \varphi$$



Ejemplo: Determinar la potencia activa en la carga Z , con su error límite



- Watímetro: U_n : 240 V, I_n : 5 A, c : 1, $\cos \varphi_n$: 1, R_{VW} : 1 k Ω /V;
 Z_{AV} : 1 VA, $\cos \varphi = 0,7$ a 5 A.

- Voltímetro: Alcance: 240 V, R_V : 1 k Ω /V, c : 1

Valores medidos: $P_m = 0,783\text{ kW}$; $U_m = 220,1\text{ V}$

$$P_m = P_c + P_{V // VW} = P_c + \frac{U_m^2}{R_V // R_{VW}}$$

$$R_V = 240 \text{ V} \cdot 1 \frac{\text{k}\Omega}{\text{V}} = 240 \text{ k}\Omega = R_{VW}$$

$$\Rightarrow R_V // R_{VW} = 120 \text{ k}\Omega$$

Entonces:

$$P_m = P_c + \frac{U_m^2}{R_V // R_{VW}} = P_c + \frac{220,1^2}{120 \text{ k}\Omega} = P_c + 0,40 \text{ W}$$

¿Cuánto vale E_{P_m} ?

$$E_{P_m} = \pm \frac{c}{100} \cdot P_f, \text{ con } P_f = U_n \cdot I_n \cdot \cos \varphi_n = 1,2 \text{ kW}$$

$$\text{Con lo cual } E_{P_m} = \pm 12 \text{ W}$$

Se ve que:

$$E_{P_m} = \pm 12 \text{ W} \gg \frac{U_m^2}{R_V // R_{VW}} = 0,4 \text{ W}$$

Con lo cual se puede escribir:

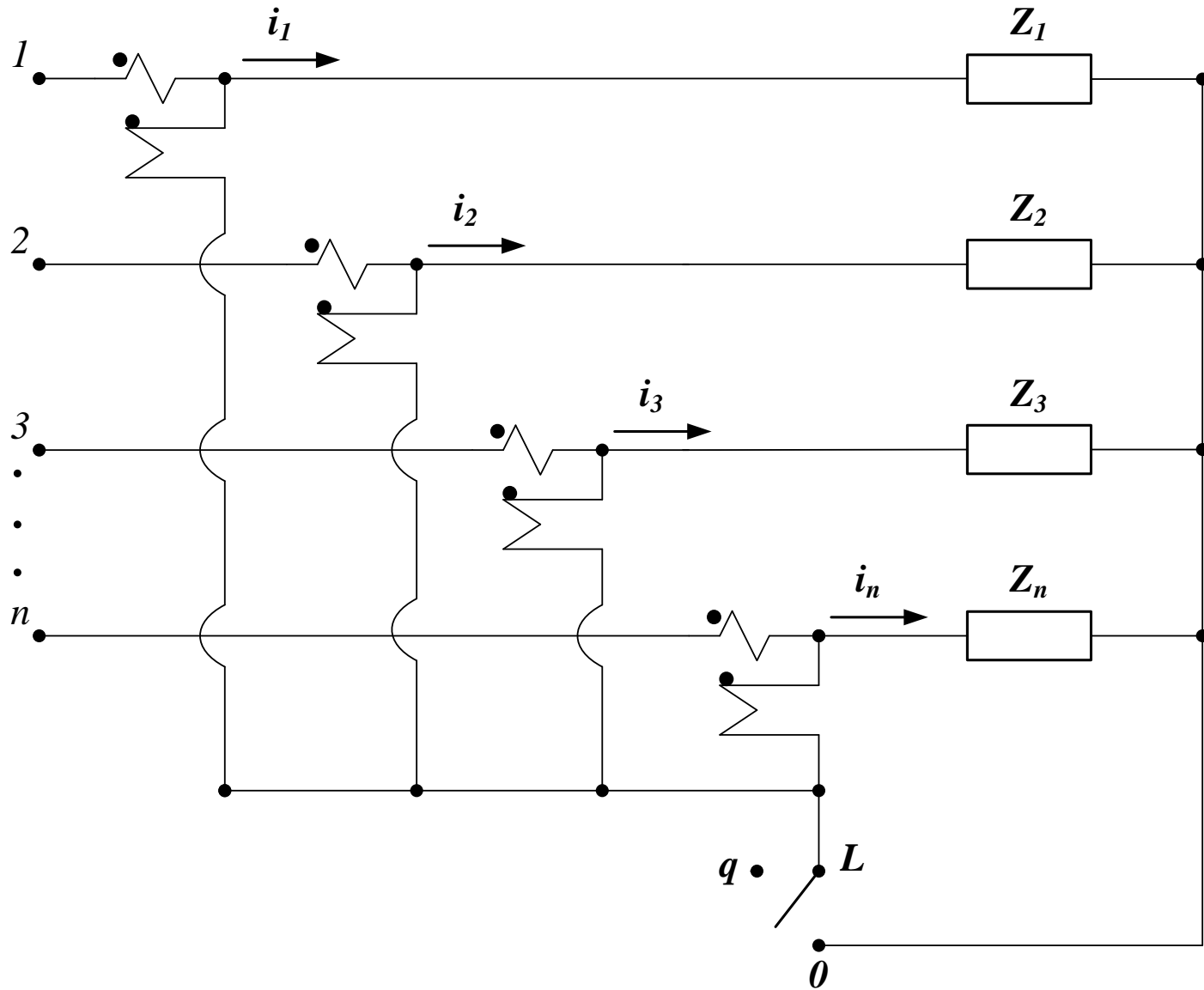
$$P_c \approx P_m = 0,783 \text{ kW}$$

y

$$E_{P_m} = \pm 12 \text{ W} = 0,01 \text{ kW}$$

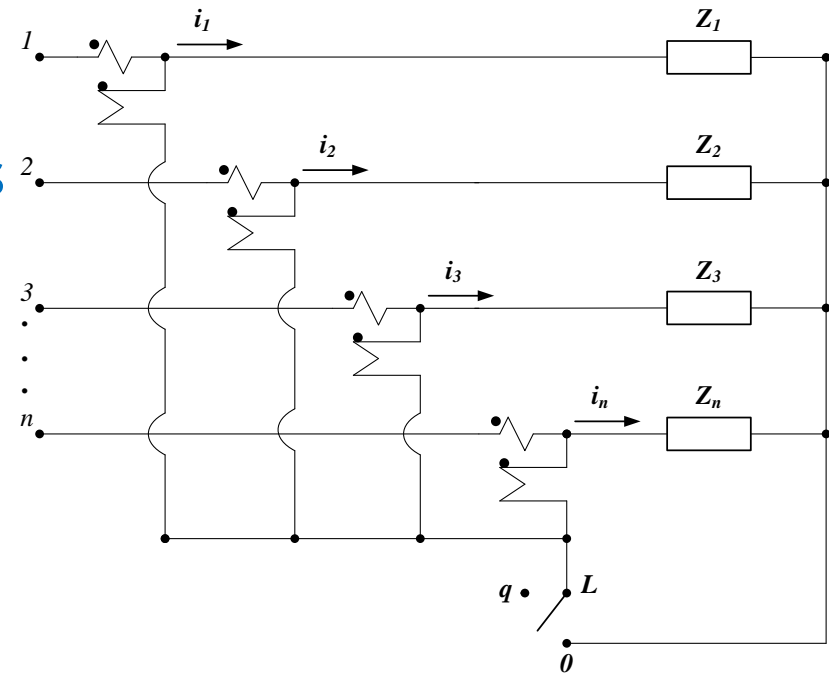
$$\Rightarrow P_c = (0,78 \pm 0,01) \text{ kW}$$

Medición de Potencia en Sistemas de n hilos



$u_{10}, u_{20}, u_{30} \dots u_{n0}$ tensiones instantáneas

$i_1, i_2, i_3 \dots i_n$ corrientes instantáneas



L conectada a 0:

$$\Rightarrow p = u_{10} \cdot i_1 + u_{20} \cdot i_2 + u_{30} \cdot i_3 + \dots + u_{n0} \cdot i_n$$

L conectada a q:

$$\Rightarrow p' = u_{1q} \cdot i_1 + u_{2q} \cdot i_2 + u_{3q} \cdot i_3 + \dots + u_{nq} \cdot i_n$$

Pero:

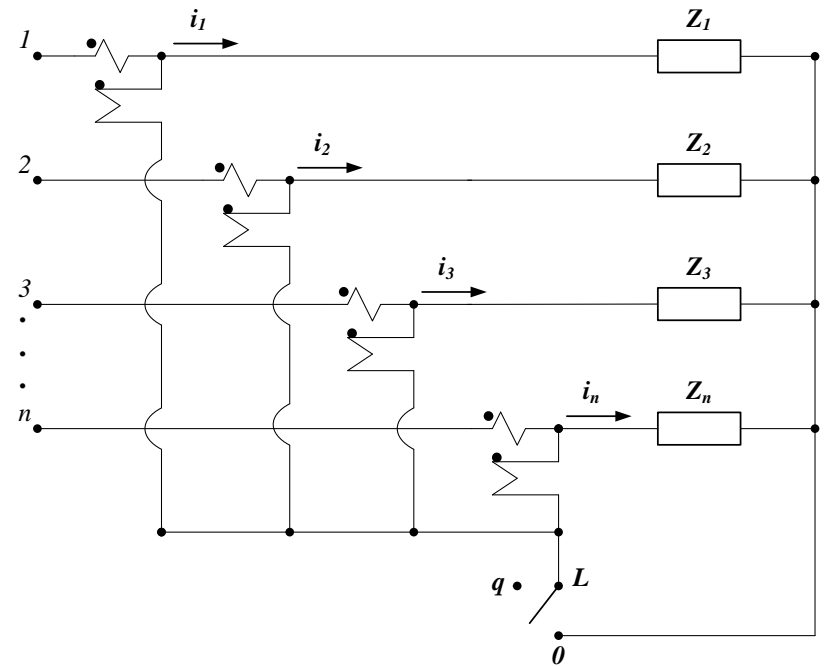
$$u_{1q} = u_{10} + u_{0q}$$

$$u_{2q} = u_{20} + u_{0q}$$

$$u_{3q} = u_{30} + u_{0q}$$

.

$$u_{nq} = u_{n0} + u_{0q}$$



Con lo cual:

$$\begin{aligned} p' &= (u_{10} + u_{0q}) \cdot i_1 + (u_{20} + u_{0q}) \cdot i_2 + (u_{30} + u_{0q}) \cdot i_3 + \dots + (u_{n0} + u_{0q}) \cdot i_n = \\ &= u_{10} \cdot i_1 + u_{20} \cdot i_2 + u_{30} \cdot i_3 + \dots + u_{n0} \cdot i_n + u_{0q} \cdot (i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n) \end{aligned}$$

Pero si L está en q : $i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n = 0$

Entonces:

$$p' = p$$

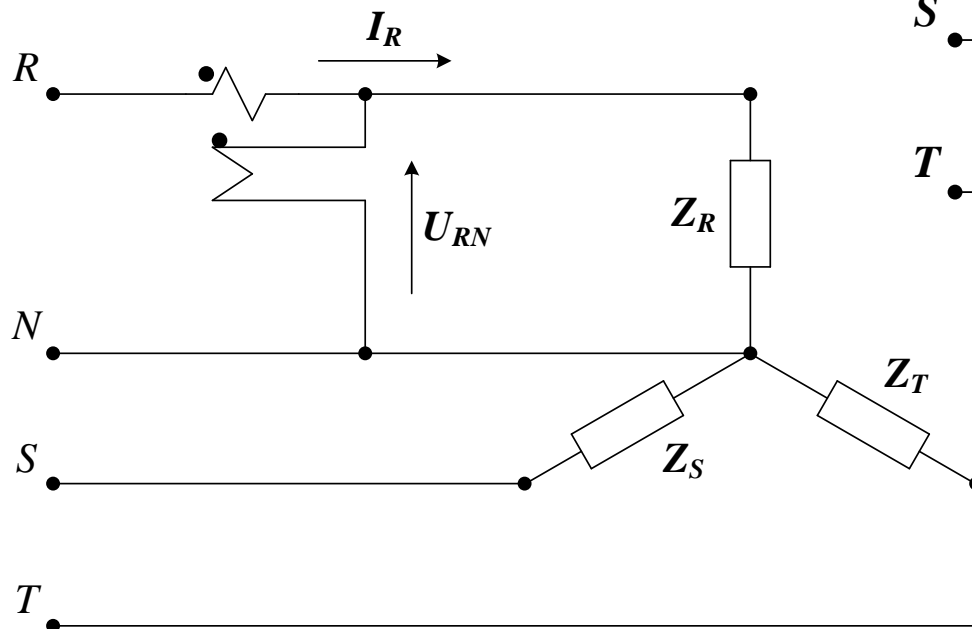
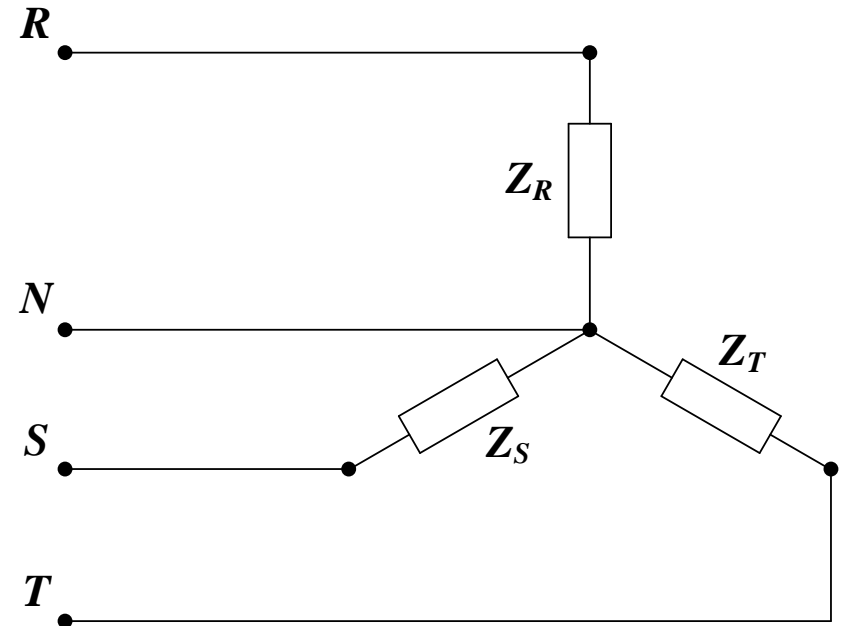
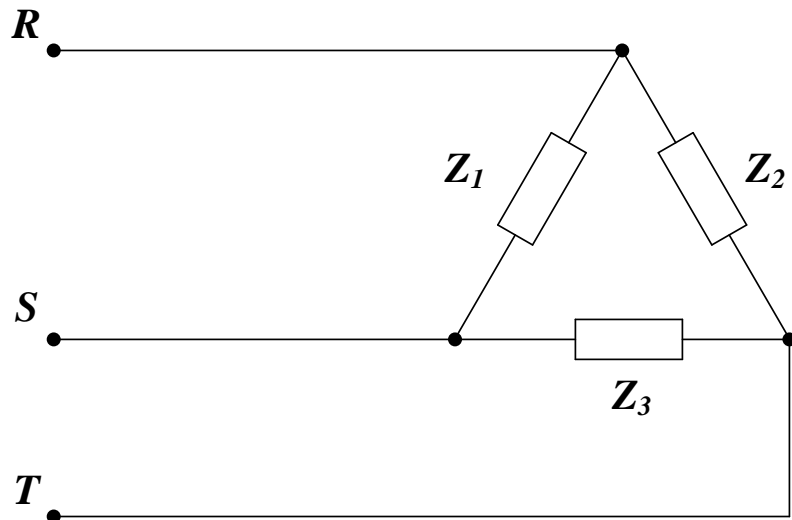
y

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p' dt = \frac{1}{T} \int_0^T p dt$$

Conclusiones Generales

- ✓ *La suma de las indicaciones de los n aparatos es siempre la potencia total*, sea cual fuere el potencial del punto común de los circuitos de tensión.
- ✓ Si el punto común de los circuitos de tensión coincide con un hilo, el vatímetro cuyo circuito de corriente esté en dicho hilo no indicará, y la potencia total resultará ser la sumatoria de las indicaciones de los $n-1$ vatímetros restantes. *“En cualquier sistema de n hilos, la potencia total puede obtenerse a partir de las indicaciones de $n-1$ vatímetros”*
- ✓ El sistema puede ser de alterna o continua, n -fásico o no, las tensiones y las corrientes pueden o no ser sinuosidades, mientras sea de n hilos, los $n-1$ vatímetros darán la potencia activa total (siempre que los vatímetros sean capaces de responder a las excitaciones que se aplican) (Blondel).

Medición de Potencia en Sistemas Trifásicos

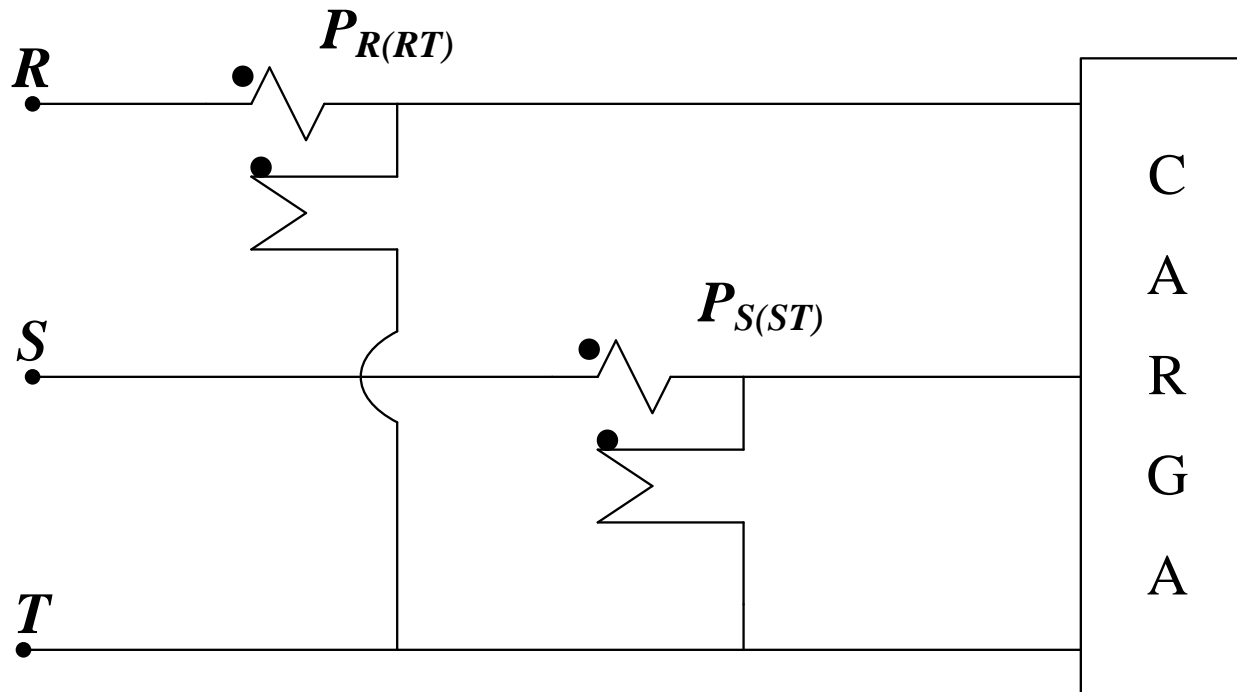


$$P_{a(bc)}$$

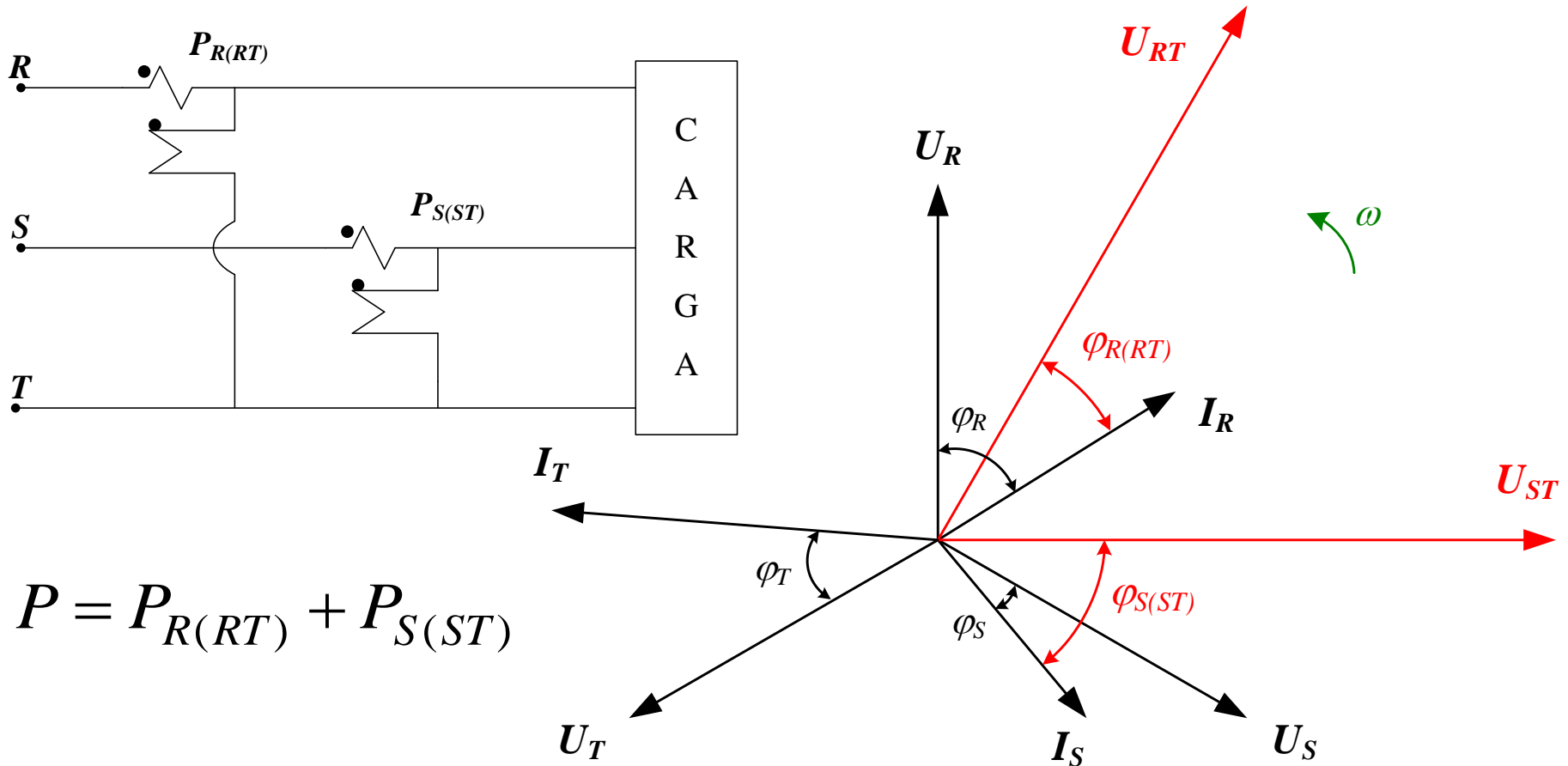
$$P_R(RN)$$

Medición de Potencia en Sistemas Trifásicos *Trifilares*

Método de los Dos Vatímetros



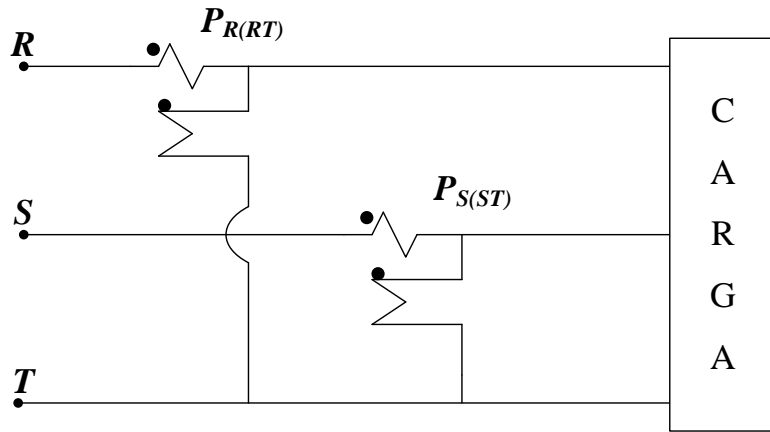
$$P = P_{R(RT)} + P_{S(ST)}$$



$$P = P_{R(RT)} + P_{S(ST)}$$

$$P_{R(RT)} = I_R * U_{RT} * \cos(\varphi_R - 30^\circ)$$

$$P_{S(ST)} = I_S * U_{ST} * \cos(\varphi_S + 30^\circ)$$



$$P = P_{R(RT)} + P_{S(ST)}$$

$$P_{R(RT)} = I_R * U_{RT} * \cos(\varphi_R - 30^\circ)$$

$$P_{S(ST)} = I_S * U_{ST} * \cos(\varphi_S + 30^\circ)$$

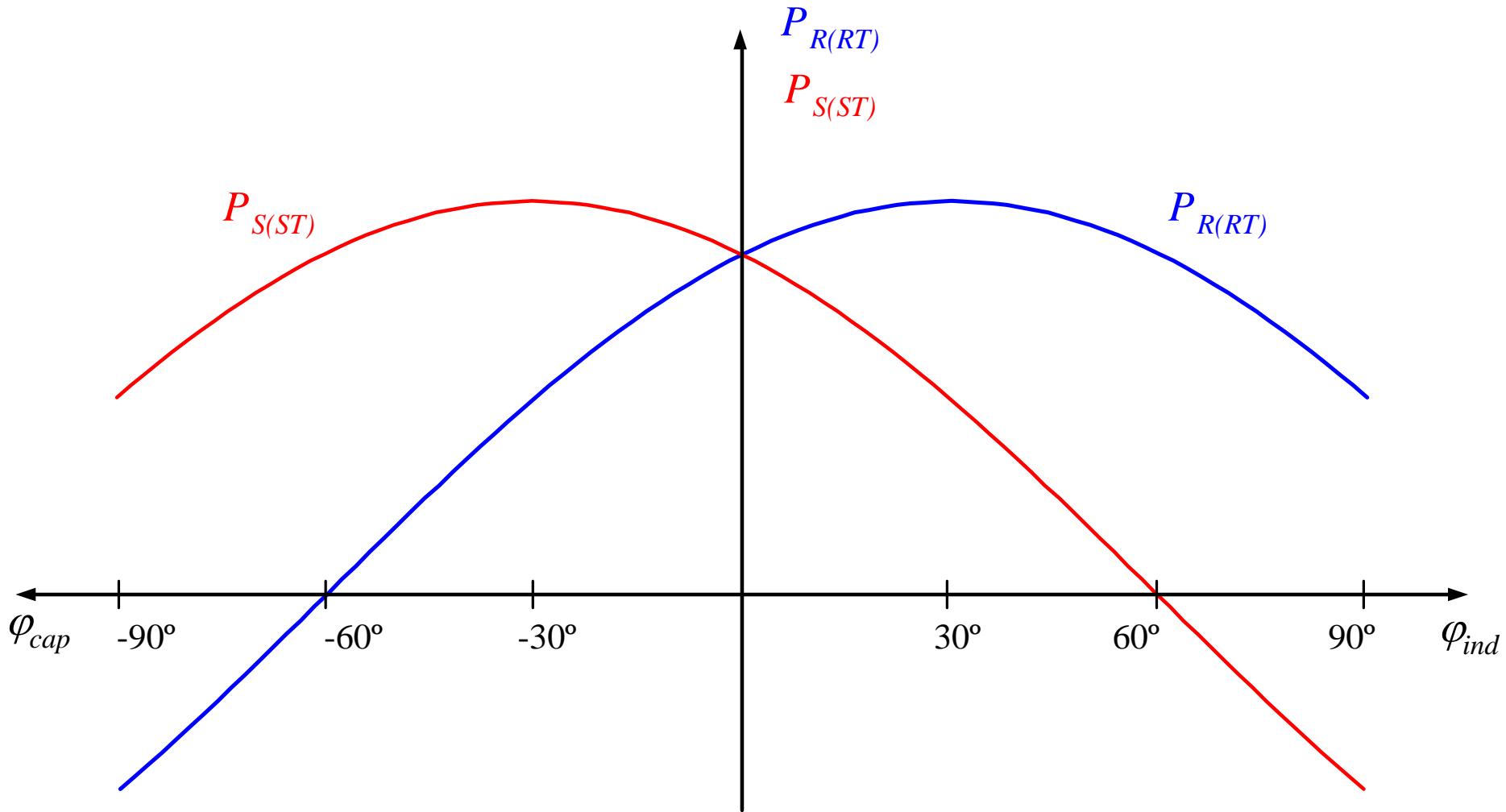
$\varphi_R < -60^\circ$ capacitivo (-)

$$\Rightarrow (\varphi_R - 30^\circ) < -90^\circ \Rightarrow P_{R(RT)} < 0$$

$\varphi_S > 60^\circ$ inductivo

$$\Rightarrow (\varphi_S + 30^\circ) > 90^\circ \Rightarrow P_{S(ST)} < 0$$

Caso particular: Sistema con Generador y Carga Perfectos

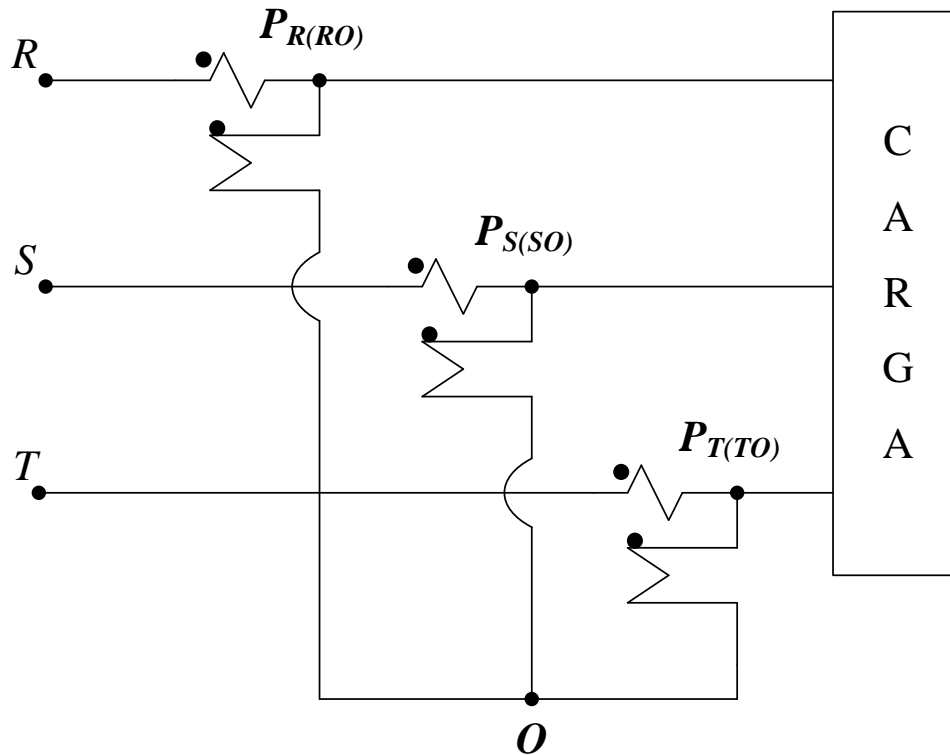
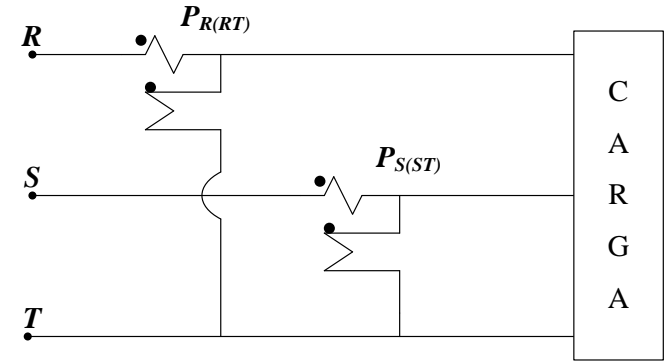


Limitaciones del Método de los Dos Vatímetros

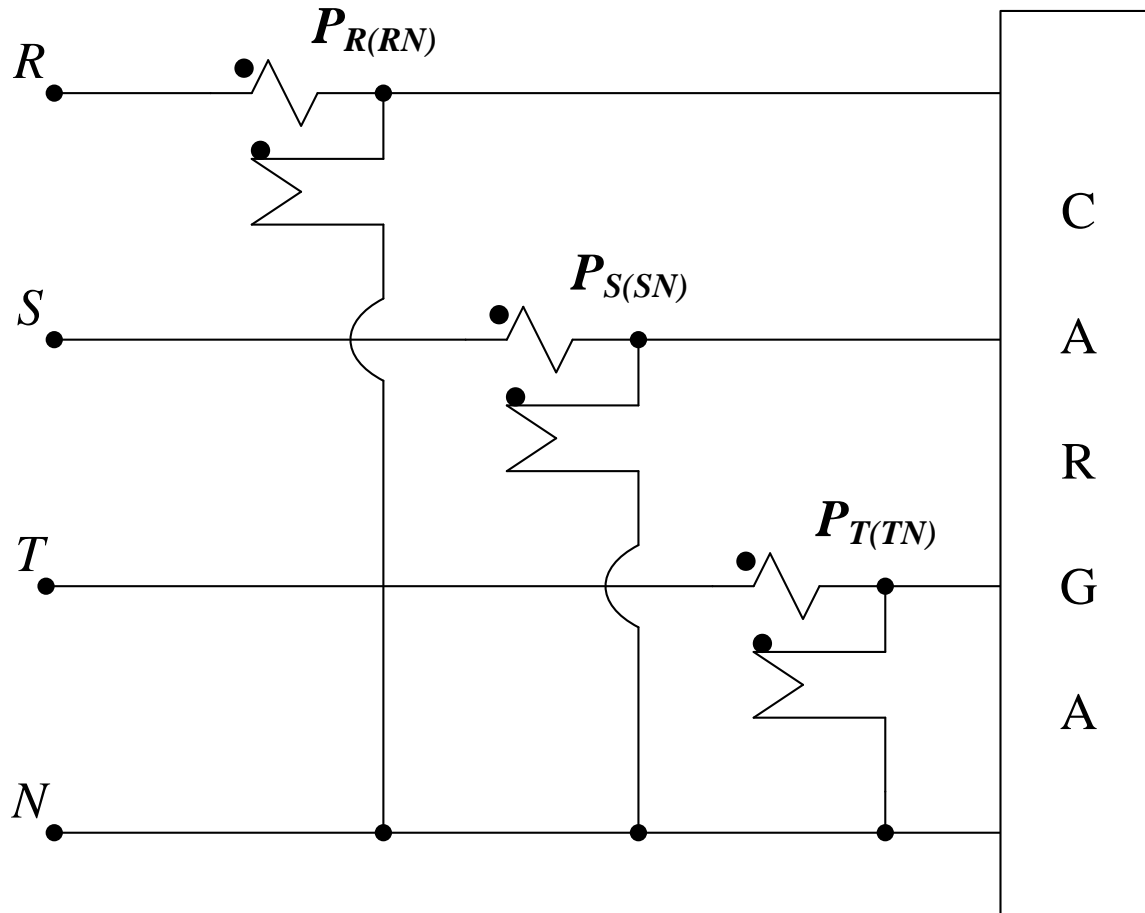
$$P = P_{R(RT)} + P_{S(ST)}$$

$$E_P = \pm (E_{P_{R(RT)}} + E_{P_{S(ST)}}) \quad y$$

$$e_P = \pm \frac{E_P}{P}$$

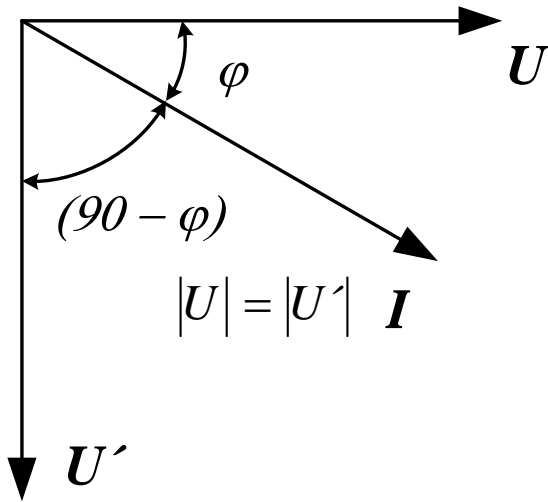


Medición de Potencia en Sistemas Trifásicos *Tetrafilares*



$$P = P_{R(RN)} + P_{S(SN)} + P_{T(TN)}$$

Medición de Potencia Reactiva con Vatímetros



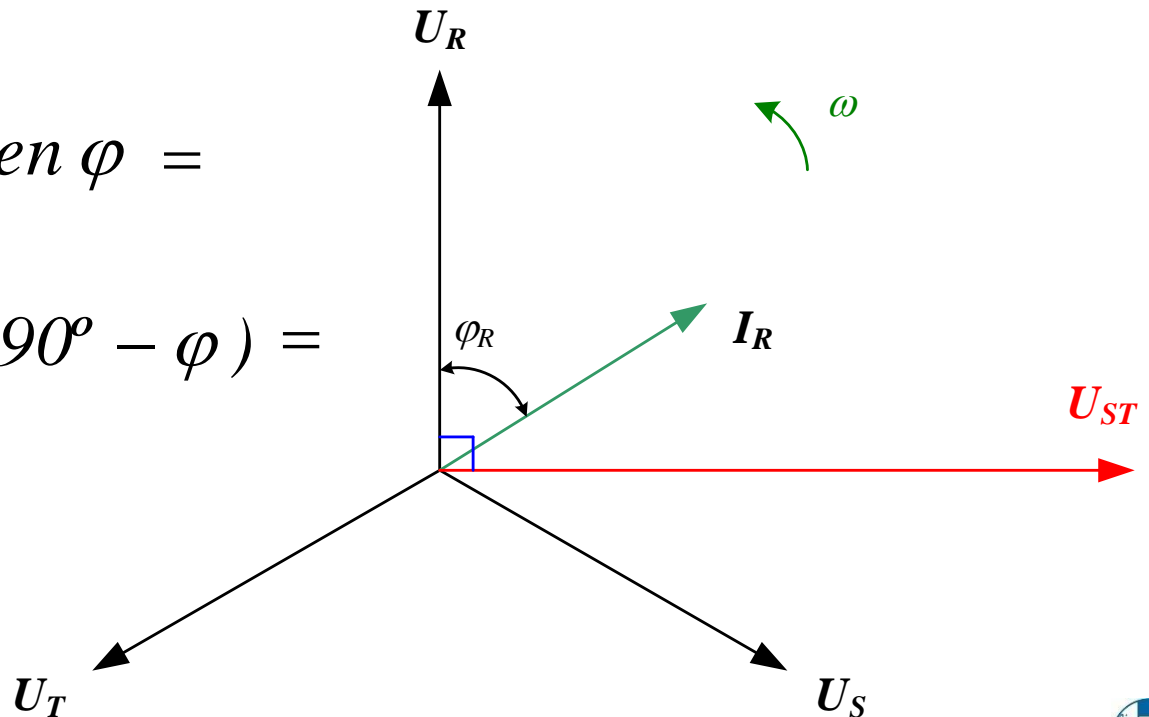
$$P = U * I * \cos \varphi$$

$$P' = U' * I * \cos(90 - \varphi) = \\ = U * I * \sin \varphi = Q$$

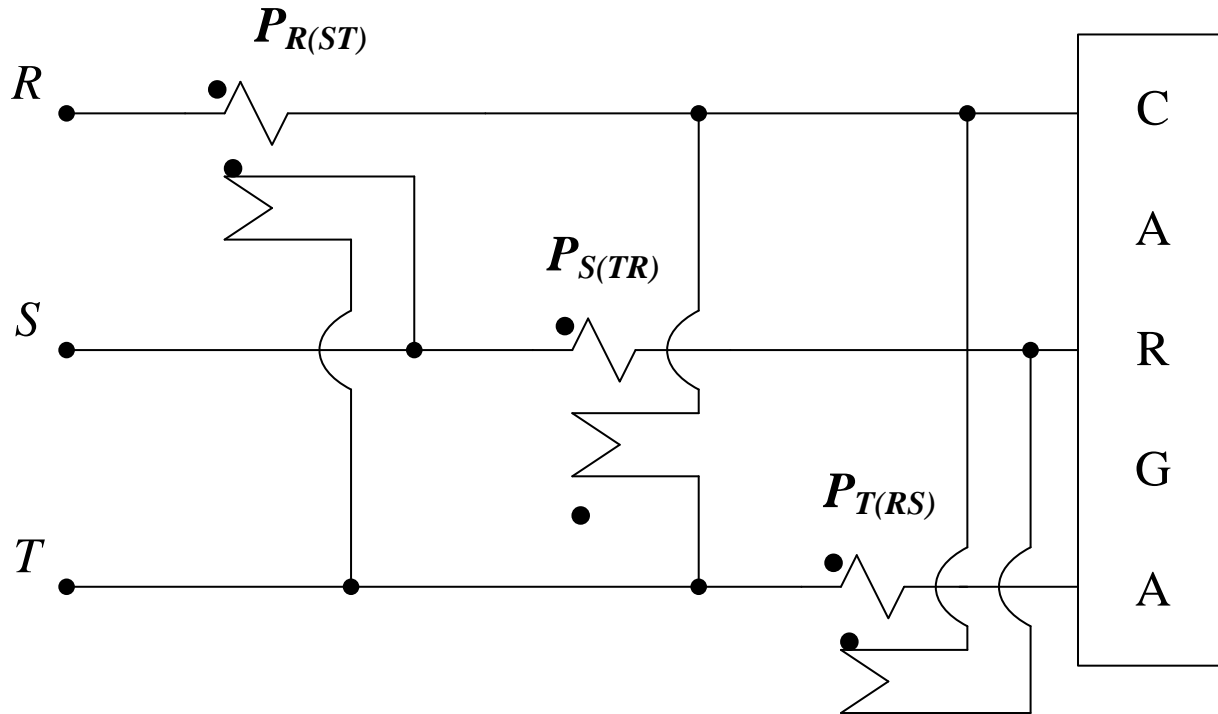
$$Q_R = U_R * I_R * \sin \varphi =$$

$$= \frac{U_{ST}}{\sqrt{3}} * I_R * \cos(90^\circ - \varphi) =$$

$$= \frac{P_{R(ST)}}{\sqrt{3}}$$



Medición de Potencia Reactiva con Vatímetros en Sistemas Trifásicos



Secuencia R - S - T

$$Q_R = \frac{P_{R(ST)}}{\sqrt{3}}$$

$$Q_S = \frac{P_{S(TR)}}{\sqrt{3}}$$

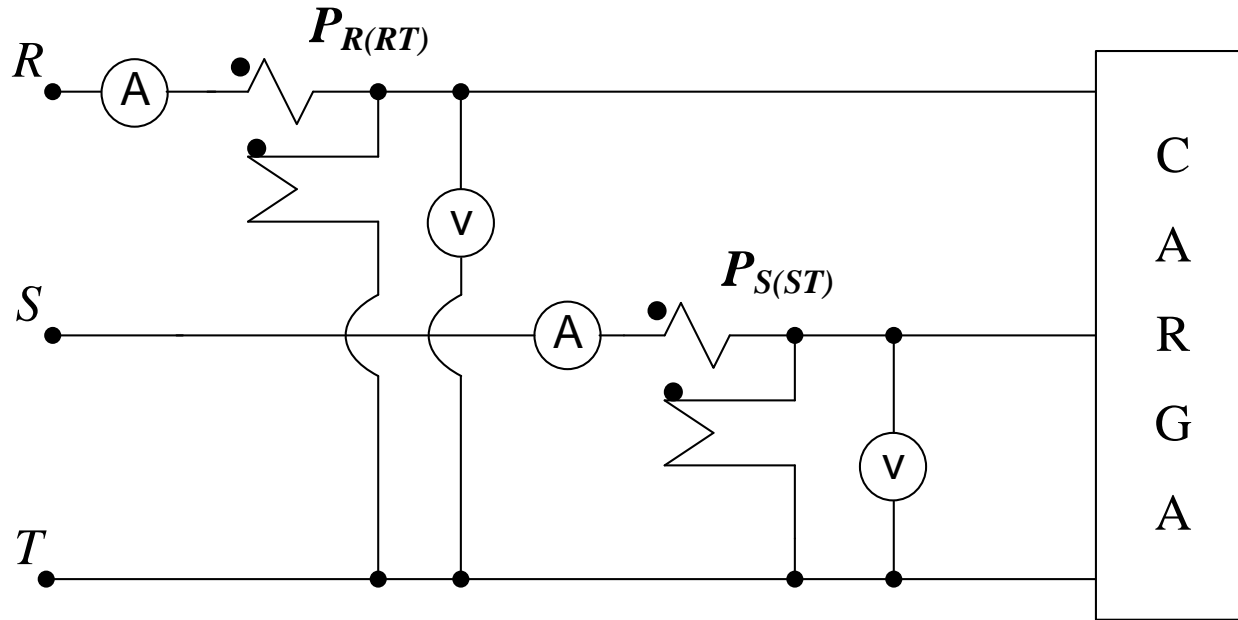
$$Q_T = \frac{P_{T(RS)}}{\sqrt{3}}$$

Ejemplo: determinar la potencia *activa total* y la potencia *reactiva total* de una carga Z (que puede considerarse aproximadamente perfecta), de 2,5 kVA, $\cos \varphi \cong 0,7$ (ind), $I_{fase} < 5$ A, alimentada por un sistema de generador perfecto de 3 x 380 V.

Elementos disponibles (3 de cada uno):

- Watímetro: U_n : 240 y 400 V, I_n : 5 A, c : 1, $\cos \varphi_n$: 1, R_{VV} : 133 Ω/V ; Z_{AV} : 1 VA, $\cos \varphi = 0,8$ a 5 A.
- Amperímetro: Alcance: 5 A, c : 1, Z_{AV} : 1 VA, $\cos \varphi = 0,8$ a 5 A
- Voltímetro: Alcance: 240 y 400 V, c : 1, R_V : 133 Ω/V

Circuito propuesto para la medición de P_{total}

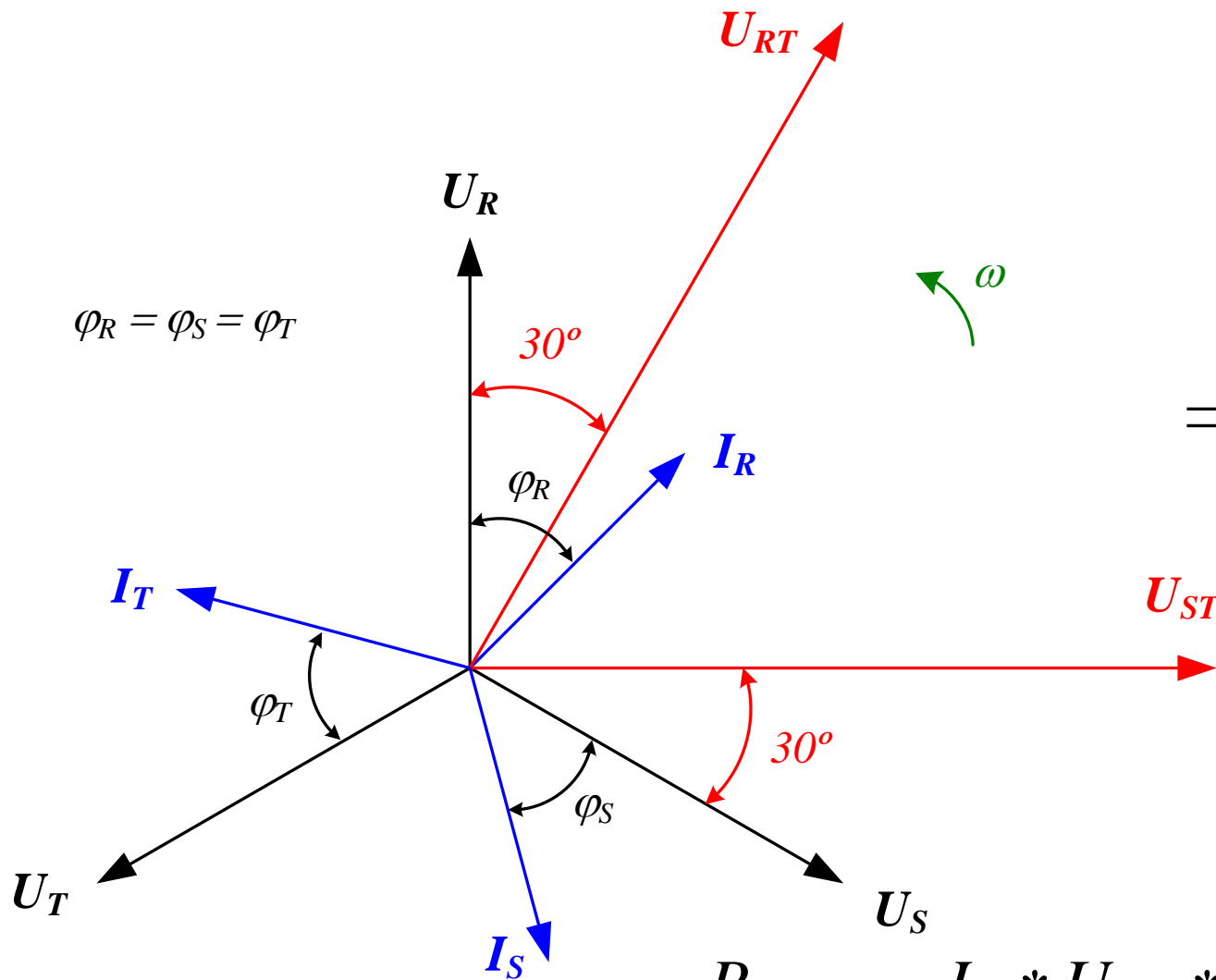


$$P_{Total} = P_{R(RT)} + P_{S(ST)}$$

$$E_{P_{Total}} = \pm (E_{P_{R(RT)}} + E_{P_{S(ST)}})$$

Suponiendo carga aproximadamente perfecta:

$$S = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_f \quad \Rightarrow \quad I_f = \frac{2,5 \text{ kVA}}{\sqrt{3} \cdot 380 \text{ V}} \approx 3,80 \text{ A}$$

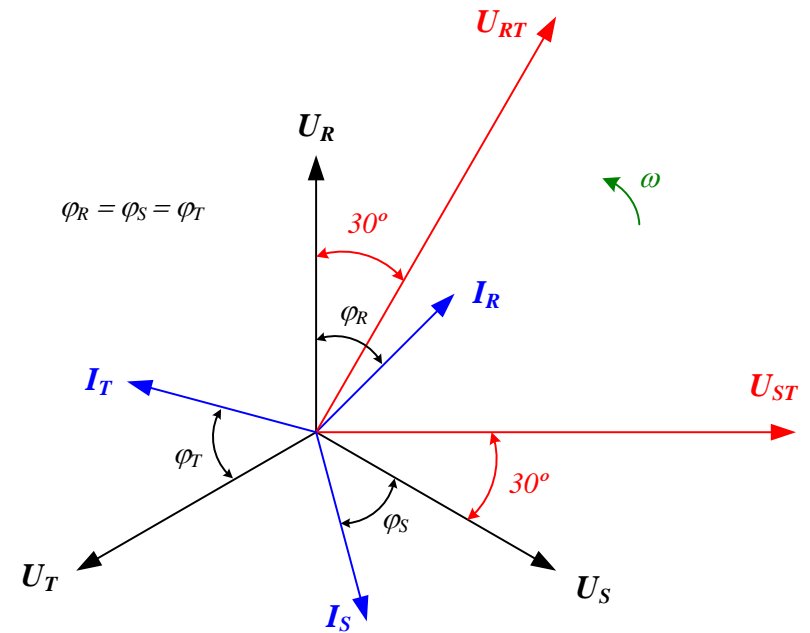
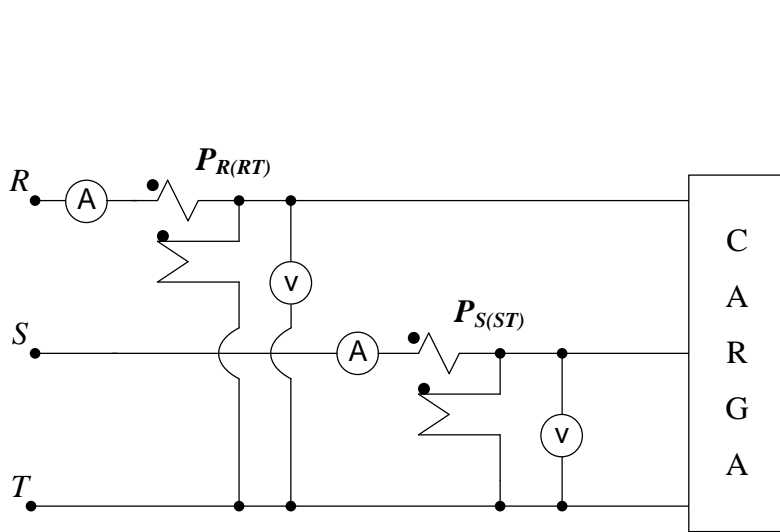


$$\cos \varphi = 0,7$$

$$\Rightarrow \varphi = 45,6^\circ$$

$$P_{R(RT)} = I_R * U_{RT} * \cos (I_R \hat{U}_{RT})$$

$$P_{S(ST)} = I_S * U_{ST} * \cos (I_S \hat{U}_{ST})$$



$$P_{R(RT)} = 3,80 \text{ A} * 380 \text{ V} * \cos (45,6^\circ - 30^\circ) = 1,39 \text{ kW}$$

$$P_{S(ST)} = 3,80 \text{ A} * 380 \text{ V} * \cos (45,6^\circ + 30^\circ) = 0,36 \text{ kW}$$

$$\Rightarrow P_{Total} = 1,75 \text{ kW}$$

$$E_{P_{R(RT)}} = E_{P_{S(ST)}} = \pm \frac{c}{100} P_f = \pm \frac{1}{100} 2 \text{ kW} = \pm 0,02 \text{ kW}$$

$$\Rightarrow E_{P_{Total}} = \pm (E_{P_{R(RT)}} + E_{P_{S(ST)}}) = \pm 0,04 \text{ kW}$$

Consumo propio de los dos vatímetros y los dos voltímetros, para U_n o alcance = 400 V:

$$R_V = R_{VW} = 400 \text{ V} * 133 \frac{\Omega}{\text{V}} = 53,2 \text{ k}\Omega$$

$$\Rightarrow P_{R_V} = P_{R_{VW}} = \frac{U^2}{R_V} = \frac{(380 \text{ V})^2}{53,2 \text{ k}\Omega} = 2,7 \text{ W}$$

Y para los cuatro instrumentos:

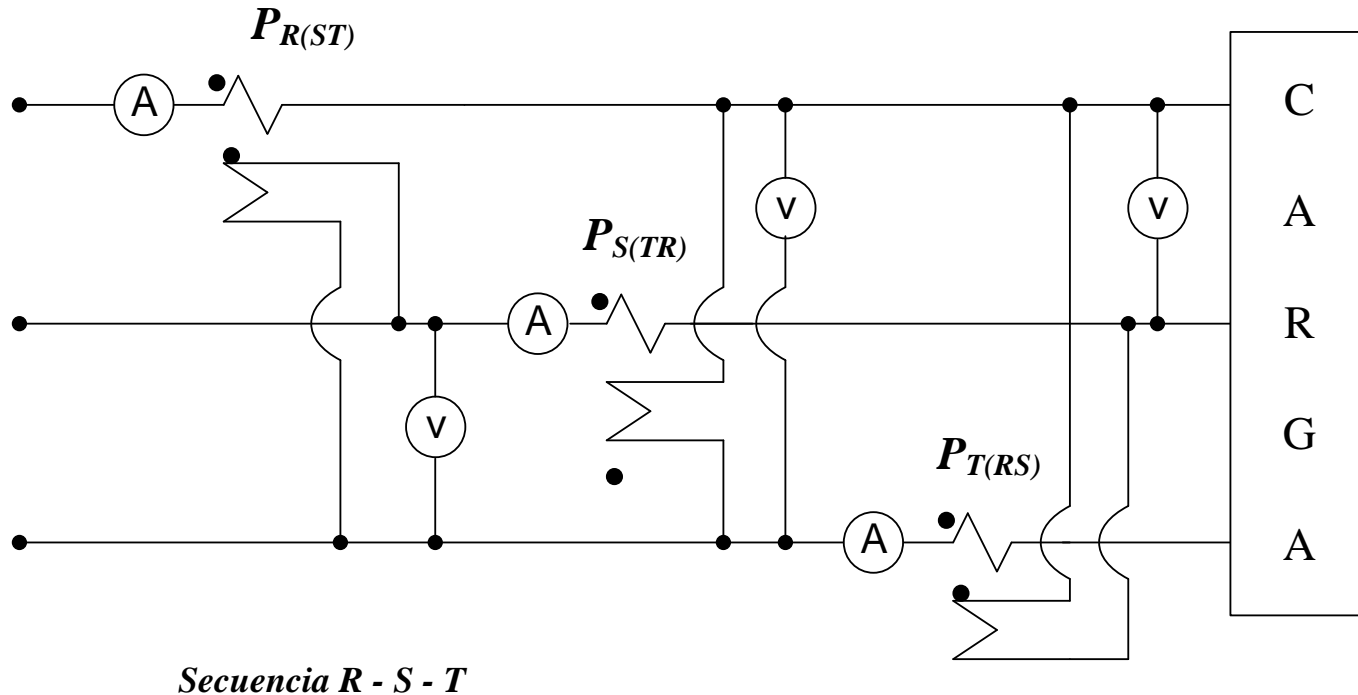
$$P_{R_V // VW} \text{ Total} = 4 * 2,7 \text{ W} \approx 0,01 \text{ kW} \quad (\text{que no es despreciable frente al error límite})$$

Así, al hacer la medición, la suma de las potencias medidas por los vatímetros dará la potencia en la carga ($1,75 \text{ kW}$), más el consumo de los circuitos voltimétricos de los vatímetros y voltímetros ($0,01 \text{ kW}$), por lo cual, al valor obtenido, deberá restársele $0,01 \text{ kW}$.

La expresión final, teniendo en cuenta el error límite, será:

$$P_{Total} = (1,75 \pm 0,04) \text{ kW}$$

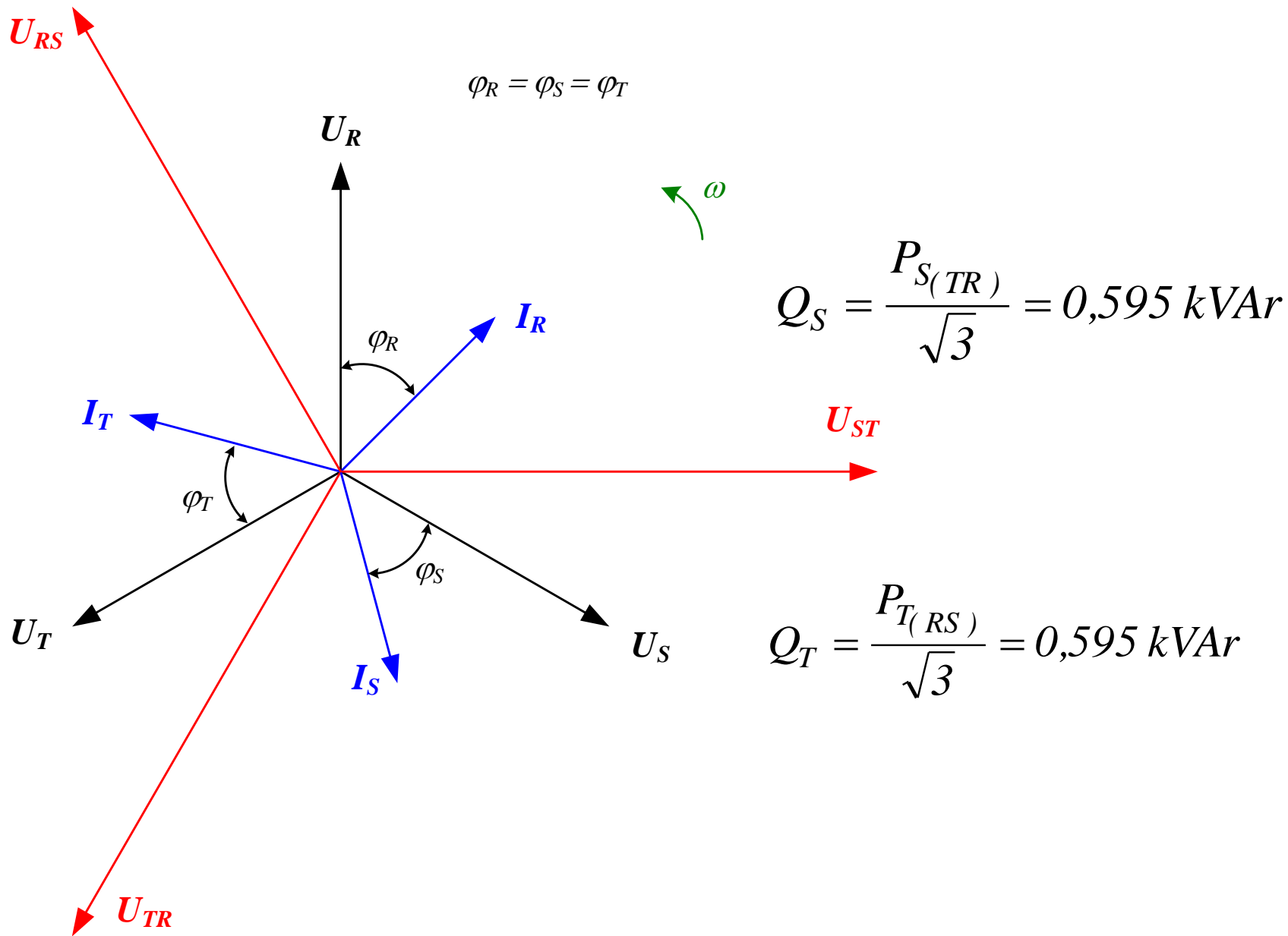
Circuito propuesto para la medición de Q_{total}



Secuencia R - S - T

$$Q_R = U_R * I_R * \text{sen } \varphi = \frac{P_{R(ST)}}{\sqrt{3}} = \frac{U_{ST}}{\sqrt{3}} * I_R * \text{cos} (90^\circ - \varphi) =$$

$$= \frac{380}{\sqrt{3}} * 3,8 * \text{cos} (90^\circ - 45,6^\circ) = 0,595 \text{ kVAr}$$



$$Q_{Total} = Q_R + Q_S + Q_T = \frac{(P_{R(ST)} + P_{S(TR)} + P_{T(RS)})}{\sqrt{3}} =$$

$$= 3 * 0,595 \text{ kVAr} = 1,78 \text{ kVAr}$$

Y el error límite:

$$E_{Q_{Total}} = E_{Q_R} + E_{Q_S} + E_{Q_T} = \frac{(E_{P_{R(ST)}} + E_{P_{S(TR)}} + E_{P_{T(RS)}})}{\sqrt{3}}$$

$$E_{P_{R(ST)}} = E_{P_{S(TR)}} = E_{P_{T(RS)}} = \pm \frac{c}{100} P_f = \pm \frac{1}{100} 2 \text{ kW} = \pm 0,02 \text{ kW}$$

$$\Rightarrow E_{Q_{Total}} = \pm \frac{3}{\sqrt{3}} 0,02 \text{ kVAr} = \pm 0,03 \text{ kVAr}$$

$$\Rightarrow Q_{Total} = (1,78 \pm 0,03) \text{ kVAr}$$